第一章
导　论

逻辑悖论不仅是目前国内外逻辑学与哲学界的一个热门话题，而且在十分广泛的学术领域引起关注和讨论。但由于问题本身的复杂性以及对现代逻辑知识理解与掌握程度的差异，在有关逻辑悖论的一系列基本问题上还存在诸多学术歧见，同时也经常见到一些严重的误视与错解。本章试图从悖论研究的历史实际出发,系统阐述严格意义逻辑悖论的界说与分类,说明逻辑悖论的一般特征,进而通过 RZH 解悖标准的研讨，说明逻辑悖论研究的三个不同层面。

第一节　逻辑悖论的构成

美国著名哲学家和逻辑学家克里普克（S. Kripke）于 1975 年发表的《真理论论纲》一文，是当代逻辑悖论研究最重要文献之一。该文是以谈论《圣经·新约》的两个问题开头的：

需要全本请访问 www.ertongbook.com

自从彼拉多(Pilate)(向耶稣)提问“什么是真理”(《约翰福音》18:38)以来,所有对该问题正确答案的寻求,都被另一个同样出现在新约圣书中的众所周知的问题所困扰 如致提多(Titus)的使徒书作者保罗(Paul)所说(《提多书》1:12),一个克里特先知(“克里特人自己的一个先知”)断言“克里特人总是说谎者”,而如果(像使徒所说)“这个见证是真的”对克里特人所说的其他所有话成立,那就会出现这样的情形:克里特先知的这句话为真当且仅当其为假。对真理概念的任何处理都必须设法对付这个悖论。①

《圣经·新约》中使徒保罗致提多信中的原话是:“克里特人自己的一个先知说:‘克里特人总是说谎者,是懒惰贪食的恶兽。’这个见证是真的。”(“One of them, a prophet of their own, said, ‘Cretans are always liars, evil beasts, lazy gluttons.’ This testimony is true.”)显然,保罗自己并没有意识到这里存在什么悖论。但该问题在《圣经》中的存在无疑促进了西方人对悖论问题的兴趣。

据考证,保罗所说的克里特先知,是公元前 6 世纪希腊传奇式人物伊壁门尼德(Epimennides),故克里普克所述“悖论”又称为“伊壁门尼德悖论”。伊壁门尼德悖论之推导的仔细辨析,对于弄清逻辑悖论的特征有重要意义。首先需要澄清推导中使用的一些基本概念。如克里普克所说,这里有两种不同的“真”:“真诚”之真和“真实”之真,相应地也有两种不同的“假”:“说谎(假话)”的通

① S. Kripke, “Outline of a Theory of Truth”, *Journal of Philosophy*, Vol. 72 (1975). Reprinted in R. L. Martin, ed., *Recent Essays on Truth and the Liar Paradox*, Oxford University Press, 1984, p53.

常含义指涉‘非诚’之假,但逻辑学更感兴趣的是‘非实’之假。在两种解释下伊壁门尼德悖论均可分别构成,但切不可将两者混为一谈。此外,这里的‘说谎者’须释为‘所做陈述皆假之人’。由此请考虑,伊壁门尼德的断言‘克里特岛人总是说谎者’(简称 K)是真是假?显而易见,依据伊壁门尼德本人也是克里特岛人的经验事实,从 K 本身即可推出‘伊壁门尼德也是说谎者。’再依据‘说谎者’的前述规定,可得:

(1)如果假设 K 为真,可推出 K 为假。

那么,能否也会由假设 K 为假可推论其真呢?稍加分析不难看出,单从 K 本身和伊壁门尼德是克里特人的经验事实,尚无法做出这样的推论。但若增加假定只有伊壁门尼德一个人是克里特人并且 K 是他说过的惟一一句话,或者假定其他克里特岛人的确都是说谎者(这正是克里普克所谓“对克里特人所说的其他所有话成立’之意),则亦可获得:

