

北京市社会科学理论著作出版基金资助

模态逻辑导论

周北海 著

北京大学出版社

北 京

前 言

今日的逻辑学象是已被数学“同化”了，其中或者是为数学建立的逻辑，如一阶逻辑等，或者是大量引用数学方法建立的逻辑，如现代模态逻辑。这本是逻辑学的进步，也是其发展的必经之路。但是，这样的逻辑，在缺少足够的数学知识和训练的情况下，往往也会使人感到难以理解和把握。面对这样一种状况，本书的宗旨之一，就是要适用于文科类读者。为此，本书在阐述抽象理论的同时，注意给出较详细的解释与说明，包括对一些“非常基本的”概念和问题的解释与说明。这还使得本书在基本概念方面是自足的，或基本自足的。

模态逻辑在现代逻辑中有着重要的地位与作用。现代逻辑可以分为古典逻辑和非古典逻辑（又称经典逻辑以及非经典逻辑）两大类。模态逻辑是非古典逻辑中首先发展起来的逻辑分支之一。由模态逻辑所首创和引发的一些思想、方法及理论在逻辑学中有着广泛的应用，并且导致了一大类逻辑的形成。这类逻辑即哲学逻辑，又称应用逻辑，是目前逻辑学中最活跃的一个领域。掌握模态逻辑不仅对进入这个领域有直接的作用，而且，作为非古典逻辑，模态逻辑又是因为对古典逻辑的某些基本的出发点持不同观点而发展起来的，了解模态逻辑可以使我们站在古典逻辑之外来看古典逻辑，这对于进一步理解古典逻辑，乃至理解整个现代逻辑都有重要的作用。因此在初步具备古典逻辑知识的基础上，从模态逻辑开始进一步了解和掌握现代逻辑，应该说是最好的选择。

本书阐述模态逻辑的基础知识，共十章。第一章是模态逻辑的概述，比较详细地论述了尤其是初学者关心的关于模态逻辑的一些基本问题，以使读者对模态逻辑有初步的总体认识。第二章至第八章为模态命题逻辑部分。第二章介绍了几个经典的模态命题逻辑系

统。第三章介绍可能世界语义学的基本内容，并给出前章中的几个系统的语义解释。第四章介绍可能世界语义学下的语义图及方法，以及由此证明几个经典模态系统的完全性。第二、三章以及第四章是全书的基础部分。第五、六、七章可视为基础部分的推广，介绍模态逻辑的其他各类系统以及其中一些系统的语义解释。第八章为模态代数，是技术性较强的部分，需要一定的数学基础，读者可视具体情况取舍。第九、十章为模态谓词逻辑部分，前者介绍的是形式上的演算以及语义解释和完全性证明，后者是与模态谓词逻辑有关的一些理论问题和哲学问题。各章内容上的承接关系见 p. viii。

本书的最低预备知识假定是初步的素朴集合论（可参见《新逻辑教程》（第九章），宋文坚主编，北京大学出版社 1992 年出版）。此外，模态逻辑以古典命题逻辑和谓词逻辑为基础，因此在理论上最好也应具有这方面的知识（可参见《逻辑演算》，刘壮虎著，中国社会科学出版社 1993 年出版）。不过本书在概念上是自足的，所以也可以直接进入本书的学习。

周北海

1997 年 1 月于燕北园

鸣 谢

本书是在逻辑学界的前辈与同行的指导和帮助下完成的。王宪钧教授在思想风格上给作者很大的影响。晏成书教授给予了极大的关心，在病危期间还多次问及写作情况。宋文坚教授作了具体的安排与指导。郭世铭副教授审阅了全书初稿，严格把关，指出了其中的疏漏与错误。张清宇研究员解答了作者请教的一些问题。毛翊同志为本书作了部分录入和初步的排版工作，并就内容方面的问题提出了一些宝贵意见。

本书的写作主要参考了由 G. E. Hughes 和 M. J. Cresswell 所著的 *An Introduction to Modal Logic* (《模态逻辑引论》)。

