

工商管理硕士联考考前辅导

2001 年 MBA 入学联考数学应试辅导

谢胜智 编著

西南财经大学出版社

前 言

本书是作者在辅导七届(MBA 四届、EMBA 三届)考生讲稿的基础上加以整理、补充而成的。

为便于考生阅读,本书在章、节、段、符号等方面尽可能地与全国工商管理硕士入学考试研究中心编的 MBA 联考考前辅导教材一致。

本书分基础篇和应试篇,其中基础篇约占 80% 的篇幅。

基础篇又分两部分:基础知识部分和题型部分,大致各占一半篇幅。

在基础知识部分中,把联考教材中的知识点尽可能全部地罗列、凸现、比较、归类和系统化,对理解较为困难或易出错的地方详细加以说明。

在题型部分中,作者总结了一百个左右的题型,每个题型包括方法、步骤(全部用黑体字印出)和例子。其用意在于:作者在多年的实际教学中了解相当一部分学生,听教师讲能听懂,看书上例子能看懂,但类似的题自己却不会做;甚至过去已做过的类似题型,后来做也不太顺利。作者总结的这些题型大致可起到举一反三的作用。因此,希考生先理解、掌握题型,然后在做作业时,先判定该题所属题型,再使用该题型中的方法和步骤解该题。一种题型这样练习,以后碰到该题型的题,做起来也就不难了。

因此,建议考生今后做作业时,不要仅为做题而做题,而要主要为掌握题型而做题。

本书的例子大多为凸现本书总结的题型、方法和步骤而列,至于较一般的例子,联辅教材已较多,这里不再重复,以免浪费考生的时间。

同样,由于联辅教材已有较多习题,因此,一般的习题本书不再重复。补充的习题,大都稍难一点。为方便考生,全部习题都有较详细的解答。

由于基础篇中的内容大多是局部性的,因此在应试篇中作者又总结了一些较普遍的问题、题型等。

本书的出版,希望能对参加 MBA 全国联考的考生应试有所帮助。

由于作者水平有限、不当之处敬请读者批评斧正。

谢胜智

2000 年 6 月于西南财经大学

目 录

第一篇 基础篇

第一章 初等数学	(1)
第一节 代数.....	(1)
第二节 平面解析几何初步	(13)
第三节 三角	(17)
第二章 函数与极限	(21)
第一节 函数	(21)
第二节 极限	(33)
第三节 连续函数	(44)
第三章 导数与微分	(50)
第一节 导数的概念	(50)
第二节 导数的运算	(54)
第三节 二阶导数	(56)
第四节 微分	(59)
第五节 罗比达法则	(60)
第六节 函数单调性及其判定	(64)
第七节 函数图形的凹性与拐点	(64)
第八节 函数的极值和最大值、最小值.....	(64)
第四章 不定积分与定积分	(67)
第一节 原函数和不定积分的概念	(67)
第二节 基本积分公式和不定积分性质	(68)
第三节 不定积分的换元积分法	(69)
第四节 分部积分法	(69)
第五节 定积分的基本概念和性质	(76)
第六节 变限积分与牛顿——莱布尼兹公式	(79)
第七节 定积分的换元法与分部积分法	(79)
第八节 用定积分求平面图形的面积	(84)
第五章 多元函数微分学	(86)
第一节 多元函数的偏导数和全微分	(86)
第二节 多元函数的极值	(93)
第六章 线性代数	(96)
第一节 行列式	(96)

第二节	矩阵.....	(102)
第三节	线性方程组.....	(115)
第七章	概率论	(131)
第一节	随机事件.....	(131)
第二节	事件的概率.....	(134)
第三节	概率的加法公式.....	(136)
第四节	条件概率与乘法公式.....	(137)
第五节	全概率公式与贝叶斯公式.....	(138)
第六节	事件的独立性.....	(139)

第二篇 应试篇

第八章	一些普遍性问题	(141)
第一节	容易忽视的问题.....	(141)
第二节	容易搞混的问题.....	(141)
第三节	其它普遍性的问题.....	(142)
第四节	部份基本概念之间关系总结.....	(145)
第五节	常用中等数学公式.....	(147)
第九章	普遍性的题型和方法	(147)
第一节	普遍性的题型.....	(147)
第二节	具有普遍意义的方法、技巧和思路	(151)
模拟试题	(160)
习题参考解答	(163)

第一篇 基础篇

第一章 初等数学

第一节 代数

一 平均值

1 n 个数的算术平均值 $\bar{x} : \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}$.