(2)如果假设 K 为假,可推出 K 为真。

(1)(2)两式相合,即可得到:

(3)K 真,当且仅当,K 假。

任何形如(3)的形式,被称为‘矛盾等价式’或‘矛盾互推式’。

显而易见,上述推导中的两个‘假定’并不是经验事实,因而矛盾等价式的后一半并不能真正建立起来;而前一半之由真推假,恰可视为伊壁门尼德断言必假的一个证明。亚里士多德(Aristotle)

还曾正确地指出,如果不把‘说谎者’定义为‘所说每一句话皆假之人’,前一半也是推不出的;而一旦做出这样的定义,则该推导只不过是矛盾律之作用的又一例证,犹如他在《形而上学》中对‘一切言论皆假’的分析一样。然而,公元前 4 世纪,麦加拉学派的欧布里德(Eubulides)发现,对导出悖论来说,上述经验事实的因素可以消去。欧布里德把问题表述为:

如果某人说他正在说谎,那么他说的话是真还是假?

欧布里德问题经常被重述为:

“我现在说的这句话是谎话”,这句话是否可赋真值?

若假设它为真,根据其语义,可得它为假;而若假设它为假,其语义又恰好‘是其所是’,可得它为真,因而由此完全可以建立矛盾等价式,而且此处矛盾等价式的建立不依赖任何经验事实。这就是历史上说谎者悖论的由来。

“我现在说的这句话是谎话”,通称‘说谎者语句’。现代悖论研究中一般将之表述为‘:本语句是假的’,或使用语句名称符号刻划为:

L:　L 是假的。

这种表述消除了原句中的人称和时间索引词,同时也避免了“谎话”的语用歧义,从而使悖论的构造更为简单明了。

我们之所以详细叙述这个众所周知的悖论的由来,旨在全面展示严格意义的逻辑悖论的构成要素。首先,可以建立矛盾等价

式，是逻辑悖论的形式特征。亚里士多德指出“一切言论皆假”自相矛盾，古印度学者认为“一切言皆妄”自语相违，我国先秦典籍《墨经》中说‘以言为尽悖,悖,说在其言’,都是说由一个语句的真可推出其假，但反之不然。因而这些推导都不能建立矛盾等价式，可名之为“半截子悖论”。我认为，中国和印度古代典籍中只有半截子悖论而没有可构成矛盾等价式的逻辑悖论出现，是一个值得深思的文化现象。①

在经典二值逻辑中，一个语句的真假关系可对应于两个相互矛盾的语句 p 与¬p(非 p)之间的关系。以↔表示‘当且仅当’,则矛盾等价式的一般形式可记为：

$$p \leftrightarrow \neg p$$

之所以用“可以建立矛盾等价式”的表述，是因为矛盾等价式在悖论的实际语言表述中未必出现。逻辑悖论另一种典型的表述形式是：在同一背景知识下，既逻辑地推出 p,又逻辑地推出非 p.据此使用归谬推理，可以很容易地建立矛盾等价式。

此处“在同一背景知识下”的限制是极其关键的，这涉及到逻辑悖论的第二个构成要素：公认正确的背景知识。以上关于“伊壁门尼德悖论”的表述中也构成了矛盾等价式，但其推导中使用的两个假定并不是为人们所公认的，因而这个矛盾等价式并不成其为严格意义上的逻辑悖论。实际上，若没有一定的背景知识的参与，单从语句 p 本身决不可能逻辑地推出非 p,从非 p 也决不可能推出 p。著名逻辑学家和哲学家塔尔斯基(A. Tarski)曾对此进行

