第一章
绪 论

本章是关于模态逻辑的概述，使读者对于模态逻辑有一个总体上的初步了解。主要内容有模态逻辑的学科性质和具体形态，学习模态逻辑的意义，以及关于本书内容设置的一些说明.

1.1 模态逻辑

本节主要是通过一些基本概念来介绍模态逻辑的学科性质。请注意这里的‘学科性质”,在这一意义下出现的‘逻辑’和‘模态逻辑”均分别指逻辑学以及模态逻辑学.

一般来说,逻辑学研究的主要是推理形式及其规律。推理通常由若干命题组成，推理形式通过命题形式得以表示. 在这个理解下,所谓模态逻辑就是研究模态推理形式及其规律的逻辑,其中模态推理形式又是通过命题的模态形式来表示的. 由此可以看出,模态和命题的模态形式是了解模态逻辑的两个基本概念. 下面对这两个基本概念作一些说明.

1.1.1 模态

所谓模态是指事物或认识的必然和可能性等这类性质。其中的“等这类性质’是说,模态并不仅仅指必然性与可能性,比如还有不可能性,偶然性,以及必然的必然性,可能的必然性,甚至必然地必然的可能性等等，以至于任意有穷次这类性质的组合。仅仅由此便可以看出，实际上有着无穷多的模态.

模态在我们思维中的反映，表现为一定的认识或观念，就是模态概念。因此，对应于不同的模态也就有不同的模态概念。甚至对于同一模态，由于认识上的不一致，也会形成不同的模态概念。比如，我们对于必然性也许会有不同的理解和看法，这些不同的理解和看法也就形成了关于必然性的不同概念。

语言中用以表示模态或模态概念的语词或符号称为模态词，如汉语中的语词“必然性”，“必然的可能性”，英语中的“necessity”，“possible”等。在模态逻辑中通常用人工语言符号“□”和“◇”来分别表示必然性和可能性，这些符号和由它们而形成的符号串“□◇”，“□◇□”等也是一些模态词。这些模态词所表示的对象是模态。模态、模态概念和模态词是不同的，分别对应于对象、思维和语言，分属不同层次，应注意它们的区别。

上述模态词中“必然的可能性”，“□◇”，“□◇□”这样由单个模态词叠置而成的模态词又称为叠置模态词，相应的模态称为叠置模态。在日常生活和一般的理论研究中，通常只涉及必然性和可能性等简单模态，不涉及必然的必然性（□□），必然可能的必然性（□◇□）等这样的叠置模态。模态逻辑则不仅研究简单模态，也研究复杂的叠置模态，它们都是模态逻辑的对象。

模态可以分为一些不同的种类。先看一下客观模态和主观模态客观模态是指客观存在的必然性或可能性等。例如，

（1） 汽车的速度不可能超过光速。

主观模态则是指认识中的确定性或不确定性等这类性质。例如，

（2） 地球上可能来过外星人。

地球上是否来过外星人是已定事实，（2）中的“可能”并不表示在客观事实上地球有来过外星人的可能，只表示人们对这一事实的了解在主观方面还不够确定。

客观模态又可以分为逻辑的模态和非逻辑的模态。逻辑的模态是指逻辑上的必然性和可能性等，例如，

（3） $x=5$ 或 $x\neq 5$ 是必然的。

与 x 到底等于什么无关，仅仅通过其中的逻辑关系我们就可以看出"$x=5$ 或 $x\neq 5$"必定是真的（3）中的必然性就是逻辑的必然性。关于逻辑必然性也可以这么看：如果否定一个具有逻辑必然性的命题，其结果必定会引起逻辑上的矛盾。如上例，否定"$x=5$ 或 $x\neq 5$"，得到的是"$x\neq 5$ 并且 $x=5$"，是个矛盾式。相应地，所谓逻辑的可能性指的是逻辑上的不矛盾性，换言之，一切逻辑上不矛盾的东西都是逻辑上可能的。