北京市社会科学理论著作出版基金会对本书的出版给予了资助。责任编辑李昭时同志逐字逐句地校读了全书，提出了最后的修改意见。

本书的写作还得到了李向红女士在提供电脑设备方面的帮助。

作者谨对以上各位和来自各方面的关心与帮助表示最诚挚的感谢！

目 录

第一章 绪论	1
1.1 模态逻辑	1
1.1.1 模态	1
1.1.2 模态命题和命题的模态形式	5
1.2 传统模态逻辑与现代模态逻辑	9
1.2.1 传统模态逻辑	9
1.2.2 现代模态逻辑的产生	12
1.2.3 现代模态逻辑的研究内容与特点	19
1.3 学习模态逻辑的意义	22
1.4 本书内容设置	23
1.4.1 逻辑学与逻辑	23
1.4.2 逻辑研究	24
1.4.3 内容设置	27
1.5 附录1 古典命题逻辑 形式语言和古典命题演算 P	28
1.5.1 古典命题逻辑	28
1.5.2 形式语言 L_P	30
1.5.3 古典命题演算 P	32
1.5.4 常用 P-定理与导出规则	33
1.6 附录 2 一阶逻辑 形式语言 L_Q 和一阶演算 Q	35
1.6.1 一阶逻辑	35
1.6.2 一阶语言 L_Q	37
1.6.3 L_Q -语义的说明	39
1.6.4 L_Q -模型与 L_Q -模型类有效性	42
1.6.5 一阶演算 Q	43
第二章 模态命题演算	45
2.1 模态命题逻辑	45
2.1.1 关于命题的模态形式与模态函项	45
2.1.2 必然性与可能性	48
2.1.3 直观的原则	50
2.2 模态逻辑的形式系统	52
2.2.1 形式系统	52
2.2.2 证明与推演	54
2.2.3 模态逻辑系统	56
2.2.4 系统之间的关系	58

2.3	形式语言 L_{PM}	59
2.3.1	L_{PM}	59
2.3.2	L_{PM} 的性质和结构归纳法	62
2.3.3	变形规则 S-规则 分离规则与代入规则	63
2.3.4	在语言 L_{PM} 下的古典命题演算 P	65
2.4	系统 K	69
2.4.1	K 与正规系统	69
2.4.2	K 的定理与导出规则	70
2.5	系统 D 和 T	77
2.5.1	系统 D 和 T 的基础	77
2.5.2	D 的定理和导出规则	78
2.5.3	T 的定理	79
2.6	系统 S4, S5 和系统 B	80
2.6.1	S4 和 S5	80
2.6.2	S4 定理和导出规则	80
2.6.3	S5 定理	82
2.6.4	系统 B	84
2.7	模态词, 模态词的等价性	85
2.7.1	L_{PM} 的模态词	85
2.7.2	模态度	86
2.7.3	模态词的等价性	86
2.7.4	叠置模态的归约	87
2.7.5	模态词的等价性与模态系统	89
2.8	模态词的嵌套与归约 模态合取范式	91
2.8.1	模态词的嵌套与归约	91
2.8.2	模态合取范式	93
2.9	K, D, T, S4, S5 和 B 的一致性	95
2.9.1	一致性概念	95
2.9.2	P-变形	95
2.9.3	K 的一致性	96
2.9.4	D, T, S4, S5 和 B 的一致性	97
2.9.5	P 扩张的语法一致性	97
2.10	系统 Tr 及模态系统的坍塌	98
2.10.1	一致性原则与模态系统	98
2.10.2	系统 Tr	99

2.10.3	模态系统的坍塌	99
第三章	可能世界语义学	103
3.1	逻辑语义学	103
3.2	可能世界语义学的基本思想	105
3.3	模态形式的语义分析	110
3.3.1	叠置模态词的语义分析	110
3.3.2	特征公理的语义分析	113
3.4	直观语义与形式语义	120
3.5	框架、模型和有效性	122
3.6	模态公式与一阶公式的对应	127
3.7	S-框架与 j-框架 可靠性	130
3.8	反模型方法及其一些结果	134
第四章	模态语义图和完全性证明	141
4.1	完全性与完全性证明	141
4.1.1	完全性概念	141
4.1.2	完全性证明	143
4.2	语义图的基本思想和方法	145
4.3	S-语义图	152
4.4	语义图的三种结构	156
4.5	语义图的终止	161
4.6	有效性判定	165
4.7	语义图的特征公式	167
4.8	完全性定理	179
4.9	语义图方法下完全性的一些结果	181
4.9.1	可判定性	182
4.9.2	有穷模型性	182
4.9.3	树性质的应用	183
4.9.4	模态逻辑与古典逻辑的关系	185
第五章	模态逻辑的各类系统(I) 严格蕴涵系统及其扩张	187
5.1	严格蕴涵系统 S1—S5	187
5.1.1	形式语言 L'_{PM}	188
5.1.2	系统 S1—S5	188
5.2	S1的定理和语法性质	191
5.2.1	S1-定理	191
5.2.2	S1的一些语法性质	198