①参见拙文《严格悖论为什么没有在先秦哲学典籍中出现》，载《哲学研究》(“澳门'97 中国名辩学与方法论研讨会”专辑)1998,收入《矛盾与悖论新论》。

需要全本请访问 www.ertongbook.com

了深入细致的分析，揭示了人们在推导说谎者悖论过程中不自觉地使用的‘公共知识”。他指出，人们在推导中所依赖的关于语句真值的直觉观念遵循如下模式：

x 是真的，当且仅当，p

这个模式称为‘（T）模式”。其中，x 是语句 p 的名称。若用引号式“p”表示 p 的名称，则这个模式更为直观。例如：

“雪是白的”是真的，当且仅当，雪是白的。
“地球绕太阳转”是真的，当且仅当，地球绕太阳转。

除此之外，要严格地导出说谎者悖论，尚需如下两条：

1. 语言的‘语义封闭性”。即‘悖论在其中构成的语言不仅包含了这种语言的表达式，也包含了这些表达式的名称，同时还包含了诸如指谓这种语言中的语句的词项‘真的’这样的语义学词项；我们还假定所有决定这个词项适当使用的语句都能在这种语言中得到断定。”塔尔斯基指出，我们平时使用的日常自然语言，就是具有语义封闭性的语言。

2. 经典二值逻辑“通常的逻辑定律是有效的”。①

与不严格的‘伊壁门尼德悖论’相类似，一些‘经验事实’陈述也会出现在严格悖论所由以导出的背景知识之中。近来逻辑学家发现，只要确认陈述句可以作为真值载体（无论是作为本体性载体还是导出性载体）和说谎者语句是合乎语法的陈述句这一毋庸置

① A. 塔尔斯基：《真理的语义学概念和语义学的基础》，肖阳译，载涂纪亮主编《语言哲学名著选辑》，三联书店 1988 年版，第 255 页。

疑的经验事实，便可取代塔尔斯基对语义封闭性的复杂规定而逻辑地推出矛盾等价式。①

逻辑悖论的第三个构成要素，是其所依据的背景知识和矛盾等价式之间的无误推导。塔尔斯基曾对说谎者悖论的推导做了严密的逻辑刻画。令符号 L 作为如下语句的缩写：

本页本行中的语句是假的。

依据明显的经验事实可以确定（用双引号表示语句名称）：

“L 是假的”等于 L。

据(T)模式知：

“L 是假的”是真的,当且仅当,L 是假的。

两式相合,可得(据同一替换定理)：

L 是真的,当且仅当,L 是假的。

在前述语义封闭的背景知识之下，这个推导可以经受经典逻辑的严格检验，是无懈可击的。

总之，“公认正确的背景知识”、“严密无误的逻辑推导”、“可以建立矛盾等价式”，是构成严格意义逻辑悖论必不可少的三要素。

① 参见 R. L. Martin, ed. *Recent Essays on Truth and the Liar Paradox*, pp2—3.

由此我们可以得到如下定义：

> 逻辑悖论指谓这样一种理论事实或状况，在某些公认正确的背景知识之下，可以合乎逻辑地建立两个矛盾语句相互推出的矛盾等价式。①

悖论作为一种理论事实或理论状况，是由三要素共同决定的。“理论事实或状况”的涵义有两个方面：其一，悖论并不存在于纯客观对象世界，而存在或内蕴于人类已有知识系统之中；其二，悖论是一种系统性存在物，再简单的悖论也是从具有主体间性的背景知识经逻辑推导构造而来，任何孤立的语句本身都不可能构成悖论。

掌握逻辑悖论的完整涵义，有助于弄清如下两个重要区别：1. 悖论与悖论性语句之别；2. 悖论与悖论的拟化形式之别。

学界经常有人把前述说谎者语句直接指认为说谎者悖论，这显然是不适当的。在悖论构造中可以作为矛盾等价式前件或后件出现的语句，只能称为“悖论性语句”，而不可视为悖论本身。

学界也经常有人错误地把说谎者语句 L 之类悖论性语句视为悖论赖以推出的“前提”，这是需要特别予以纠正的。因为悖论所据以推导的前提在悖论建构中隶属“公认正确的背景知识”要素，而 L 之类悖论性语句只是在悖论推导过程中所使用的假设，在我们得到 $L \leftrightarrow \neg L$ 型矛盾等价式时，这个假设已被消去。换言之，矛盾等价式的得出并不以悖论性语句为“前提”。