非逻辑的模态又有物理的、生物的、乃至哲学的等等之分。例如，（1）中的不可能性就是一种物理的不可能性，而

（4） 人不可能举起 1000 公斤的物体。

中的不可能性则是一种生物学上的不可能性。再如，

（5） 任何事物的运动都必然是有规律的。

中的必然性就是哲学上的必然性。所以这么区分，是因为这些必然性与不可能性有着物理、生物或哲学的理论依据。它们与逻辑必然性与不可能性的最重要区别在于，如果有相反的情况，有超光速的汽车，能举起 1000 公斤物体的超常人，有无运动规律的事物，仅与现有的理论或看法相矛盾，可以通过修改有关的理论来解决，不会使人陷入自相矛盾的境地，即不会引起逻辑矛盾。由此也可以看出，非逻辑的不可能在逻辑上未必是不可能的。相应地，逻辑上必然的在其他任何地方都是必然的。

亚里斯多德曾把模态分为绝对模态和相对模态。绝对模态是事物本身固有的必然性与可能性等。例如，人是动物就具有绝对的必然性，因为动物(性)是人的固有属性之一。绝对必然性由事物本质和自身的原因等决定。相对模态是一事物依赖于他事物而得到的必然性与可能性等。例如，对于推理

所有的鸟都是会飞的，
乌鸦是鸟，
———————————
乌鸦都是会飞的。

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

（其中的横线表示“所以”，下同。）来说，其结论本身并不具有必然性，但它相对于前提是必然的，即如果前提真的话，结论必然真。这就是一种相对必然性。一般来说，演绎推理的结论之相对于前提所具有的必然性，就是这种相对的必然性。

模态还可以分为从物(*de re*）模态和从言(*de dicto*)模 态，又分别称为事物的模态和命题的模态。前者指的是事物或对象的模态，后者指的是关于命题本身的模态。例如，

（6） 9 必然大于 7.

对此可以理解为，9 这个事物大于 7 这个事物的这一情况是必然的，此时的必然性是事物本身的，该模态是从物模态。而对于

（7） “9 大于 7”是必然的。

来说，则可以理解为“9 大于 7”这一命题为真具有必然性，此时的必然性是关于命题的，是从言模态。从物模态与从言模态的概念由中世纪提出。在今天对于模态逻辑的理解、建立、特别是对于模态谓词逻辑的理解和建立，以及对模态逻辑的哲学问题仍有较为重要的意义。

最后看一下狭义模态和广义模态。狭义模态就是前面一直在谈论的必然性与可能性等这些性质。通常把事物或认识中的其他一些性质或状态也叫作模态，如知道、相信、应该、允许、禁止等等，这些就是广义模态。狭义模态可以看作关于真的性质的模态，即必然真、可能真等等，因而可简称为真性模态(*alethic* modality，参 见 p.236 注①)。现在通常所说的模态逻辑都是关于狭义模态的模态逻辑。关于广义模态的研究已形成一些具体的广义模态逻辑，如知道逻辑，信念逻辑，以及关于应该、允许和禁止等这些道义模态的道义逻辑等。由于狭义模态与广义模态有许多相似的性质，所以（狭义）模态逻辑与广义模态逻辑有密切的关系（见 6.1 ）。

以上对模态作了一些初步介绍。本书所涉及的模态主要是关于狭义的、客观的模态之中的逻辑的模态。

1.1.2 模态命题和命题的模态形式

要确切地指出什么是命题将是困难的，对此有一些不同的看法。严格地说，这不是个逻辑问题，而是与逻辑有关的哲学问题不过，一般地说，命题总可以看成对于事物（对象）情况的反映。在这一反映中，如果还含有模态的内容，那么就是模态命题，反之，是非模态命题。如前面（1.1.1 中）的命题（1）—（7）就都是一些模态命题。在语言形式上，这些命题中都含有模态词. 从内容上看，模态命题并不仅仅反映车速小于光速或地球上是否来过外星人等这样一些简单事实，而是反映了更深或更多的内容 根据汽车和光的物理性质，车速肯定小于光速，不会相反，反映了这个根据，以及对于地球上是否来过外星人的看法在人们认识中的不确定性，反映了这种不确定性，如此等等. 其中说到的根据，依具体模态命题的不同，可以是原因、某种理论、语言里的约定以及逻辑关系等等。由于这些情况，因而带来了模态命题的复杂性。其结果之一，就是在直观上难以确定模态命题的真假. 只有以后通过模态逻辑语义学，才能较为合理地解决这个问题（见第三章）.