注意:对 x_i 无任何要求.

2 n 个数的几何平均值: $\sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_n}$.

注意:一般要求 $x_i > 0$.

3 x_1 和 x_2 的比例中项: $\sqrt{x_1 \cdot x_2}$

注意:有 $\frac{x_1}{\sqrt{x_1 \cdot x_2}} = \frac{\sqrt{x_1 \cdot x_2}}{x_2}$.

二 比与比例

(一) 定义

1 比的定义

两个数 a 与 b 的比: a 除以 b .

比的前项: a ,
比的后项: b .

比值: 相除所得商.

比值往往用百分数表示.

2 比的性质: 前、后项同乘(除)同一个不为零的数, 其比值不变:

$$\frac{a}{b} = \frac{ma}{mb} (m \neq 0), \quad \frac{a}{b} = \frac{a/m}{b/m} (m \neq 0).$$

3 比例

比例:两个比相等,即

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \text{ 或 } a:b = c:d.$$

比例外项: a, d .

比例内项: b, c .

a, b, c 的第四比例项: d .

b 为 a, c 的比例中项:如有 $a:b = b:c$.

(二) 正比例和反比例

1 正比例

y 与 x 成正比例,若 $y = kx$ ($k \neq 0$, 且 k 为常数).

此时称 k 为比例常数.

注意:如 y 与 x 成正比,且比例常数 $k > 0$, 则 x 增加, y 也增加,但 $k < 0$ 时无此结论.

2 反比例

y 与 x 成反比例,若 $y = \frac{k}{x}$ ($k \neq 0$, 且 k 为常数).

此时称 k 为比例常数.

注意:如 y 与 x 成反比例,且比例常数 $k > 0$, 则 x 增加, y 反而减少,但 $k < 0$ 时无此结论.

三 绝对值及其运算法则

(一) 绝对值

1 数 a 的绝对值(记为 $|a|$)的定义:

$$|a| = \begin{cases} a, & a \geq 0; \\ -a, & a < 0. \end{cases}$$

2 数 a 的绝对值的几何意义:数 a 所对应数轴上的点与原点的距离.

3 基本性质

① $|a| \geq 0$;

② $|a| < k \Leftrightarrow -k < a < k$ ($k > 0$);

$|a| > s \Leftrightarrow a < -s$ 或 $a > s$ ($s > 0$).

(二) 绝对值的运算法则

1 $|a + b| \leq |a| + |b|$ (和的绝对值小于等于绝对值之和);

2 $|a - b| \geq |a| - |b|$ (差的绝对值大于或等于绝对值之差);

3 $|ab| = |a| \cdot |b|$ (乘积的绝对值等于绝对值的乘积);

4 $\left| \frac{a}{b} \right| = \frac{|a|}{|b|}$ ($b \neq 0$) (商的绝对值等于绝对值的商).

题型 1.1—1 含绝对值的题

注 题型 1.1—1 中的第一个 1 表示第一章,第二个 1 表示本章第一部份代数(第二部份几何,第三部份三角),第三个 1 表示该部份的第一种题型.

1 用绝对值的基本性质 ①;

2 用绝对值的基本性质 ②.

例 1.1 已知 $|x - 2| + |y + 3| = 0$, 求 $\frac{x}{y}$.

解 用绝对值的基本性质 ① $\Rightarrow |x - 2| = 0, |y + 3| = 0 \Rightarrow x = 2, y = -3 \Rightarrow \frac{x}{y} = -$

$\frac{2}{3}$.

例 1.2 已知 $|x - 2| \leq 2, |y + 3| > 3$, 分别求 x, y 的变动范围.

解 用绝对值的基本性质 ②:

$$|x - 2| \leq 2 \Rightarrow -2 \leq x - 2 \leq 2 \Rightarrow 0 \leq x \leq 4;$$

$$|y + 3| > 3 \Rightarrow y + 3 < -3 \text{ 或 } y + 3 > 3 \Rightarrow y < -6 \text{ 或 } y > 0.$$

四 方程及其解

(零) 基本概念

方程:含有未知数的等式;

元:方程中未知数的个数;

次:方程中未知数的最高次数;

解:能使方程两边相等的未知数的值.