① 该定义与国内外通行定义的比较研究，参见张建军、黄展骥著《矛盾与悖论新论》，河北教育出版社 1998 年版，第 104—109 页；亦可参见赵总宽主编《逻辑学百年》，北京出版社 1999 年版，第 368—373 页

“悖论的拟化形式”指谓具有悖论的结构特征，但其推导所依据的前提或假设并非“公认正确的背景知识”的情况。[①] 加入两个“假定”之一才可构成的“伊壁门尼德悖论”，就是一个典型的拟化形式。而著名的“理发师悖论”是另一个典型个例。这是罗素（B. Russell）于 1918 年在《(大)数学原理》再版前言中，作为“罗素悖论”(详后)的“通俗版”而引入的：

> 一个村子里的某理发师（规定）给而且只给任何不给自己刮胡子的村民刮胡子。谁给该理发师刮胡子？[②]

现将问题的论域限制为该村村民集合，且已知该理发师也是一个村民。那么，假设该理发师不给自己刮胡子，依照规定可推出他必须给自己刮胡子；而假设他给自己刮胡子，依照规定又可推出他不能给自己刮胡子，从而可建构一矛盾等价式。然而，建构该矛盾等价式所本质地依据的假设（即上述规定），在任何意义上都不是“公认正确的背景知识”。由它推出矛盾等价式，只是这个规定之不合理性的一个证明而已。或如奎因（W. V. Quine）1962 年所说，这只能构成具有“规定”属性的理发师“不可能存在”的一个

① “悖论的拟化形式”(Imitation of Paradox)是笔者于 1990 年引入的一个称谓(见拙著《科学的难题——悖论》，浙江科学技术出版社 1990 年版，第 13 页)，以替代西方学界某些学者使用的“伪悖论”(Pseudo-Paradox)的称谓。显然，由本书所界说的逻辑悖论三要素看，用“伪悖论”或“佯悖”去指谓那些违反“严密无误的逻辑推导”的要求而内含逻辑错误的“悖论”是更为适当的。同时，“拟化形式”的称谓对这种拟悖论现象之重要研究价值的体现，也是“伪悖论”称谓所不具备的。

② A. N. Whitehead and B. Russel, *Principia Mathematica I*, Cambridge University Press, 1925, p60.

归谬法证明。①

罗素在引入这个“通俗版”时并没有明确说明它和严格悖论的根本区别，以致后来在许多文献中把它当作一个严格悖论对待，在国内学界这种现象迄今仍普遍存在。的确，拟化形式虽不是严格意义上的逻辑悖论，但它们的构造也有重要价值，可以用来启发解决悖论的思路与方法，已往的研究实践已充分表明了这一点。但拟化形式与严格悖论的区别又是十分重要的，决不可混为一谈。这在本书的讨论中可以得到充分的显示。②

在逻辑悖论的三个构成要素中“严密无误的逻辑推导”和“可

① 参见 W. V. Quine, “The Way of Paradox”, *Scientific American*, Vol. 206(1962). Reprinted in *The Way of Paradox and Other Essays*, Harvard University Press, 1966, p12.