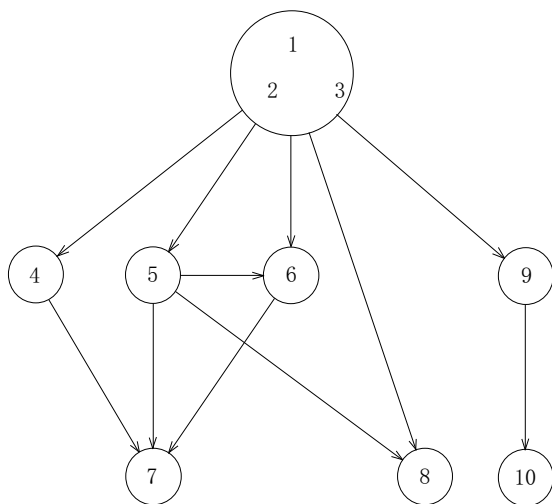
5.3	S2—S5 的定理及语法性质.....	201
5.3.1	S2-定理.....	201
5.3.2	S3-定理与 S3 的语法性质.....	204
5.3.3	S4-定理与 S4 的语法性质.....	207
5.3.4	S5-定理.....	209
5.4	模态系统 P1—P5.....	210
5.4.1	P1—P5 的基础.....	210
5.4.2	P-扩张的语法性质.....	211
5.4.3	P1-定理.....	212
5.4.4	P2-定理与导出规则.....	212
5.4.5	P1—P5 之间的关系.....	215
5.4.6	P1—P5 与 S1—S5 的等价性.....	216
5.5	可推出性与严格蕴涵系统.....	218
5.5.1	可推出与 S1.....	218
5.5.2	逻辑可推性与逻辑必然性 元逻辑与对象逻辑.....	219
5.5.3	T-原则.....	221
5.5.4	系统 S0.5.....	223
5.5.5	关于严格蕴涵悖论的小结.....	224
5.6	S1—S5 的某些语法扩张.....	225
5.6.1	模态词归约下的扩张.....	225
5.6.2	S6, S7 和 S8.....	226
5.6.3	Hallder 定理.....	229
5.6.4	S4 的 K -族扩张.....	232
第六章	模态逻辑的各类系统(II) 广义模态系统.....	235
6.1	广义模态与广义模态逻辑.....	235
6.2	认识论模态命题及其形式和认识论逻辑.....	239
6.3	E-系统.....	243
6.3.1	E1—E5.....	243
6.3.2	E2 的扩张.....	245
6.3.3	E3 的扩张.....	246
6.3.4	E-必然性.....	247
6.4	可证性逻辑、直觉主义逻辑与模态逻辑.....	248
6.4.1	可证性模态与可证性逻辑.....	248
6.4.2	直觉主义逻辑与模态逻辑.....	250
6.4.3	IC 扩张与 S4 扩张 中间逻辑.....	253

6.5	时态解释下的模态逻辑	256
6.5.1	模态逻辑和时态逻辑	256
6.5.2	时态系统	258
6.5.3	模态的时态解释和时态逻辑中的模态逻辑部分	261
第七章	非正规系统的语义解释	264
7.1	非正规系统的直观语义分析	264
7.1.1	必然化规则与非正规世界	264
7.1.2	关于非正规世界的可及关系	266
7.1.3	赋值	267
7.1.4	有效性的取值范围	268
7.1.5	直观的框架和模型	269
7.2	形式语义 框架、模型和有效性	270
7.3	E2, E3, S2 和 S3-框架	273
7.3.1	E2 和 E3-框架	273
7.3.2	E2+ \top -框架	274
7.3.3	E3+ \top 和 E3+ ${}^2\top$ -框架	276
7.4	S6, S7 和 S8-框架	277
7.5	S0.5-框架	279
7.6	统一解释(框架和有效性)	281
7.7	语义图	283
7.7.1	E2-语义图	284
7.7.2	S2-语义图	285
7.7.3	S6—S8-语义图	286
7.7.4	S0.5-语义图	287
第八章	模态代数语义学	288
8.1	代数语义学	288
8.2	模态矩阵与正规模态矩阵	294
8.2.1	模态矩阵	294
8.2.2	正规模态矩阵与模态矩阵的正规化	298
8.3	布尔代数	301
8.3.1	格与布尔代数	301
8.3.2	布尔代数的性质	304
8.3.3	关于布尔代数的一些概念与定理	305
8.4	模态代数	307
8.4.1	模态矩阵与模态代数的分界	307