模态命题和其他命题一样，也有其命题形式. 命题形式即抽去某些具体内容后只保留其位置的框架，或者说，是由这些位置和联结或安排它们的部件形成的结构，所以命题形式中一般有两种成分：代表那些具体内容的位置以及联结或安排这些位置的部件。这两种成分的语言表达就是变项和常项。

变项是表示某类特定事物中任意一个的词项，相对于某一变项，这类事物是确定的，但是，变项所表示的到底是其中的哪一个又是不确定的，这类事物称为变项变程或变域。常项是有固定涵义的词项，表达确定的概念，在命题形式中表示了对变项的联结和安排方式.

例如我们考虑命题这类事物，通常以 p, q, r 为变项来表示任一命题，又称命题变项，以自然语言中的一些联词和助词等表示常

项，对于(1.1.1 中的）命题(1），(2），(3）来说，此时它们分别有以下命题形式：

（1°） 不可能 p

（2°） 可能 p

（3°）必然（p 或者非 p）

再如，设有以下模态命题，

（8） 如果该物体受到磨擦，那么它必然发热。

（9） 如果今天可能下雨，那么今天下雨或刮风是可能的。

若还按上述条件，则有以下命题形式：

（8°） 如果 p，那么必然 q。

（9°） 如果可能 p，那么可能(p 或者 q）.

为了方便和严格，还可以完全用符号来给出这些形式，称为命题形式的符号化。以下用符号□，◇，¬，∨，→分别表示常项必然，可能，并非，或者，如果……那么……，于是，上述命题形式又可以写成

（1'） $\neg\Diamond p$

（2'） $\Diamond p$

（3'） $\Box(p\vee\neg p)$

（8'） $p\rightarrow\Box q$

（9'） $\Diamond p\rightarrow\Diamond(p\vee q)$

严格性是命题形式符号化的更为重要的原因。其中用符号表示常项，并不是简单的技巧，而是它们较自然语言的那些词项有更为严格的意思，在每种逻辑下，由相应的解释来确定。一般来说，这些符号所表达的意思只是自然语言相应语词所表达的部分意思，在一定的意义下，前者可视作后者的抽象。

上述常项在命题形式中有重要作用。从表达形式上看，由这些常项把各具体命题联结组织起来，形成新命题，因而可称为（命题)联结词。从抽象的关系上看，即用数学的眼光看，一些命题经由常项的作用形成另一命题，类似于数学中一些数经过一些运算

（如加法、减法等）得到另一些数。在数学里，表示这些运算的符号称作算符或算子。表示由一个数得到某个数运算的算子称为一元算子，表示由两个数得到某个数运算的算子称为二元算子，如此等等。现代逻辑在此也采用了数学的方法与观点，因而又称这些联结命题的常项为命题算子，也简称算子。相应地，也有一元算子，如$\neg$，□，◇等，和二元算子，如$\wedge$，$\vee$，$\rightarrow$等。类似地，可有三元算子，四元算子等等。一般地，称 n 元算子。在各算子中，表示模态或含有模态内容的那些算子又称作模态算子，如□，◇等。

逻辑学里所说的命题形式指的是命题的逻辑形式。如上所示，这样的形式通常由变项与常项组成（表示），组成逻辑形式的变项与常项又称为逻辑变项与逻辑常项。在一些情况下，也可以先确定逻辑变项与逻辑常项，由此来得到命题的逻辑形式。

命题的逻辑形式不同于命题的语言形式或其他形式。语言形式由语言学意义下的规律等决定，逻辑形式则由相应的逻辑决定。例如，（1°）和（1'）的语言形式不同，但作为逻辑形式则是相同的。既然命题形式是这样一种形式，因此同一命题对于不同的逻辑来说，也会有不同的命题形式。例如，