② 笔者认为，关于“拟化形式”的上述讨论可以圆满解决我国两位著名逻辑学家莫绍揆先生和朱梧槚先生的一场争论。针对莫先生在多篇著述中把伊壁门尼德问题直接指认为“悖论”的观点朱先生指出，仅从“凡克里特人都说谎”决不能构成悖论，它和欧布里德“说谎者”的区别并非莫先生所说悖论性明显与不明显之分，而是“是与不是悖论之别”(参见《数学研究与评论》1982 年第 4 期，第 188 页)莫先生在答辩中说，只要有“克里特人别的话全是谎话”的假设，则指认伊壁门尼德问题为悖论就无可厚非，而且对理解说谎者悖论的“历史进程”等问题非常有益。(《数学研究与评论》，1983 年第 4 期，第 131 页) 而朱先生又指出，有无此假设恰恰是一个重要的问题，不提此假设而直接指认伊壁门尼德语句导致悖论，无论如何都是不正确的。(《数学研究与评论》，1985 年第 1 期，第 155 页) 而从本书的界说看，无论是伊壁门尼德问题的原始形式(一个典型的“半截子悖论”)，还是引入适当假设之后的形式(一个典型的“拟化形式”)，都不是严格意义的逻辑悖论朱先生所正确地指出并强调的是“半截子悖论”与严格悖论的区别，而莫先生在答辩中所强调的实质上是悖论的拟化形式的研究价值。在莫先生新近发表的《悖论》一文中有如下表述：“埃氏(即伊壁门尼德)是克里提岛人，他说：‘所有的克利提岛人均说谎’单就这句话而论得不出悖论，但埃氏说这句话的背景是：除他这句话外克利提岛人别的话都是谎话。我们承认这个背景并问：他这句话是真是假？……无论这句话为真为假，我们都陷于矛盾。”(载李志才主编《方法论全书 I》，南京大学出版社 2000 年版，第 565 页)莫先生这里虽仍未明确指明上述“背景”的性质但显而易见，如果我们弄清半截子悖论、悖论的拟化形式和严格意义的逻辑悖论的分界，在这个问题上完全可以达成共识。

以建立矛盾等价式”可从逻辑语形学和语义学获得解释，惟有“公认正确的背景知识”是一个涉及认知主体并具有一定模糊性的语用学概念。这个概念的模糊性源自逻辑悖论本质上的相对性。“公认”总是为某一领域的认知共同体所公认，因而任一悖论都相对于一定领域的认知共同体而言。既可如说谎者悖论这样相对于日常进行合理思维的普遍性认知共同体，也可以是某个特定学科领域的科学家共同体；其中的“背景知识”既可以是人们公认的明晰知识，也可以是认知共同体不自觉地使用的预设。尽管这个一般概念是模糊的，但落实到每个具体悖论的构造，其由以导出的背景知识，是能够以与特定认知领域相适应的严格性，明确而非含混地予以揭示的。正是由背景知识要素所决定，本书所界说的“逻辑悖论”既不是纯语形学概念，也不只是语义学概念，而是一个包容语形、语义因素的语用学概念。

明确指认正确界说的“逻辑悖论”实质上是一个逻辑语用学概念，对于逻辑悖论研究的意义是不言而喻的。但长期以来，国内外学界对此并无明确的认知。尽管本书所使用的逻辑悖论定义笔者已使用了十年，[①]而该定义所界说的实际上就是一个语用学概念，但‘悖论是一个语用学概念’的明确观念，是近来在研究‘预设’问题的过程中才颖悟到的。在弗雷格-斯特劳森研究传统中，“预设”仅被处理为一个语义学概念，这种处理陷入了种种难以摆脱的困境。70 年代初，美国学者斯塔纳克(R. C. Stalnaker)等人提出，预设实际上是一种语用现象，应从语用学角度界说‘预设’概念，并

① 该定义的最早使用出现在 1991 年 12 月提交首届全国科学逻辑讨论会的论文《悖论的逻辑与方法论问题》之中此前笔者使用的定义是：“悖论就是从某些公认正确的背景知识中逻辑地推导出来的两个相互矛盾的命题的等价式。”该定义在表述上把悖论归结为矛盾等价式有欠妥当，但亦本质地包涵了“公认正确的背景知识”这一语用要素

需要全本请访问 www.ertongbook.com

由此解决了以往长期不能解决的一系列问题。经过多年发展，这种“语用学转向”的价值已得到充分显现。[①] 由此我联想到，如果我们能够明确指认悖论是一种语用现象，从语用学角度界说“悖论”概念，是否会起到类似的作用呢？近期的研究使我确信，答案应是十分肯定的。