(一) 一元一次方程和它的解法

定义:含一个未知数,且未知数的最高次数为一的方程称为一元一次方程.

题型 1.1—2 解一元一次方程

步骤:

1 化为标准形式 $ax + b = 0 (a \neq 0)$;

2 得解 $x = -\frac{b}{a} (a \neq 0)$.

(二) 二元一次方程组及其解法

定义:含有二个未知数,且未知数的最高次数为一的方程组,即形如

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases} \text{的方程组.}$$

题型 1.1—3 解二元一次方程组

方法：

- 1 用加减消元法,把两个未知数消去一个,从而化成一元一次方程求解;
- 2 用代入消元法,把两个未知数消去一个,从而化成一元一次方程求解;

(三) 一元二次方程及其解法

定义:含一个未知数,且未知数的最高次数为二的方程,即形如 $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$) 的方程.

题型 1.1—4 解一元二次方程

方法：

- 1 直接开方法

例如：

$$2x^2 - 18 = 0, x^2 = 9, x = \pm 3.$$

- 2 配方后再开方法

例如：

$$x^2 - 4x - 2 = 0,$$

$$(x - 2)^2 - 6 = 0,$$

$$x - 2 = \pm \sqrt{6}, \text{ 故 } x = 2 \pm \sqrt{6}.$$

- 3 分解因式法

例 1.3 求解方程: $3x^2 - 5x - 2 = 0$.

解 $3x^2 - 5x - 2 = (3x + 1)(x - 2) = 0$.

得 $x_1 = -\frac{1}{3}, x_2 = 2$.

- 4 求根公式法

对于一元二次方程 $ax^2 + bx + c = 0$;

令 $\Delta = b^2 - 4ac$ 称为该方程的判别式.

$$\begin{cases} \Delta < 0 \Rightarrow \text{方程无实根;} \\ \Delta = 0 \Rightarrow \text{方程有两个相等的实根 } \frac{-b}{2a} \\ \Delta > 0 \Rightarrow \text{方程有两个不等的实根 } \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}. \end{cases}$$

注:前三种方法较为简单,但需相应条件;一般情况需用第 4 种.

题型 1.1—5 一元二次方程判别式符号与根个数的关系

由题型 1.1—4.4 派生而来.

用题型 1.1—4.4 中有关结论.

例 1.4 m 何值时,方程

$$(m + 1)x^2 + 4mx + 3m - 2 = 0$$

有等根?

解 $\Delta = (4m)^2 - 4 \times (m+1)(3m-2) = -8(m^2 + m - 2) = 0$
 $m = 1, -2$ 时 $\Delta = 0$ 原方程有两相等实根.

(四) 一元二次方程的根与系数关系

题型 1.1—6 一元二次方程根与系数的关系

1 有关结论: x_1, x_2 是方程 $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$) 的两个根的充要条件是

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \\ x_1 x_2 = \frac{c}{a} \end{cases}$$

2 主要有关题型: 要求用系数 a, b, c 表达根的已知函数式 $f(x_1, x_2)$.

及主要解决方法: 先把 x_1, x_2 的函数式化为 $x_1 + x_2, x_1 x_2$ 的函数式, 然后分别用 $-\frac{b}{a},$

$\frac{c}{a}$ 去代替 $x_1 + x_2, x_1 x_2$;

即 $f(x_1, x_2) = g(x_1 + x_2, x_1 x_2) = g(-\frac{b}{a}, \frac{c}{a})$.

例 1.5 设 $2x^2 - 5x + 3 = 0$ 的两根为 x_1, x_2 , 不解方程求 $\frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2}$.

解 $\frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2} = \frac{x_1^2 + x_2^2}{x_1^2 x_2^2} = \frac{(x_1^2 + x_2^2)^2 - 2x_1 x_2}{(x_1 x_2)^2} = \frac{(\frac{5}{2})^2 - 2 \times \frac{3}{2}}{(\frac{3}{2})^2} = \frac{13}{9}$.