8.4.2	N-正规代数中的 S-代数	312
8.4.3	其他模态代数的说明	314
8.5	可判定性	315
8.6	正规全可加幂集代数与框架的对应	321
8.7	表示定理	327
8.7.1	布尔代数表示定理 (Stone 定理)	327
8.7.2	正规可加模态代数表示定理	328
8.8	一般框架	332
8.8.1	正规可加幂集子代数与一般框架的对应	332
8.8.2	正规可加幂集子代数有效与一般框架有效的等价性	335
8.9	两点说明	336
8.9.1	一般框架的意义	336
8.9.2	各语义之间的关系	343
第九章	模态谓词逻辑 (I) 逻辑、演算和完全性	344
9.1	模态谓词逻辑概述	344
9.2	形式语言 L_{QM} 及其语义分析	346
9.2.1	语言 L_{QM}	346
9.2.2	L_{QM} 的语义分析	346
9.3	L_{QM} 形式语义 框架、模型与有效性	351
9.3.1	框架与模型	351
9.3.2	有效性	355
9.3.3	j_1 -有效性	356
9.4	模态谓词演算 $QS+Bf$	358
9.5	完全性的 Henkin 证明	362
9.5.1	极大一致集	362
9.5.2	Henkin 证明的基本思想	364
9.5.3	P-完全性的 Henkin 证明	365
9.5.4	Henkin 集和 Q-完全性	366
9.6	典范模型	370
9.6.1	典范模型与模型完全性	370
9.6.2	典范系统	374
9.7	$QS+Bf$ 的模型完全性和框架完全性	376
9.7.1	$QS+Bf$ 语义中的 Henkin 集	376
9.7.2	从属 Henkin 集的存在性	377
9.7.3	$QS+Bf$ -典范模型及模型完全性	381
9.7.4	$QS+Bf$ 的框架完全性	382

第十章	模态谓词逻辑(II)	模态谓词逻辑的三类问题	384
10.1	模态谓词逻辑问题概述		384
10.2	模态词和量词		387
10.2.1	Barcan 公式及其逆公式有效的语义条件		387
10.2.2	模态谓词演算 QS		390
10.2.3	模态谓词演算 QcS		390
10.3	模态词和等词		392
10.4	模态语境中指称的隐晦性		396
10.5	专名与摹状词		399
10.6	历史因果论的专名论		402
10.6.1	传统观点		403
10.6.2	穆勒的专名论		404
10.6.3	专名问题上的摹状词说		404
10.6.4	Kripke 的专名论		406
10.6.5	关于问题的解决		408
10.7	从物模态与从言模态		409
10.8	模态逻辑的哲学问题		411
10.8.1	概述		411
10.8.2	从物模态的哲学问题		413
10.8.3	可能世界是什么		416
10.8.4	关于模态逻辑的总体性质		416
10.8.5	模态逻辑对于哲学的作用		417
附录 I	关于可能世界语义学的说明		419
附录	蕴涵悖论与从真到真的推理和蕴涵		428
习题			432
参考文献			449
主题词索引			454
规则和公式索引			459
系统索引与命题逻辑系统关系图			460
符号索引			461

各章关系



第 一 章

绪 论

本章是关于模态逻辑的概述,使读者对于模态逻辑有一个总体上的初步了解。主要内容有模态逻辑的学科性质和具体形态,学习模态逻辑的意义,以及关于本书内容设置的一些说明。

1.1 模态逻辑

本节主要是通过一些基本概念来介绍模态逻辑的学科性质。请注意这里的“学科性质”,在这一意义下出现的“逻辑”和“模态逻辑”均分别指逻辑学以及模态逻辑学。

一般来说,逻辑学研究的主要是推理形式及其规律。推理通常由若干命题组成,推理形式通过命题形式得以表示。在这个理解下,所谓模态逻辑就是研究模态推理形式及其规律的逻辑,其中模态推理形式又是通过命题的模态形式来表示的。由此可以看出,模态和命题的模态形式是了解模态逻辑的两个基本概念。下面对这两个基本概念作一些说明。

