路德维希·维特根斯坦
与维也纳小组

一

1929 年 12 月 18 日，星期三（在石里克家）

（数学的证明）

数学有两种不同的证明方法。1. 把一个方程式归结为另一个方程式，作为恰当的例子，比如：$16 \times 24 = 384$，或者，$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$。2. 人们认为，借助于充分的归纳法，算术公理（比如结合律）就能得到证明。但这并不是证明。这可以从以下看出：有待证明的方程式只有在证明中才能成立。归纳法只给出它所给予的东西，此外，它不能给出任何东西，比如：1∶3(0.333

10

10

10

但人们说的这一切，比如上例中小数点后无限多的“3”，并不属于真正的数学，这完全是私事。大多数人认为，充分的归纳法只是达到与一命题的一条道路；归纳的方法需要加入一种特殊的结论，此结论说：所以，命题对所有的数都有效。我要问：这里的“所以”是什么意思？这里没有“所以”！充分的归纳法本身就是有待证明的命题，而不只是证明途径。方法不是达到某种地方的运载工具。在数学里，并非首先有自

在意义的命题，然后，才有可用以确定一个命题的真假的方法，而只存在方法或被称为命题的东西，而命题只不过是方法的简称。人们可以提出公理（比如代数里的运算规则：$a+b=b+a$，等），这些公理本身虽然是随意的，但它们显然是依照归纳法被建立起来的。当我要把某一方程式归结为一些基本规则时，我就可以用这些规则进行运算。但这些规则不能表达出来的一种东西，恰恰就是充分的归纳法所给出的东西。这种东西虽然随后可以体现于规则在具体的数中的运用，但充分归纳法的本质在数学中却不能以一个命题的形态或一个公理系统的形态表达出来，它是不可表达的。充分归纳法是在方程式的建立中展现自己的。公理的提出是与充分归纳法紧密相联的，但是，公理并不表达充分归纳法。因此，公理是不可证明的，但它们具有永久性命题的逻辑价值。

数学中的探索意味着什么？

我们在数学著作里寻找的东西并不是关于某物的描述，而是事情本身,我们(创)做着(machen)数学。正如人们有“描述历史”和“创做历史”之说,在数学里,人们只能(创)做。数学是它自己的运用。这一点是极其重要的。由此可以得出一系列结论。如果我说:3 个李子 $+4$ 个李子 $=7$ 个李子,3 人 $+4$ 人 $=7$ 人,等等,那么我并不是把数运用到了不同的对象，而是我总拥有这种运用。数并不被取代，它们存在着；被取代的只是对象。

一个算术命题的正确性并不是通过一个重言式的命题来表达。根据罗素的表达方式，人们可以用下面的方式来描述命题 $3+4=7$:

$$(E_3x)\varphi x.(E_4x)\psi x.\sim(\exists x)\varphi x\cdot\psi x:\supset:(E_7x).\varphi x\vee\psi x.$$

人们可以确信，这一方程式的证明似乎就在于，这样被记

人们不能去寻找第六感官。人们的探索不能漫无目标。我只能在空间里，比如在房间里寻找（探索）一对象。但是，“在数学里寻找（探索）某种东西”又是什么意思呢？空间有一系列空着的位置，如果我要找一个房间，那么我可以到最近的地方去找。与此相反，数学里并没有空着的位置。数学系统，比如通用的乘法系统，完全是自我封闭的系统。我只能在系统里进行探索（寻找），而不是探索系统。 242.897 是多少？这是一个系统内的问题。许多问题和答案是没有界限的（无止境的）。我只能探索答案，因为有发现答案的方法。正如人们在学校所学的那样，代数（字母演算）是一个封闭系统，基础三角学也一样是一个封闭系统。比如，我只能追问： $\sin^2 x = \mathrm{tg}^3 x$ ？而不能问：$\sin x = x - x^3/3! + x\,5/5!$ $\sin = X - x^3/3! + x5/5 - + \cdots$？这并不是因为基础三角学本身是不完善的，好像它还有未解决（空着）的有待补充的地方，而某种分析就是这种补充。不，情况并非如此，而是我们由此过渡到一个新的系统，此新系统并不包含旧系统，而只包含与旧系统恰恰具有同样结构的那一部分。简单的例子是：自然数与整数。自然数并不等同于正数，就如人们说正的两个士兵，与说两个士兵并不一样，人们这里拥有的是完全不同的东西。如果我们从基础三角学函数转向通过级数定义而得到的解释函数，那么情况也是这样。我们会发现，就如我们从三角学那里熟