（10）所有乌鸦都是会飞的。

如果我们考虑以命题为最小单位的逻辑，即命题逻辑，而不再考虑命题的内部结构，那么此时（10）的命题形式是

（11）　p

如果我们还考虑命题的内部结构，并且是从主项、谓项等形成的主谓结构来考虑，即在亚里斯多德逻辑下，相应的命题形式为

（12）　所有 S 都是 P。

或者

（13）　SAP

对于一阶逻辑来说，它又是通过个体词、谓词和量词来给出命题形式的。此时（10）的命题形式是

（14）　$\forall x(Sx \rightarrow Px)$

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

其中 $\forall$ 是全称量词，读作“任一……”。

以上所说的是一般的命题及其命题形式之于逻辑的关系，对于模态命题来说，也是如此。我们现在考虑模态命题的命题形式，当然是指其逻辑形式。特别地，对不同的逻辑来说，同一模态命题也会有不同的形式。

例如，同是模态命题（3），（8），（9），在模态逻辑里，考虑到其中的模态，并且以命题为最小单位的话，它们的命题形式分别是（3′），（8′），（9′），而对于古典命题逻辑来说，由于它讨论或处理的命题形式都是非模态的，即使对于模态命题，也只能考虑它的非模态的命题形式。所以此时这些命题的命题形式分别是

（3″）　p

（8″）　$p \rightarrow q$

（9″）　$p \rightarrow q$

（3′），（8′），（9′）和（3″），（8″），（9″）所表示的命题形式都是相应模态命题的命题形式。但显然，对于模态逻辑来说有意义的是前一种。这种形式称为命题的模态形式。一般地，对于任意命题来说，如果我们考虑到模态，并在有这部分内容时给出相应的形式表达，那么，所得到的命题形式就是命题的模态形式。在这一规定和做法下，由模态命题得到的命题形式当然都是模态形式，如（3′），（8′），（9′），并且由非模态命题得到的命题形式也是模态形式，如（11）—（14），这可以看作一种特殊的模态形式，空模态的模态形式。但请注意（3″），（8″），（9″）一定不是相应命题的模态形式。这一规定实际上是把在模态逻辑处理下的命题形式都看成模态形式。推而广之，模态逻辑考虑下的命题也都是模态命题。这只是为统一处理问题的方便而采取的一种手段。因为模态逻辑不仅研究由模态命题形成的推理，还要研究由模态命题与非模态命题形成的推理，甚至还会涉及到非模态命题之间的推理，所以要统一考虑相应的命题形式。模态命题的命题形式和命题的模态形式是两个不同的概念，前者的所指不确定，后者则是相对严格和确定的。

逻辑学研究命题形式的目的在于得到正确的推理形式，这样的形式又称为永真式或有效式①。从以上介绍可以看出，由于古典命题逻辑只能考虑命题的非模态形式而不能分析其模态形式，形象地说，不能跨过模态符号□和◇继续考察命题的形式结构，因此像（8）和（9）这两个完全不同的命题在古典命题逻辑的处理下形式都是相同的。这表明古典命题逻辑不能解决模态形式的有效性问题。例如，命题(9）的模态形式是(9′),在模态逻辑里是个有效式，而在古典逻辑里，只能考虑它的非模态形式，即（9″）,显然不是个有效式。一般地说，对任一命题的模态形式，它是否有效，以及为什么有效或非有效，古典逻辑无法回答，其他非模态逻辑也是如此，而这些就是模态逻辑所要解决的问题。

在明确了模态和模态形式这两个概念后，也可以说，模态逻辑学是关于命题的模态形式及其规律的逻辑学，目的在于得到有效的模态形式。

命题的模态形式即命题在模态逻辑下的命题形式。命题形式可以分为两种，以命题为基本单位的命题逻辑的命题形式（如(11))和以命题中的一些非命题成分，如以量词、谓词和个体词所表达的成分为基本单位的命题形式（如(14)). 命题的模态形式也是如此，也有这样两种模态形式：命题逻辑下的模态形式和谓词逻辑下的模态形式。本节中的模态形式都是命题逻辑下的模态形式. 谓词逻辑下的模态形式见第九章。相应于这两种模态形式，模态逻辑又分为模态命题逻辑（见 2.1）和模态谓词逻辑（见 9.1）.