题型 1.1—7 一个方程隐含多个方程

利用:

- ① 绝对值的基本性质 ①: $|a| \geq 0$;
- ② 任何数的偶次方非负: $b^{2n} \geq 0$ (n 非负整数);
- ③ 如 $c, d \geq 0$ 且 $c + d = 0$ 则 $c = d = 0$.

可把对应的方程拆为多个方程.

例 1.6 如 $|x-2| + (y+1)^2 = 0$ 则 $x^y = \underline{\hspace{2cm}}$.

解 $\begin{cases} |x-2| = 0 \\ (y+1)^2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = -1 \end{cases} \Rightarrow x^y = (2)^{-1} = \frac{1}{2}$.

五 不等式和不等式组

(一) 不等式定义

不等式: 用“ $>$ ”或“ $<$ ”连接的式子.

$$a - b > 0 \Leftrightarrow a > b \Leftrightarrow b < a.$$

(二) 不等式性质

1 $a > b, b > c$ 则 $a > c$ (不等式的传递).

- 2 若 $a > b$ 则 $a \pm c > b \pm c$ (不等式两边同加减一个相同的数, 不等号方向不变).
- 3 若 $c > 0$ 且 $a > b$ 则 $ac > bc$; 若 $c < 0$ 且 $a > b$ 则 $ac < bc$ [不等式两边同乘一个正(负)数, 不等号方向不(要)改变].
- 4 若 $a > b > 0$ 且 $c > d > 0$ 则 $ac > bd$.
- 5 若 $a > b > 0$ 则 $a^n > b^n$ (n 为自然数).
- 6 若 $a > b > 0$ 则 $\sqrt[n]{a} > \sqrt[n]{b}$ (n 为自然数).

(三) 不等式的解和解不等式

- 1 不等式的解集: 能使不等式成立的未知数的所有可能值的集合.
- 2 一元一次不等式: 形如 $ax > b$ (或 $ax < b$ ($a \neq 0$)) 的不等式.

题型 1.1—8 解一元一次不等式

$$\begin{cases} ax > b \Rightarrow \begin{cases} x > \frac{b}{a} & a > 0; \\ x < \frac{b}{a} & a < 0; \end{cases} \\ ax < b \Rightarrow \begin{cases} x < \frac{b}{a} & a > 0; \\ x > \frac{b}{a} & a < 0. \end{cases} \end{cases}$$

(四) 一元一次不等式组及其解法

一元一次不等式组: 几个一元一次不等式组成的不等式组.

一元一次不等式组的解集: 所有这些一元一次不等式的解集的公共部份(即交集).

题型 1.1—9 解一元一次不等式组

步骤:

- 1 分别解各一元一次不等式;
- 2 简单的取各解集的公共部份, 复杂的画图帮助.

(五) 一元二次不等式及其解法

一元二次不等式的一般形式: $ax^2 + bx + c > 0$ 或 $ax^2 + bx + c < 0$ ($a \neq 0$).

题型 1.1—10 解一元二次不等式

解法一——分解因式法.

条件: 能分解因式.

步骤:

- ① 分解因式;
- ② 拆为两个分别都由两个一元一次不等式组成的一元一次不等式组;
- ③ 分别解两个一元一次不等式组;

④ 取两个一元一次不等式组解集的并集 .

例 1.7 解 $-2x^2 - 5x + 3 < 0$.

解 ① $(2x - 1)(x + 3) > 0$,

$$\textcircled{2} \begin{cases} 2x - 1 > 0 \\ x + 3 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > \frac{1}{2} \\ x > -3 \end{cases} \Rightarrow x > \frac{1}{2},$$

$$\begin{cases} 2x - 1 < 0 \\ x + 3 < 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x < \frac{1}{2} \\ x < -3 \end{cases} \Rightarrow x < -3,$$

④ 不等式的解集为 $(-\infty, -3) \cup (\frac{1}{2}, +\infty)$.

解法二——求根法 .

应用范围 : 比解法一广泛 , 全部一元二次不等式 , 不论能否分解因式都可应用 .

步骤 :

① 化为 $a > 0$ 统一图形的开口向上 .