弄清“逻辑悖论”是一个语用学概念，可以引导我们把逻辑语用学研究所取得的一系列成果运用到悖论研究中来，某些问题甚至能收到迎刃而解之效。比如，当代语用学对于“共有知识”(mutual knowledge 或 common ground)和‘语用推理’的研究，对于我们正确把握逻辑悖论的背景知识要素和逻辑推论要素，评估和建构各种解悖方案，都有重要借鉴价值。

明确“逻辑悖论”概念的语用学性质，可以对悖论特征的另一种简明刻画有新的认识。香港学者黄展骥先生曾一再论证，应当用‘(逻辑)矛盾被证明’作为严格悖论(他称之为‘典型悖论’)之特征的最简刻画，[②]国内外学界也有一些类似的提法。陈波先生明确反对这种表述，认为“在任何情况下，我们都不能说已经证明了一个矛盾，因为（逻辑）矛盾按其本性来说就是不能被证明的东西，‘证明’一词的意义自动排除了证明矛盾的说法”[③]。出于同样的考虑，我也曾认为‘矛盾被证明’的说法自语相违，并提出必须将该说法中的‘证明’弱化为‘从公认的背景知识推出’。现在看来，这种看法乃缘于没有分别“证明”的语义学概念和语用学概念之故。若从语用学角度考察，实际的认知主体所做出的任何证明，哪怕是

①参见周礼全主编《逻辑——正确思维和成功交际的理论》，人民出版社 1994 年版，第 453—479 页。

②黄展骥：《评张、孙的悖论战》，《公教报》(香港)1991 年 5月 16、25 日，收入《逻辑与谬误研究》，吉林大学出版社 1991 版。

③ 陈波：《逻辑哲学导论》，中国人民大学出版社 2000 年版，第 255 页。

极严格的证明，只能从认知主体确信为真的前提出发，而不可能确保这些前提必定为真。实际上，能够为某一认知共同体所承认的证明，都是从该共同体所公认的前提经严格推导而建立起来。因此,从逻辑语用学的观点看,“矛盾被证明”的确可以作为严格悖论的简要而恰当的特征刻画。由该问题的讨论可见，即使我们所使用的“悖论”概念实际上就是一个语用学概念（陈波亦基本赞同三要素说），若没有其语用学性质的明确指认，仍会使研究走人误区。

尽管在“矛盾被证明”问题上有如上匡正，但我仍不能赞同黄展骥等学者弃置矛盾等价式用法的主张。由矛盾命题互推而建构的矛盾等价式，能够在形式上即可显示出逻辑悖论与普通的逻辑矛盾的差别，这是“矛盾被证明”所没有的功用。两种等价的表述各具特色，相得益彰，没有必要用一个排斥另一个。至于不少学者关于应把‘得出两个矛盾命题’和‘矛盾等价式’均纳入悖论界说的主张，从方便悖论识别的角度看是有道理的，但就揭示逻辑悖论的特征而言，我认为本书定义中“可以建立矛盾等价式”的提法已经足够。当然，如能就悖论的语用学性质达成一致，其形式特征表述上的分歧，已属次要问题。

第二节　逻辑悖论的类型

逻辑悖论语用学性质的确认，亦可帮助我们在国内外学界歧见颇多的悖论分型问题上获得新的认识。语用学概念的外延划分,必诉诸其中所包含的语用学因素,若以本书的‘逻辑悖论’定义为据,则必以‘公认正确的背景知识’之不同,作为划分逻辑悖论不同类型的标准。下面我们就运用这个标准，通过如下历史评述来认识与把握悖论的不同类型。

在 20 世纪悖论研究史上，第一个有影响的逻辑悖论分类理论，是英国数学家和逻辑学家莱姆塞(F. P. Ramsey)在试图解决以罗素悖论为代表的集合论悖论的过程中给出的。