1.2 传统模态逻辑与现代模态逻辑

模态逻辑虽然有其基本的学科性质，但作为实际存在着的学科在不同的历史时期里又有特定的内容、方法等，这形成了它的具体

①有效性是个严格的或可以严格化的概念（参见 3.6）. 现在我们可以先在（推理的）正确性这一直观意义下来理解和使用它.

形态。模态逻辑由此大体可分为传统模态逻辑和现代模态逻辑。

1.2.1 传统模态逻辑

传统模态逻辑的主要内容有模态三段论,模态判断和关于模态的某些分析等。模态三段论是指其中至少有一个前提是模态判断的三段论。例如,

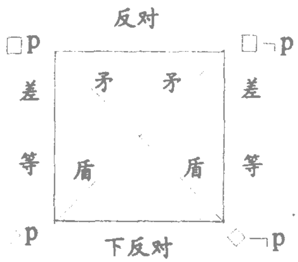
所有的 b 必然都是 c,

所有的 a 都是 b,

所有的 a 必然都是 c。

对此传统模态逻辑提出了一些正确的形式。

关于模态判断和模态的关系方面，亚里斯多德提出了下面的模态对当方阵：



由此方阵可以得出：

$$\Box p \leftrightarrow \neg \Diamond \neg p$$

$$\Diamond p \leftrightarrow \neg \Box \neg p$$

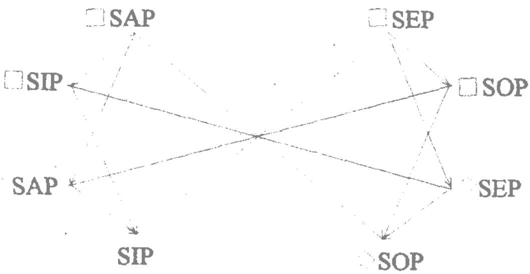
$$\Box \neg p \leftrightarrow \neg \Diamond p$$

$$\Diamond \neg p \leftrightarrow \neg \Box p$$

等公式，它们在现代模态逻辑里仍然成立（ $\leftrightarrow$ 表示“当且仅当”）。其中前两个公式表明 □和 ◇可以互相定义。所以在 □和 ◇中只要任取一个，另一个便可通过定义得到。

亚里斯多德还讨论了偶然(偶然既非必然又非不可能),把必

然、可能、偶然加到SAP、SEP、SIP、SOP即全称肯定、全称否定、特称肯定和特称否定四种判断上，得到 $3 \times 4 = 12$ 种模态判断，并给出下面 8 种模态判断的关系：



其中直线表示矛盾关系，箭头表示差等关系，□SAP，◇SOP 分别为必然所有 S 都是 P，可能有些 S 不是 P，其他类似。

在这方面，中世纪还提出了一些原则，如

1. 必然命题推不出偶然命题。
2. 可能命题推不出不可能命题。
3. 不可能可以推出任何东西。
4. 必然可以由任何东西推出。

若再增加用 ⥽ 表示推出，$\bigcirc$ 表示偶然，则以上原则可分别用公式表示为

1'. $\neg(\Box p ⥽ \bigcirc p)$

2'. $\neg(\Diamond p ⥽ \neg\Diamond p)$

3'. $\neg\Diamond p \rightarrow (p ⥽ q)$

4'. $\Box p \rightarrow (q ⥽ p)$

对于模态的理解与分析在传统模态逻辑中占有一定的比重，不过这方面的内容与哲学有相当密切的联系，以至于有时看起来更像是哲学。其中对模态逻辑有影响的有中世纪的从物模态与从言模态之分，以及一些广义模态的提出等，特别是古希腊的第奥多鲁斯（Diodorus Cronus）对模态提出的时态解释：

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

可能就是（现在）真实的或将来是真实的。

必然就是（现在）真实的并且将来也不会虚假的.