录的命题是一重言式的命题。但是，为了能记录这一命题，我必须事先已经知道， $3+4$ 是等于 7.完全的重言式是算术的一种运用，而不是它的证明。算术已被利用于命题的构成。重言式（的命题）的得出，就其本身而言并不重要。我既把算术等式运用于有意义的命题，同样也能把它运用于重言式。

知的函数 $\sin x$ 等那样，那些（解释）函数也具有同样的性质；我们将把这些结构增补给初级函数。但是，人们必须看到，要通过单纯的变元从一个系统转入另一系统，是不可能的；在第二个系统有意义的问题因此在第一个系统里不需要再有意义。新系统并不是旧系统的完善。旧系统没有空着的位置（未解决的地方）。人们终究不会有他还没有的东西。

我不能系统地又非系统地对待自己。

我不能根据一个命题来阐明，这一命题属某一系统。

我不能用第一系统的语言说，什么是可解答的，什么是不可解答的。

甚至根本就没有问题。

范例：角的三等分

在初级几何学里，可否对此问题进行探索？人们不是在初级几何系统里，而是在代数的数与方程式（初级几何被投射到这些数和方程式里）的系统里，看到了进行建构是不可能的。后一系统要宽泛得多，而且它能够对由圆规和直尺产生出来的图像进行代数式的说明。在这一系统里，三等分的问题有其清晰的意义。与此同时，也有回答这一问题的方法。但是，这一问题在初级几何学里是否也有清晰的意义呢？人们首先会认为有。因为的确有某种东西已浮现在许多具有解答问题的功名心的人们面前。

譬喻：解纽结

如果压根儿就没有纽结，而只是看起来是一个纽结，那该如何？那人们就不能试图去解开它。虽然人们所做的事情与解开纽结有些类似，但实际上，严格说来，人们可能根本就不是在寻找纽结的解决办法。从逻辑上言，这样去解开纽结的

努力是不可能的。

同样，人们也不可能去探索（寻找）角的三等分问题的答案。在这一系统里，甚至就没有这一问题。我们做的只是：延伸我的句法。H. 魏耶（H. Weyl）这样表述可判定性问题：每个相关问题借助于逻辑推论能否得到判定？[1]不能这样表述问题。（因为这里）一切都落在了“相关的”这个词上。对于魏耶来说，如果一个陈述是借助于七个推论（组合）原则而根据某一基本公式建立起来，那么这一陈述就是相关陈述。[2]错误就在这里。只当一个陈述属于某一系统，它才是相关的。

在这个意义上，人们断言：每个相关的问题都是可以判定（解决）的。

显然不相关的东西，终究是不相关的。

作为句法的几何学（一）

爱因斯坦说，几何学与刚性物体的可能性蕴层相关。[3]如果我的确用语言来描绘刚性物体的蕴层，那么与这种蕴层相应的就只能是语言的句法。

[所以，用很少的一些公理去统制空间的所有多样性，这是不会有困难的（空间是一种“被定义的多样性”[4]），因为我们所能提供的只是语言句法。]

① H. 魏耶：《数学哲学与自然科学》，载《哲学指南》第 2 卷，慕尼黑，1927，第 20 页（相当于英文版第 24 页，普林斯顿，1949。）

② 同上书（德译本）第 5 页。

③ 《几何学与经验》，柏林 1921，第 6－7 页；《论狭义相对论与广义相对论》，布劳恩施威格，1917，第 2 页。

④ 胡塞尔：《纯粹现象学观念》，第 72 节，《哲学与现象学研究年鉴》第 1 卷，1913，第 133 页。

无矛盾性（一）[1]

1929 年 12 月 22 日，星期日（在石里克家）

“全体”(一)

我首先谈通常的“全体”。比如，“房间里全体的人都穿着裤子。”我怎么知道这一点呢？这一语句是指：“石里克教授穿着裤子，魏斯曼穿着裤子，维特根斯坦穿着裤子，此外这里没有其他人。”每次完全的枚举都必须以“此外没有其他”一语来作结束。这里指什么呢？这里可有一种理解，即“卡尔纳普先生、某某先生等等，不在房间里”。于是，或许人们设想的语句“这是全体的物”是不存在的。