② 求 Δ , 据 Δ 的符号判定实根个数 , 即

$$\Delta < 0 \Rightarrow \text{无实根},$$

$$\Delta = 0 \Rightarrow \text{有唯一实根 } \bar{x},$$

$$\Delta > 0 \Rightarrow \text{有两个不同实根 } x_1 < x_2.$$

③ 作图(一般可省略):

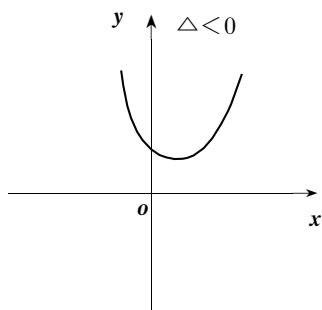


图 1-1a

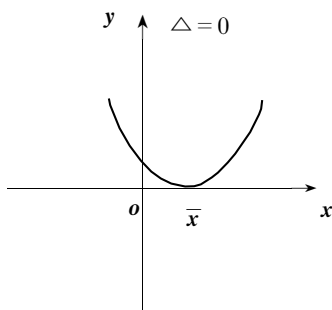


图 1-1b

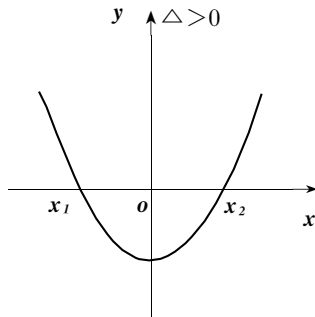


图 1-1c

④ 据图得结论 :

$$\begin{cases} \Delta < 0 \Rightarrow \text{无实根} \begin{cases} ax^2 + bx + c > 0 \text{ 的解为全体实数;} \\ ax^2 + bx + c < 0 \text{ 无解;} \end{cases} \\ \Delta = 0 \Rightarrow \text{有唯一实根 } \bar{x} \begin{cases} ax^2 + bx + c > 0 \text{ 的解为不等于 } \bar{x} \text{ 的一切实数;} \\ ax^2 + bx + c < 0 \text{ 无解;} \end{cases} \\ \Delta > 0 \Rightarrow \text{有两个不同实根 } x_1 < x_2 \begin{cases} ax^2 + bx + c > 0 \text{ 的解为 } x < x_1 \text{ 或 } x > x_2; \\ ax^2 + bx + c < 0 \text{ 的解为 } x_1 < x < x_2. \end{cases} \end{cases}$$

下面用解法二再解上面的例 1.7.

$$\textcircled{1} -2x^2 - 5x + 3 < 0 \Leftrightarrow 2x^2 + 5x - 3 > 0$$

$$\textcircled{2} \Delta = 5^2 - 4 \times 2 \times (-3) = 49 > 0 \Rightarrow \text{有两相异实根} :$$

$$x_1 = \frac{-5 - \sqrt{49}}{2 \times 2} = -3 \quad x_2 = \frac{-5 + \sqrt{49}}{2 \times 2} = \frac{1}{2};$$

④ 不等式的解集为 $(-\infty, -3) \cup (\frac{1}{2}, +\infty)$.

(六) 含有绝对值的不等式的解法

题型 1.1—11 解含有绝对值的不等式

步骤:

- 1 据绝对值的基本性质 ② 打开绝对值号, 得无绝对值的不等式;
- 2 解由 1 得到的无绝对值的不等式.

例 1.8 解不等式: $|2x - 3| < 5$.

解 $|2x - 3| < 5 \Leftrightarrow -5 < 2x - 3 < 5 \Leftrightarrow -2 < 2x < 8 \Leftrightarrow -1 < x < 4$.

(七) 关于区间

- 1 开区间 满足 $a < x < b$ 的一切 x 的全体, 记为 (a, b) .
- 2 闭区间 满足 $a \leq x \leq b$ 的一切 x 的全体, 记为 $[a, b]$.
- 3 半开半闭区间 满足 $a \leq x < b$ 或 $a < x \leq b$ 的一切 x 的全体, 记为 $[a, b)$ 或 $a, b]$.
- 4 实数集 R 可记为 $(-\infty, +\infty)$, $x \geq a$ 记为 $[a, +\infty)$, $x \leq a$ 记为 $(-\infty, a]$.