这个解释将模态与时态联系起来，避免了晦涩的哲学用语，使难以把握的模态得到一种比较直观说明，对现代模态逻辑研究有重要的启发。另外，它也显示了模态逻辑和时态逻辑有着密切的联系，基于这类解释，使得现在模态逻辑和时态逻辑两方面的研究都能相互受益。

传统模态逻辑尽管有一些成就，但从总体上看，它与传统逻辑一样，都以具体的、个别的思维类型为对象，考察相应的正确思维形式，因此它又是分散地、个别地研究模态形式，而不是系统的，再加上逻辑理论和技术的不足，使得传统模态逻辑的研究在深度和广度上都受到很大限制。真正有着丰富内容的是现代模态逻辑。

1.2.2 现代模态逻辑的产生

现代模态逻辑是指在数理逻辑的推动下产生和发展起来的模态逻辑。这句话有两层涵义：一是数理逻辑提出了新的问题，即所谓实质蕴涵悖论问题。关于这一问题的探讨是现代模态逻辑产生的最初起因. 二是数理逻辑提供了现代逻辑的思想与方法,首先是建立逻辑演算的思想与方法。逻辑演算即关于逻辑的形式化的公理系统，又称为形式系统或系统（见2.2）.

蕴涵通常是指日常语言中由“如果……则……”这类联词所表达的关系。实质蕴涵即古典命题逻辑中所说的蕴涵,是对上述这类联词所表达的蕴涵的一种逻辑抽象。关于蕴涵的研究古已有之,实质蕴涵也并非新概念，然而以实质蕴涵为主要概念构造逻辑演算,则是现代逻辑的新发展。1910年罗素和怀特海的《数学原理》出版,其中建立了古典命题演算。该演算中有一些关于实质蕴涵的定理，它们有悖于关于蕴涵的日常理解。例如,

$$\neg p \rightarrow (p \rightarrow q)$$

$$p \rightarrow (q \rightarrow p)$$

分别是说，“假命题蕴涵任何命题，”，以及“真命题为任何命题所蕴涵”。这就是古典命题逻辑中所谓的实质蕴涵悖论。类似的定理还有很多，如

$$(p \to q) \lor (q \to p)$$
$$(p \land q) \to (p \leftrightarrow q)$$
$$(\neg p \land \neg q) \to (p \leftrightarrow q)$$

等等,意思分别为“任意两命题总有一个蕴涵另一个”;“任意两真命题相互蕴涵”，以及“任意两假命题相互蕴涵”。

实质蕴涵的涵义可以通过真值表来刻画：

p	q	$p \to q$
真	真	真
真	假	假
假	真	真
假	假	真

这表明实质蕴涵只反映命题真值间的一种联系(命题的真和假称为命题的真值),而不考虑命题其他方面(如内容等)的联系。在这种联系下,上述定理不过是从不同角度呈现了实质蕴涵的性质,并不是什么悖论。但是在日常情况下,蕴涵一般是通过命题之间的某些意义上的联系得到的。p 蕴涵 q 实际上被看成“p 可推出 q”，或“p 在内容上包含了 q”，以及“p 和 q 有某种相关性,使得有 p 一定有 q”，如此等等（注意可推出与相关性意义的蕴涵也是有所不同的）。人们所以觉得那些实质蕴涵定理不合理,无非是自觉或不自觉地在这种自然意义下来看待蕴涵。因此,人们通常会说，

（1） 如果所有的鸟都会飞，那么鸵鸟会飞。（可推出关系意义上的蕴涵）

（2） 如果物体受到摩擦，那么它会发热。（因果关系即某种相关性意义上的蕴涵）

而不会去说

（3） 如果 $2+2=4$，那么雪是白的.

（4） 如果 $2+2=5$，那么雪是白的.