1901 年罗素在德国数学家康托尔 (G. Cantor)创立的素朴集合论中发现了一个简单而重要的悖论，引发了数学发展史上第三次基础理论“危机”。这是因为素朴集合论被当时的数学界普遍公认为整个数学大厦的基础。由于素朴集合论可用纯逻辑语言表达与刻画，这场“危机”也被归之于逻辑基础理论。悖论在科学理论基底部分出现使罗素等人认识到，古希腊和中世纪哲学家们对说谎者之类悖论的探讨，决不是无谓的文字游戏，而是关乎人类思维基础的重大问题。因此，罗素提出了一种旨在一揽子解决集合论悖论和以往提出的说谎者型悖论的方案——分支类型论。但这个方案在形式技术和哲学说明两方面都受到了众多批评。正是通过对分支类型论的批判性审视，莱姆塞认识到，集合论悖论与说谎者型悖论虽然有类同的逻辑构造，但在其由以导出的基本命题 (即我们所谓‘背景知识’要素)的可表达性上有着重大的差别 集合论的基本原则可用纯粹的逻辑语形语言表达，而说谎者型悖论由以导出的基本原则,必定在本质上涉及‘真’‘假’等有关语言的意义、命名与断定，即语言与对象的关系方面的内容，因而这是两种不同性质的悖论。①

前述塔尔斯基对说谎者悖论的精确塑述已证实了莱姆塞关于说谎者型悖论的说法，现在我们来考察集合论悖论的典型代表——罗素悖论的构造。

罗素悖论的建构只需涉及集合论的三个最基本的概念“集

① 参见 F. P. Ramsey, “The Fundations of Mathematics”. Reprinted in D. H. Mellor, ed., *Foundations*, Humanities Press, 1978, pp58—100.

合“∈”元素“和”属于“∈”任一集合的元素“属于”该集合,是集合论的一项基本关系。根据素朴集合论的造集原则，任一集合都可作为元素属于一个新集合；根据其另一个造集原则，任一特征性质都可定义一集合（通称“概括原则”）。由此可把所有集合分为两类：一类是不属于自身的集合，如人的集合本身不是一个人，因而不能作为自身的一个元素,这种集合称为“非自属集”;另一类是属于自身的集合，如非人事物的集合本身亦为非人事物，因而可以作为自身的一个元素,这种集合称为“自属集”。① 从上述基本原则看，这种分类是充分适当无可怀疑的。然而，如果我们同时承认这些基本原则，则必可从上述分类推出矛盾。

罗素本人曾把其推导过程简洁地刻画如下（罗素通常把“集合”称为“类”）：

> 令 ω 作为所有不是自身元素的类的类，那么，无论类 x 可能是什么,“x 是 ω”与“x 不是 x”是等值的。因此,给出 x 的值 ω,则“ω 是 ω”,和“ω 不是 ω”,等值。②

①即使从素朴集合论的观点看，“非自属”也应是绝大多数集合的性质因而“非自属集”又称“平常集”;“自属集”又称“非常集”。我们可以举出的非常集的例子只有“大全集”(所有集合的集合);“负集”(不具有 X 属性事物之集),“无限集之集”及“抽象客体集”等。需要指出的是，迄今在我国学界仍未加批判地广为流传的观点：认为在素朴集合论看来，“一切概念所组成的集合”或“所有观念的集合”是非常集（此说源于(美) M. 克莱因:《古今数学思想》(第 4 册),上海科技出版社 1981年版,第 291页),是一个存在典型的语义层次混淆的观点。因为以所有概念为元素所组成的集合本身并不是一个概念。该例典型地说明了注意仔细辨析概念、分清层次之必要，而这对于逻辑悖论研究是尤为重要的。