题型 1.1—12 解分式不等式

步骤:

- 1 通分, 化为标准形式 $\frac{f(x)}{g(x)} \geq (<, >, < 0)$;
- 2 拆为两个不等式组 (以 $\frac{f(x)}{g(x)} \geq 0$ 为例);

$$\begin{cases} f(x) \geq 0 \\ g(x) > 0 \end{cases} \quad \begin{cases} f(x) \leq 0 \\ g(x) < 0 \end{cases};$$
- 3 分别解两组不等式;
- 4 取解集的并.

例 1.9 解不等式: $\frac{4x - 8}{4 - x} < 3$.

解 $\frac{4x - 8}{4 - x} + 3 < 0 \Rightarrow \frac{4 + x}{4 - x} < 0$

$$\Rightarrow \begin{cases} 4 + x > 0 \\ 4 - x < 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > -4 \\ x > 4 \end{cases} \Rightarrow x > 4.$$

或 $\begin{cases} 4 + x < 0 \\ 4 - x > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x < -4 \\ x < 4 \end{cases} \Rightarrow x < -4.$

故原不等式解为 $(-\infty, -4) \cup (4, +\infty)$.

(一) 基本概念

1 数列定义 ① 按一定次序 ② 列出的一列 ③ 数 .

注:定义中的 ①、②、③ 等标号表示定义中的要点,今后定义和定理中的标号同理 .

2 定义中的要点和有关概念

① 按一定次序, ② $\left\{ \begin{array}{l} \text{数列 列出,} \\ \text{级数 相加,} \end{array} \right.$ ③ $\left\{ \begin{array}{l} \text{有穷,} \\ \text{无穷,} \end{array} \right.$ ④ $\left\{ \begin{array}{l} \text{等差,} \\ \text{等比,} \\ \text{一般,} \end{array} \right.$ ⑤ $\left\{ \begin{array}{l} \text{数列,} \\ \text{函数列,} \\ \dots \end{array} \right.$

3 通项:第 n 项,一般用 a_n 表示 .

4 前 n 项和: $S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$.

5 S_n 和 a_n 关系: $a_1 = S_1$, $a_n = S_n - S_{n-1}$ ($n \geq 2$).

(二) 等差数列

1 等差数列:数列 $\{a_n\}$ 若有 $a_n - a_{n-1} = d$, 其中 d 为常数, $n \geq 2$; 即从第 2 项起, 每一项与前一項的差为同一常数 .

2 公差:常数 d .

3 等差中项:如 a, A, b 成等差数列, 则 A 叫做 a, b 的等差中项; 且 $A = \frac{a+b}{2}$.

(三) 等比数列

1 等比数列:数列 $\{a_n\}$ 若有 $\frac{a_n}{a_{n-1}} = q$ (q 为非零常数, $n \geq 2$); 即从第 2 项起, 每一项与前一項的比为同一常数 .

2 公比:常数 q .

3 等比中项:若 a, G, b 三数成等比数列, 则 G 叫做 a, b 的等比中项; 且 $G = \pm \sqrt{ab}$.

题型 1.1—13 数列

1 解数列题首先应考虑的问题

① 等差, 等比?

② 求 a_n, S_n ?

③ a_1, d (q), n 各为多少, 若直接无, 而又需要, 则利用题中条件计算.

2 等差数列有关公式

① 通项公式: $a_n = a_1 + (n-1)d$.

② 前 n 项和公式:

$$S_n = na_1 + \frac{n(n-1)}{2}d, \quad \text{已知 } n, a_1, d;$$

$$S_n = \frac{n(a_1 + a_n)}{2}, \quad \text{已知 } n, a_1, a_n.$$

③ $S_n, S_{2n-n}, S_{3n-2n}, \dots$ 仍成等差数列 .

④ $a_s = a_t + (s-t)d$ ($s > t$).

⑤ $a_s + a_t = 2a_1 + (s+t-2)d$.