在实质蕴涵情况下，（3）和（4）不仅是蕴涵命题，而且是真命题。但是如果考虑到命题间的意义关系，通常不会把不相关的东西扯到一起，也就不会认为它们是有意义的蕴涵命题，更不用说是真命题了。正是在这里，实质蕴涵与自然意义下的蕴涵显示出很大差距。

罗素和怀特海所以用实质蕴涵来建立命题演算，首先与他们的目的有关。他们当时主要是为了解决数学基础问题，关心的是如何从逻辑出发建立整个数学大厦。在这一目标下，实质蕴涵的简单性质具有重要意义。因为它只从命题的真值出发考虑问题，从而避免了涉及命题的意义等许多复杂问题，把问题简化到最低限度。其次，利用实质蕴涵足以表述或得到全部数学真理，于数学无害。由于这两方面的情况，现代逻辑首先建立的是这样一种命题演算。但是对于另一些逻辑学家来说，由于考虑问题的出发点不同，他们对这一演算或系统则表示不满。他们更为关心日常思维中的逻辑问题，希望建立反映日常蕴涵关系、特别是逻辑地可推出关系的系统，相信这样的系统不会产生蕴涵悖论，并且更实用。为此美国哲学家、逻辑学家 C. I. Lewis（1883－1964）提出了不同于实质蕴涵的严格蕴涵，并以罗素的古典命题演算为蓝本构造了一系列严格蕴涵系统。

Lewis 严格蕴涵的设立以表达逻辑可推出关系为目的。它的提出始于对实质蕴涵的分析。在罗素的古典命题演算中，实质蕴涵由定义

$$(p \to q) =_{df} \neg p \vee q$$

给出（$=_{df}$ 表示“定义为”）。这表明对实质蕴涵的分析可以归结为对析取的分析。由此 Lewis 通过以下两个例子来说明问题：

（i）凯撒已死，或者月亮是用鲜奶酪制被的.

（ii）玛丽不爱我，或者有人爱我.

它们都是真命题，因为它们之中都至少有一个支命题是真的。但是

它们有重要的差别：

1. （i）的两个支命题没有内容上的联系，真假取决于各自相应的事实。（ii）的两个支命题有内容上的联系，使其中至少有一命题为真，因此（ii）的真假与事实无关。

2. 否定（i）不会引起矛盾，而否定（ii）则势必引起矛盾。否定（i）得到的是

凯撒没死，并且月亮不是由鲜奶酪制做的。

这固然是个假命题，但是两支命题并不矛盾，它们为假是我们通过对事实的了解得到的。否定（ii）得到的是

：玛丽爱我，并且没有人爱我。

两个支命题相互矛盾，仅仅从该命题本身就可以知道它一定是假的。

3. 既然（ii）中至少有一命题为真，或两命题不能同时为假，所以由一命题的假可以逻辑地推出另一命题的真，而（i）这类命题做不到这一点。

根据这一情况，Lewis 把析取分为两种：外延析取和内涵析取，分别用 $\vee$ 和 $\boxed{\vee}$ 表示。前者只考虑命题的真值而不涉及命题间由内容等因素形成的联系，后者则还要涉及到这样的联系。在这种处理下，命题（1）和（2）的形式分别为

$$p \vee q$$
$$p \boxed{\vee} q$$

二者不同。在古典命题逻辑里，对这两种析取不加区别，统一用外延析取进行处理，都表示为 $p \vee q$。实质蕴涵就是把蕴涵都归结为外延析取定义的蕴涵，可以说是一种最高程度的抽象，与人们日常思维习惯有些不符，所以有一些“怪”的性质。如果依赖内涵析取，考虑到支命题间某些意义上的联系，所得到的蕴涵也就会自然一些。循此思路，Lewis 给出了下面严格蕴涵（$\prec$）的定义：

[定义 1] $p \prec q =_{df} \neg p \boxed{\vee} q$

如果仅此而已，那么蕴涵问题与模态逻辑还没有什么关系。下一步对现代模态逻辑的产生是关键性的：Lewis 用模态来理解内涵析取，相应地用模态形式来取代内涵析取式，由 $\neg p \vee q$ 真可得

（a） $\neg p$ 和 q 必然至少有一者为真；

也可以等价地说

（b） $\neg p$ 和 q 同假是不可能的。

这里已用到“必然”和“不可能的”这些语词。用前面给出的符号，（a）和（b）可分别表示为

（a'） $\Box(\neg p \vee q)$

（b'） $\neg\Diamond(\neg\neg p \wedge \neg q)$

在古典命题演算条件下，$\neg p \vee q$ 等价于 $p \to q$，$\neg\neg p \wedge \neg q$ 等价于 $p \wedge \neg q$，于是由（a'）和（b'）分别又可得到两个形式有所不同的严格蕴涵定义：