1.1.1 模态

所谓模态是指事物或认识的必然和可能性等这类性质。其中的“等这类性质”是说,模态并不仅仅指必然性与可能性,比如还有不可能性,偶然性,以及必然的必然性,可能的必然性,甚至必然地必然的可能性等等,以至于任意有穷次这类性质的组合。仅仅由此便可以看出,实际上有着无穷多的模态。

模态在我们思维中的反映,表现为一定的认识或观念,就是模态概念。因此,对应于不同的模态也就有不同的模态概念。甚至对于同一模态,由于认识上的不一致,也会形成不同的模态概念。比如,我们对于必然性也许会有不同的理解和看法,这些不同的理解和看法也就形成了关于必然性的不同概念。

语言中用以表示模态或模态概念的语词或符号称为模态词,如汉语中的语词“必然性”,“必然的可能性”,英语中的“necessity”,“possible”等。在模态逻辑中通常用人工语言符号“ \Box ”和“ \Diamond ”来分别表示必然性和可能性,这些符号和由它们而形成的符号串“ $\Box p$ ”,“ $\Diamond p$ ”等也是一些模态词。这些模态词所表示的对象是模态。模态、模态概念和模态词是不同的,分别对应于对象、思维和语言,分属不同层次,应注意它们的区别。

上述模态词中,“必然的可能性”,“ $\Box \Diamond p$ ”,“ $\Diamond \Box p$ ”这样由单个模态词叠置而成的模态词又称为叠置模态词,相应的模态称为叠置模态。在日常生活和一般的理论研究中,通常只涉及必然性和可能性等简单模态,不涉及必然的必然性($\Box \Box p$),必然可能的必然性($\Box \Diamond \Box p$)等这样的叠置模态。模态逻辑则不仅研究简单模态,也研究复杂的叠置模态,它们都是模态逻辑的对象。

模态可以分为一些不同的种类。先看一下客观模态和主观模态。客观模态是指客观存在的必然性或可能性等。例如,

(1) 汽车的速度不可能超过光速。

主观模态则是指认识中的确定性或不确定性等这类性质。例如,

(2) 地球上可能来过外星人。

地球上是否来过外星人是已定事实,(2)中的“可能”并不表示在客观事实上地球有来过外星人的可能,只表示人们对这一事实的了解在主观方面还不够确定。

客观模态又可以分为逻辑的模态和非逻辑的模态。逻辑的模态是指逻辑上的必然性和可能性等,例如,

(3) $x = 5$ 或 $x \neq 5$ 是必然的。

与 x 到底等于什么无关，仅仅通过其中的逻辑关系我们就可以看出，“ $x = 5$ 或 $x \neq 5$ ”必定是真的。(3)中的必然性就是逻辑的必然性。关于逻辑必然性也可以这么看：如果否定一个具有逻辑必然性的命题，其结果必定会引起逻辑上的矛盾。如上例，否定“ $x = 5$ 或 $x \neq 5$ ”得到的是“ $x \neq 5$ 并且 $x = 5$ ”，是个矛盾式。相应地，所谓逻辑的可能性指的是逻辑上的不矛盾性，换言之，一切逻辑上不矛盾的东西都是逻辑上可能的。

非逻辑的模态又有物理的、生物的、乃至哲学的等等之分。例如，(1)中的不可能性就是一种物理的不可能性，而

(4) 人不可能举起 1000 公斤的物体。
中的不可能性则是一种生物学上的不可能性。再如，

(5) 任何事物的运动都必然是有规律的。
中的必然性就是哲学上的必然性。所以这么区分，是因为这些必然性与不可能性有着物理、生物或哲学的理论依据。它们与逻辑必然性与不可能性的最重要区别在于，如果有相反的情况，有超光速的汽车，能举起 1000 公斤物体的超常人，有无运动规律的事物，仅与现有的理论或看法相矛盾，可以通过修改有关的理论来解决，不会使人陷入自相矛盾的境地，即不会引起逻辑矛盾。由此也可以看出，非逻辑的不可能在逻辑上未必是不可能的。相应地，逻辑上必然的在其他任何地方都是必然的。