3 等比数列有关公式

① 通项公式: $a_n = a_1 q^{n-1}$.② 前 n 项和公式:

$$S_n = \frac{a_1(1-q^n)}{1-q}, \quad \text{已知 } n, a_1, q;$$

$$S_n = \frac{a_1 - a_n q}{1-q}, \quad \text{已知 } n, a_1, a_n, q;$$

③ $S_n, S_{2n} - S_n, S_{3n} - S_{2n}, \dots$ 仍成等比数列.④ $a_s = a_t q^{s-t} (s > t)$.⑤ $a_s a_t = a_1^2 q^{s+t-2}$.

⑥ 无穷等比数列求和公式:

$$s = a_1 + a_1 q + a_1 q^2 + \dots = \frac{a_1}{1-q} (|q| < 1)$$

七 排列、组合

(一) 排列组合

题型 1.1—14 排列与组合

- 1 { 加法原理
乘法原理
- 2 计算公式

n 个元素 每次取 m 个	{	不重复	排列 (要考虑次序)	{	$m \leq n : p_n^m = \frac{n!}{(n-m)!}$	$= n(n-1)\dots[n-(m-1)]$, m 项
			$m = n : p_n^n = n!$,			
		可重复 排列: n^m	组合 (不考虑次序)	{	$m \leq n : C_n^m = \frac{p_n^m}{m!} = \frac{n!}{m!(n-m)!}$	$= \frac{n(n-1)\dots[n-(m-1)]}{m!}$, m 项
				$m = n : C_n^n = 1$		

3 变换公式

$$C_n^m = C_n^{n-m};$$

$$C_{n+1}^m = C_n^m + C_n^{m-1}.$$

4 特殊

$$0! = 1;$$

$$C_n^0 = 1;$$

$$C_n^1 = n;$$

$$C_n^n = 1;$$

$$P_n^n = n!$$

5 排列与组合题的注意和步骤

- ① 总元素个数 $n = ?$
- ② 每次取个数 $m = ?$
- ③ 可否重复?
- ④ 次序起不起作用, 即是排列还是组合?
- ⑤ 加法, 乘法原理?
- ⑥ 据 ①—⑤ 选择计算公式和进行计算.

(二) 二项式定理

题型 1.1—15 二项式定理

基本公式:

$$(a + b)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k a^{n-k} b^k$$

类型:

- ① a, b 之间无交叉, 一般较简单;
- ② a, b 之间有交叉, 一般比类型 ① 稍难.

例 1.10 求 $(a + x)^{10}$ 的展式中 $a^3 x^7$ 的系数.

解 属类型 ①.

$$a^3 x^7 \text{ 的系数为 } C_{10}^7 = C_{10}^3 = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 120.$$

例 1.11 求 $(x^2 + \frac{1}{2\sqrt{x}})^{20}$ 的展式中的常数项.

解 属类型 ②.

$$\text{第 } k+1 \text{ 项为 } C_{20}^k (x^2)^{20-k} \left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)^k = C_{20}^k \cdot \frac{1}{2^k} \cdot x^{20-\frac{5}{2}k}.$$

令 $20 - \frac{5}{2}k = 0$ 得 $k = 8$, 则常数项为第 9 项:

$$C_{20}^8 \cdot \frac{1}{2^8} = \frac{45}{256}.$$

题型 1.1—16 初等代数应用题

1 年龄问题

注意 n 年后每人都长 n 岁.

2 价格升降问题

注意变化率.

3 工程问题

可设总工程量为 1, 各人单独完成工程天数分别为 x, y, z 等, 则各人每天完成工程量分

别为 $\frac{1}{x}, \frac{1}{y}, \frac{1}{z}$ 等. 一般可用建立方程、解方程方法.

4 分段计价问题

注意每段的区间和单价

5 井深问题

注意联辅教材中井深问题绳的长度是指合股的.

6 路程问题

相向速度相加,同向相减.

7 连续整数问题

可设连续整数分别为 $n, n+1, n+2, \dots, n+k$.

8 溶液问题

注意浓度

9 合金问题

若 3 种金属在合金中的重量比为 $a_1 : a_2 : a_3$, 总重量为 s , 则第 i 种金属的重量为 $s_i =$

$$\frac{a_i s}{a_1 + a_2 + a_3}.$$

习 题 一

1 设方程 $(m+1)(x^2-x) = (m-1)(x-1)$ 的两根绝对值相等而符号相反, 求 m 的值和两根.