[定义2] $p \prec q =_{df} \Box(p \to q)$

[定义3] $p \prec q =_{df} \neg\Diamond(p \wedge \neg q)$

通常情况下(接受古典命题演算和亚氏模态对当方阵),定义 2、3 是等价的，可以任取其中之一。换句话，严格蕴涵可以在古典命题演算的基础上通过任意增加一个模态符号 $\Box$ 或 $\Diamond$ 得到。

定义 3 是 Lewis 在后来构造系统时使用的严格蕴涵定义。这表明对这些系统来说,严格蕴涵是被模态算子引入的,它本身因而也是个模态算子。

定义 2 显示了 $\to$ 和 $\prec$ 两种蕴涵的区别。所谓严格蕴涵,就是具有必然性的实质蕴涵。前面提到 Lewis 设立严格蕴涵以表示逻辑可推出关系为目的，只有当 $p \to q$ 具有逻辑必然性时，才可以从 p 逻辑地推出 q。因此定义中的必然性应是逻辑的必然性。相应地，其中的不可能性也应是逻辑的不可能性。但是这一点从上述定义看不出来。Lewis 实现这一目的的努力后来体现在建立系统时公理的设置上。

什么样的实质蕴涵是具有逻辑必然性的实质蕴涵?若 2 + 2 =

4，则雪是白的”这样的蕴涵显然不具有，甚至像“如果下雨则地湿”这样有意义联系的蕴涵也不具有。对命题逻辑来说，Lewis认为重言式的实质蕴涵是具有逻辑必然性的蕴涵，即若 $\alpha\rightarrow\beta$ 是重言式，那么 $\alpha\rightarrow\beta$ 具有逻辑必然性，可以记为 $\Box(\alpha\rightarrow\beta)$，或 把 $\alpha\rightarrow\beta$ 中的 $\rightarrow$ 换成 $⥽$ 得到 $\alpha ⥽ \beta$。根据这一看法 Lewis 选出罗素演算中的一些重言式，将其中的 $\rightarrow$ 换成 $⥽$ 后作为公理，如

$$p\wedge q ⥽ q\wedge p$$

$$p\wedge q ⥽ p$$

$$p ⥽ \neg\neg p$$

等等，构成了公理系统 S1。出于解决其中又产生的一些问题，继而又构造了 S2，S3，S4 和 S5。由于它们的公理都以严格蕴涵式给出，也称为严格蕴涵系统（见 5.1）。

严格蕴涵系统的提出标志着建立了一种新的逻辑。这是一种什么逻辑？由于这种严格蕴涵本身是个模态算子，或者因为它是由定义引入的,可以由 $\Box$ 或 $\Diamond$ 消去,并且这些系统都含有所有重言式，所以，它们是在古典命题演算的基础上通过增加一个模态算子、从而增加了关于模态形式的逻辑规律之后得到的形式系统。这样的系统又称为古典命题演算加一个模态算子的扩张，或模态扩张。换言之，Lewis 通过严格蕴涵建立的逻辑实际上是模态逻辑。S1－S5 是最初的五个模态逻辑的形式系统(见 Lewis and Langford[1932])。

还应说明，由于严格蕴涵最初又是由内涵析取定义的，这使得如此得到的模态逻辑从一开始也被看作是一种内涵逻辑。

为了解决实质蕴涵悖论问题，在现代逻辑的基础上引入了模态，由此出现了现代模态逻辑。S1－S5 的给出，标志着现代模态逻辑的建立①。

①早于 Lewis 这一工作的还有 H.McColl（1837—1909）。他在自己的逻辑研究中也提出过严格蕴涵和涉及到模态,通常也把他的工作纳入现代模态逻辑。但 McColl 没给出模态系统,所以一般称他为现代模态逻辑的先驱，Lewis是创始人。