我们假定，我说：“我看见一个正方形与其中的一个圆。”显而易见，这无须逐一枚举，它们是完全不同的东西。我确信，这里存在一种命题（语句）类型，我对这种命题类型事先并无所知，它约略对应于我称之为“不完整的图像”的那种东西，我将阐明我指的是什么。在所有那种情况下，说的是：存在某种我现在称之为基本命题（元素命题）的那种东西，这种基本命题就是不完整的图像。请思考下面事例：我看见了两种同样颜色的原料。人们可以确信，这是说：“两种原料或者是绿色的，或者是蓝色的，或者……”但对我们而言，它显然不可能是这个意思。我们不可能进行那样的枚举。相反，它说的是：“我们看见了一种有 x 颜色的原料和另一种有 x 颜色的原

[1] 关于维特根斯坦的这一部分谈话，在魏斯曼的笔记本里没有记录，但在此标题下留出两页多的篇幅。参见“编者说明”。

料。这意味着，罗素式的分析是不适当的，区别在于（$\exists x$）. φx，这一记号允许双重否定，即外在的否定和内在的否定。我们的事例并没有虚假变数的性质，而具有真实变数的性质。我力图说明，罗素的分析我以前认为是正确的，而在这种情况下是无效的。“房间里没人”并不是说“房间里没有石里克教授，没有卡尔纳普先生，没有……先生”。我相信，“我想起房间里没有人”的过程与“我想起正方形里没有圆”的过程是一样的。“正方形里有一个圆”这并不是说“圆或者在正方形里，或者不在正方形里，或者……”这里并没涉及枚举。毋宁说，这里涉及的只是我所说的不完全的图像。

我可以描述这样一种实情，即一个有一定尺寸的圆存在于正方形的某一位置。这是一个完整的图像。我选择什么样的描述，并不取决于我比如是否借用坐标来工作，而只取决于所选择的描述形式是否具有恰当的多样性。所以，如果在这一语句中出现了数字，这些数字表明了圆的位置和它的大小，那么也就可能出现这种情况，即我用变数或区间（比如 6—7，8—9）来代替数字。于是，我就获得了一个不完整的图像。试想这么一张肖像：照片上我的嘴被略去，这可能有两种含义：第一，我的嘴白如白纸；第二，不管我的嘴是什么样的，这张图像都是对的。

不完整的图像就在于，在命题中出现了变数。现在的问题是：命题的正确表达该怎么说？我认为，不是表达为“$(\exists x).\ \varphi x$”，而是表达为“φx”。二者间的区别在于：“$(\exists x)\varphi x$”这一记号允许双重否定，而“φx”这一记号则不允许。这表明，“$(\exists x).\ \varphi x$”这一记号没有适当的多样性，此外，如果我进行双重否定，那将发生什么结果呢？

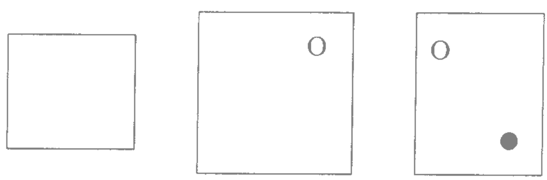
$$\sim(\exists x).\sim\varphi x=(X).\ \varphi x$$

这意味着，“两种原料在所有颜色方面都是相符合的”，

“它们共同具有全体（一切）颜色”。这是荒谬的。于是，命题“（ $\exists x$ ）. φx ”也必定是无意义的。

所以，“ φx ”是一个正确的命题，而不只是一个预备性命题。现在我确信，在基本命题中，人们可以略去某种信息。于是，命题就是事实的一种不完整的肖像。

但，如果我要完善描述，那么这不就意味着我给一个不充分的命题补充另一个不充分的命题吗？充分的（完整的）描述是否简单就是是充分的命题的结合？试画出以下图像：



每个命题都是一个记号。记号并不是由正方形的记号与圆的记号组合而成的。即使我略去了一个记号，我也仍能获得一个图像。这与对事物的习惯看法相反；据此习惯看法，如果略去了命题的部分，那么我只能获得一个命题的预备成分。

“在正方形里面有一黑色的圆圈”。这一命题包含着“正方形’、‘黑色的’、‘圆圈’和‘在里面’这些词,并无其他。这就是全体。命题不能说出它们包含的东西以外的东西，我们理解它，表明它就是一种不充分（完整）形态的命题。

不完整（充分）的图像必须显明，它是不完整的。① 人们必须看出，命题只是事实的一种不完整的肖像。命题必须显明，它周围的全体仍是空着或敞开着的。它必须显明它的敞

①即使我充分（完整）地描述在房子里的全体东西，此描述也仍不是完整的图像。因为我还可以问，房间外有什么？在命题中，我们必定也能看到，它并没有描述全体东西。命题必须显明它的敞开性。