亚里斯多德曾把模态分为绝对模态和相对模态。绝对模态是事物本身固有的必然性与可能性等。例如，人是动物就具有绝对的必然性，因为动物（性）是人的固有属性之一。绝对必然性由事物本质和自身的原因等决定。相对模态是一事物依赖于他事物而得到的必然性与可能性等。例如，对于推理

所有的鸟都是会飞的，
乌鸦是鸟，
—————
乌鸦都是会飞的。

(其中的横线表示“所以”，下同。)来说，其结论本身并不具有必

然性，但它相对于前提是必然的，即如果前提真的话，结论必然真。这就是一种相对必然性。一般来说，演绎推理的结论之相对于前提所具有的必然性，就是这种相对的必然性。

模态还可以分为从物 (*de re*) 模态和从言 (*de dicto*) 模态，又分别称为事物的模态和命题的模态。前者指的是事物或对象的模态，后者指的是关于命题本身的模态。例如，

(6) 9 必然大于 7。

对此可以理解为，9 这个事物大于 7 这个事物的这一情况是必然的，此时的必然性是事物本身的，该模态是从物模态。而对于

(7) “9 大于 7” 是必然的。

来说，则可以理解为“9 大于 7”这一命题为真具有必然性，此时的必然性是关于命题的，是从言模态。从物模态与从言模态的概念由中世纪提出。在今天对于模态逻辑的理解、建立、特别是对于模态谓词逻辑的理解和建立，以及对模态逻辑的哲学问题仍有较为重要的意义。

最后看一下狭义模态和广义模态。狭义模态就是前面一直在谈论的必然性与可能性等这些性质。通常把事物或认识中的其他一些性质或状态也叫作模态，如知道、相信、应该、允许、禁止等等，这些就是广义模态。狭义模态可以看作关于真的性质的模态，即必然真、可能真等等，因而可简称为真性模态 (*alethic modality*，参见 p. 236 注)。现在通常所说的模态逻辑都是关于狭义模态的模态逻辑。关于广义模态的研究已形成一些具体的广义模态逻辑，如知道逻辑，信念逻辑，以及关于应该、允许和禁止等这些道义模态的道义逻辑等。由于狭义模态与广义模态有许多相似的性质，所以(狭义)模态逻辑与广义模态逻辑有密切的关系(见 6.1)。

以上对模态作了一些初步介绍。本书所涉及的模态主要是关于狭义的、客观的模态之中的逻辑的模态。

1.1.2 模态命题和命题的模态形式

要确切地指出什么是命题将是困难的，对此有一些不同的看法。严格地说，这不是个逻辑问题，而是与逻辑有关的哲学问题。不过，一般地说，命题总可以看成对于事物（对象）情况的反映。在这一反映中，如果还含有模态的内容，那么就是模态命题，反之，是非模态命题。如前面（1.1.1中）的命题（1）—（7）就都是一些模态命题。在语言形式上，这些命题中都含有模态词。从内容上看，模态命题并不仅仅反映车速小于光速或地球上是否来过外星人等这样一些简单事实，而是反映了更深或更多的内容：根据汽车和光的物理性质，车速肯定小于光速，不会相反，反映了这个根据，以及对于地球上是否来过外星人的看法在人们认识中的不确定性，反映了这种不确定性，如此等等。其中说到的根据，依具体模态命题的不同，可以是原因、某种理论、语言里的约定以及逻辑关系等等。由于这些情况，因而带来了模态命题的复杂性。其结果之一，就是在直观上难以确定模态命题的真假。只有以后通过模态逻辑语义学，才能较为合理地解决这个问题（见第三章）。

模态命题和其他命题一样，也有其命题形式。命题形式即抽去某些具体内容后只保留其位置的框架，或者说，是由这些位置和联结或安排它们的部件形成的结构，所以命题形式中一般有两种成分：代表那些具体内容的位置以及联结或安排这些位置的部件。这两种成分的语言表达就是变项和常项。

变项是表示某类特定事物中任意一个的词汇，相对于某一变项，这类事物是确定的，但是，变项所表示的到底是其中的哪一个又是不确定的，这类事物称为变项变程或变域。常项是有固定涵义的词汇，表达确定的概念，在命题形式中表示了对变项的联结和安排方式。

例如我们考虑命题这类事物，通常以 p , q , r 为变项来表示任一命题，又称命题变项，以自然语言中的一些联词和助词等表示常项，对于（1.1.1中的）命题（1），（2），（3）来说，此时它们分别有