②罗素:《以类型论为基础的数理逻辑》,苑莉均译,载《逻辑与知识》,商务印书馆 1996 年版,第 72 页。

如果我们把‘不是自身元素的类的类’即‘非自属集之集’称为“罗素集”,则上述推导所得到的矛盾等价式可表示为：

罗素集是自属集，当且仅当，罗素集是非自属集。

矛盾等价式的建立意味着其支语句的真假可以互推，但罗素悖论建构进程中始终并未使用真值概念。正如罗素本人指出，仅使用刻画性质与关系的逻辑语形语言，便可使该悖论得以重述。由于集合可用特征性质定义,则‘元素属于集合’可转化为‘个体具有某性质’的表述;‘集合的集合’可转化为‘性质的性质’的表述，可分别符号化为 Fa、GF 等。如此,所有性质亦可分为两类:自有性质(如性质‘可理解的’本身也是可理解的)和非自有性质(如性质‘诚实’本身并不具有诚实性)。现问:非自有性质本身是自有的还是非自有的？结论：它是自有的，当且仅当，它是非自有的。该悖论可用如下二阶逻辑（因这里约束变项不是“个体变项”，而是“性质变项”)纯形式构造‘一步即成’:

$$(1)(\forall X)(P(X) \leftrightarrow \neg X(X))$$
$$(2)P(P) \leftrightarrow \neg P(P)$$

(1)刻画了非自有性质的特征,即‘对于所有性质 X,X 有 P 性质，当且仅当,X 不自有。”(2）则使用全称限定规则即得到矛盾等价式。

作为罗素悖论直接转化物的性质悖论的纯语形构造说明，莱姆塞的悖论分类是有充分根据的。后来的研究实践也表明，在不涉及说谎者型悖论的情况下，集合论悖论可以得到相对独立的解决。

莱姆塞把集合论悖论称为‘逻辑悖论’,把说谎者型悖论称为‘认识论悖论’。莱姆塞意义上的‘逻辑悖论’是该词的最狭义用法,这种用法与本书所使用的‘逻辑悖论’一词的根本差异在于:莱姆塞命名中的‘逻辑’主要指谓悖论所据以推导的背景知识的‘逻辑性’,即集合论语言可以转化为纯粹的逻辑语形语言;而本书命名中的‘逻辑’主要指谓悖论推导过程的‘逻辑性’,这是该词的广义用法。由于集合论语言可以转化为高阶逻辑语言,故莱姆塞意义上的逻辑悖论时常被明确指认为高阶逻辑悖论,更多地则称为‘集合论-语形悖论’或‘语形悖论’。语形悖论无疑是广义逻辑悖论的一种最严格的形态。

莱姆塞所指谓的‘认识论悖论’现通称‘语义悖论’,以是否在‘背景知识’之所指层面本质地使用语义概念而与语形悖论划界。由上述三要素说视之,是否本质地使用了语用概念完全取决于背景知识要素,而不决定于另外两要素。

除说谎者悖论及其各种变体之外,人们还为‘可定义’、‘描述’、‘满足’等一系列语义概念构造了类似的严格悖论,形成了一个丰富多彩的语义悖论群落。其中‘理查德悖论’就是在罗素悖论公布于世之后不久,法国的一个中学教师理查德(J. Richard)于 1905 年发现并公布的一个关于‘可定义性’概念的悖论:兹令 E 是可用有限个文字定义的十进位小数组成的集合,并令它的元素均被序化为第 1 个、第 2 个、第 3 个等等;再令 N 代表这样一个小数,如果在 E 中的第 n 个小数的第 n 位数是 m,则 N 中的第 n 位数或是 m+1(当 m≠9 时),或是 0(当 m=9 时)。这样,N 就不同于 E 中的每一个元素,但它却已经被有限个文字定义出来了。因此,在集合和可定义性的通常意义下可得:

n 是 E 的元素,当且仅当,n 不是 E 的元素。

需要全本请访问 www.ertongbook.com