开性。一个基本命题（描述）空间里的总体颜色。

情形或许就是：全体不充分（不完整）的描述——全体仍有空位的不充分的命题——组合成一个充分（完整）的基本命题。

充分的命题就是不充分的命题的结合？

对 象

这里涉及人们关于对象的表象。

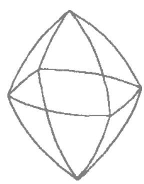
当弗雷格和罗素讨论对象时，他们着眼的总是在语言上由名词表达或再现的东西，所以，我们谈论椅子、桌子之类的物体。因此，对对象的整体理解就最紧密地与命题的主一谓形式相联系。显然，在没有主一谓形式的地方，人们也就不能在这个意义上去讨论或者言说对象。但我完全可以其他方式来描述房间，比如，我通过一方程式描述房子的表面，陈说房子表面的颜色分布。在这种描述形式中，不再涉及单个的“对象”，不涉及椅子、书籍、桌子以及它们的空间位置。在这里，我们没有关系，所有这一切都不存在。

我认为，一条原则支配着基本命题的整体领域，这一原则就是：基本命题的形式是不可预知的。要是以为这里可以用日常语言形式主一谓结构、二元的关系等等就能够应付，那简直太可笑了。在基本命题中可以出现实际的数或者实际数的某种类似物，这一点就已表明，基本命题是完全不同于所有其他命题。而且这里将能出现的所有东西，我们今天是不可能预知的。如果我们对现象进行逻辑分析，那么，我们可以知道，基本命题有什么样的形式。这里存在一种区域，在此区域里，没有任何假设。基本命题的逻辑建构与命题的逻辑建构没有丝毫相似之处。

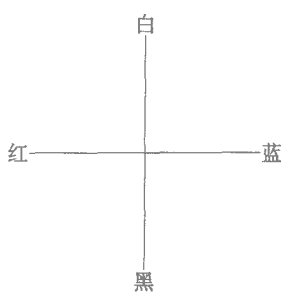
试想一下物理方程式：它们是怎样如此复杂地被建构起来的？基本命题也具有那样的复杂性。

当我定出四种原色 红、蓝、灰、绿 ,并补充说明 ,其他颜色是如何从这些原色产生出来的，那么，我们看到的每一种颜色，我都能再现出来。

关于色料形式的讨论。原色是十分鲜艳的：①



颜色的记号：



关于颜色的每一种陈述都能借助于这样的符号得到描绘(体现)。如果我们说 ,我们有四种原色 ,那么我就把这种同等的符号称为描绘的要素(基础),描绘的要素就是‘ 对象 ”。

于是，“ 对象究竟是处于主位的某物，还是某种属性物，②抑或是关系物或者其他东西？ ” 这一问题便毫无意义。只是在我

① 其理由在《哲学评论》中作了说明。

② 速记稿里似乎是说‘ 有某种属性 ”,在提纲的打印稿里则出现‘ 有属性的 ”。

们拥有描绘的同等要素的地方，我们才谈论对象。

你马上会看到，追问对象的数是没有意义的。尤其是不可能存在无限多的对象。“存在无限多的沙发”=“在空间里存在无限多的可能沙发”。但一旦对象是一个描绘要素，那么那就是不可能性的。

逻辑乘法不可能通过主词与谓词或者通过关系来描绘，而是通过比如物理方程式来描绘。显而易见，这里不再论及某个对象。

“全体”意味着什么？

1. “房间里全体的人都穿着裤子”[①]。这里首先涉及的是，“人”是一个形式，还是一个谓词。如果人就如“颜色”那样是一个形式，那么我就不能说“a 是一个人”，而必须由“a”的句法来显示 a。如果“人”是一个谓词，那么就存在一个“a 是人”的形式命题。

“φx”=“x 是人”

“ψx”=“x 穿着裤子”

“全体的人都穿裤子”=“$(x):\varphi x.\supset\psi x$

或者“$(x).\varphi x$”

“在房间里的全体人”恰如说“在正方形里的圆”一样，这是说：石里克教授穿着裤子，魏斯曼穿着裤子，维特根斯坦穿着裤子。紧接着还有一语句（命题），即“此外没有人在房间里”。这一命题可简单地称为“$\sim fx$”。

假设“人”是一形式：

“φx”=“X 是)在房间里”

“φx”=“有人(是)在房间里”