2 已知 a, b 为互不相等的实数, 且 $a^2 = 7 - 3a, b^2 = 7 - 3b$, 试求 $\frac{b}{a^2} + \frac{a}{b^2}$ 的值.

3 解方程 $|x^2 - 4x - 5| + 3\sqrt{2x^2 + x - 1} = 0$.

4 解方程组 $\begin{cases} |x+1| + |y-2| = 3 \\ |x+1| = 2y-4 \end{cases}$.

5 解不等式组 $\begin{cases} |x-3| \leq 5 \\ \frac{4+x}{4-x} < 0 \end{cases}$.

6 解不等式 $\sqrt{x-1} < x-2$.

7 已知两个等差数列 $5, 8, 11, \dots$ 与 $3, 7, 11, \dots$ 都有 100 项, 问它们有多少相同的项?

8 用数字 $0, 1, 2, 3, 4, 5$ 组成没有重复数字的数, 能得到多少个是 25 的倍数的四位数?

9 有不同的书籍 6 本, 分给甲、乙、丙三人.

(1) 如果每人 2 本, 有多少分法?

(2) 如果甲 1 本, 乙 2 本, 丙 3 本, 有多少分法?

(3) 如果一人 1 本, 一人 2 本, 一人 3 本, 有多少分法?

10 已知 $(\sqrt{x} + \frac{1}{2\sqrt[3]{x}})^n$ 展开式中的前三项 x 的幂的系数成等差数列, 求展开式中含 x 的项.

11 甲、乙两桶里都放有药水, 第一次把甲桶的药水往乙桶倒, 使乙桶药水加倍; 第二次把乙桶的药水往甲桶倒, 使甲桶所剩药水加倍; 第三次又把甲桶药水往乙桶倒, 使乙桶所剩药水加倍. 这样一来, 两桶各有 64 升. 问甲、乙两桶里原有药水各多少升?

12 侦察艇得到命令要到舰队前面 70 公里的地方去侦察, 已知侦察艇的速度是每小时

28 公里 舰队向侦察地点前进的速度为每小时 14 公里 问侦察艇从出发到回归舰队共用多少时间?

第二节 平面解析几何初步

一 平面直角坐标系

平面直角坐标系:平面上有公共原点而且互相垂的两条数轴构成平面直角坐标系.平面直角坐标系中坐标平面上的所有点与所有的有序实数对 (x, y) 成一一对应.

1 两点间的距离

点 $p_1(x_1, y_1), p_2(x_2, y_2)$ 之间的距离:

$$p_1p_2 = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

2 线段的定比分点坐标

设点 $p(x, y)$ 把平面上的两点 $p_1(x_1, y_1), p_2(x_2, y_2)$ 所连成线段分成两段,使得 $p_1p/p_2 = \lambda$ (图 1-2) 则定比 λ 的分点 p 的坐标公式为

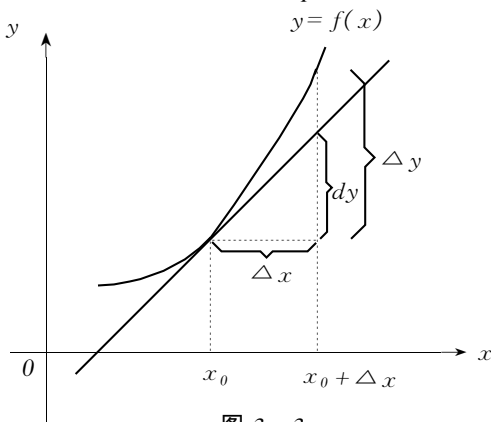


图 3-3

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}, \quad y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}.$$

当 $\lambda = 1$ 时, p 为 p_1p_2 的中点, 中点坐标的公式为

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}, \quad y = \frac{y_1 + y_2}{2}.$$

二 直线

1 直线

1 直线的倾角 α : 直线向上方向与 x 轴正向所成的最小正角.

2 直线的斜率 k : 直线倾角的正切值, 即 $k = \tan\alpha$ ($\alpha \neq \frac{\pi}{2}$).

两直线 $\begin{cases} \text{平行} & \text{—— 斜率相等,} \\ \text{垂直} & \text{—— 斜率互为负倒数.} \end{cases}$