①罗素认为，“我遇见了一个人。”（“$(\exists x).fx$”）是一个不确定的陈述。

"$\sim\varphi x$" = "没人(是)在房间里"

"$(\exists x).\varphi x$" = "$\varphi a \vee \varphi b \vee \varphi c \vee \cdots$"

"$\sim(\exists x).\varphi x$" = "没有人在房间里"

"$(\exists x).\sim\varphi x$" = "有人不在房间里"

"$\sim(\exists x).\sim\varphi x$" = "全体人都(是)在房间里"

但人们又可以论证说，"有人在房间里"只允许一重否定。而"$(\exists x).\varphi x$"则允许双重否定。所以，"有人在房间里"这一命题的意义不能通过罗素的符号得到恰当的揭示。

"房间里全体的人都穿着裤子" =

$\varphi a.\psi a.\varphi b.\psi b.\varphi c.\psi c.\sim\varphi x$

$x \neq a.x \neq b.x \neq c.$

这里的问题似乎是：如果允许"$(\exists x).\varphi x$"成立，那么它与"φx"的区别在什么地方？或者只允许"φx"，而不允许"$(\exists x).\varphi x$"？"$(\exists x)$"算子能被规定为什么样的陈述函数，又不能被规定为什么样的陈述数？

2. 关于颜色的陈述。

由于只有四种描绘的要素：红、蓝、灰、绿，所以，每一种有关颜色的陈述都可被归结为一个最终的联言判断：

红色……与蓝色……与灰色……与绿色（……）。

所以，在这种情况下，"全体"是一个逻辑结果，不过，是一个最终的逻辑结果。

3. "全体的数"

这里我们可以知道，一个命题被理解错了，而且充分的归纳与数的全体性毫无关联。

唯 我 论

早先我曾确信，存在一种会话用语（我们日常就是用这种会话用语谈论一切）以及一种原初语言，它表达着我们现实知道的

东西,所以,它是现象。[1] 我还讨论过‘第一系统和第二系统’问题。现在我想阐明，我为什么不再坚持这种观点。

我认为，我们无须去寻找一种新的语言或者去构造一种符号系统，会话用语就是语言，前提是我们使它摆脱不清晰状态。

如果人们只在意于清晰地了解语言所表征的东西，那么我们的语言就完全是正常的。除了日常语言，其他语言也是有价值的，只要它们能向我们显明，在它们当中，什么是共同的东西。为了某种目的，比如为了描述推论的关系，人的符号系统就很有用处。实际上，弗雷格、皮亚诺和罗素在建立符号逻辑时，只关注在数学中的运用，而没考虑到对现实事物的描述。

这些逻辑学家认为，如果割断一切牵扯，不把逻辑形式运用于现实，那么我们剩下的就是数学。今天我们看到，实际上它与数学也毫无关联，这里没有逻辑命题。

如果为了说明简单的逻辑关系，那么像‘φx’这一符号就是很有用的。这一符号是来源于这种情况，即“φ”表示一个谓词，而‘X’则表示一个可变的名词。但是，人们一旦关注现实的事物，马上就会发现，那种符号系统远不如我们的现实语言。只谈论一种主—谓形式显然完全是错误的。实际上存在的不是一种主—谓形式，而是一系列主—谓形式。假如只存在一种主—谓形式，那么所有的名词和形容词都必须是可相互替换的。也即所有相互可替换的词都属同一种类。[2] 但是，日常语言表明情况并非如此。显然,我可以说‘椅子是褐色的’或‘椅子的表面是褐色的’。如果我用‘重的’来替换‘褐色的’,那么我就只能说前一语句,而不能说后一语句。这表明,‘褐色的’这个词也具有两

[1] 类似的观念在《哲学评论》中多次被提及，有时被作为要排除的东西，有时则得到不同程度的赞同。维特根斯坦这里无疑是指早期著作，“哲学论述”的一些片断可能第一次发表在这些早期著作中。

[2] 语言本身有完善的规则，困难在于使句法简单明了。

种不同的意义。

乍一看,“右的”看起来与其他形容词如“甜的”一样。“左一右”与“甜一苦”相应。

我可以说“更右”,就如我可以说“更甜”一样。

但是,我只说“某某是处在某某的右边的”,却不能说“某某是处在某某的甜的”。所以，在现实中，句法并不一样。①

如果我考察的不只是出现某一词的单个语句，而是一切可能的语句，那么，它们将比“ φx ”这一符号更完整地给出词的句法。

但值得注意的是，我们语言中存在某种东西，我想把这种东西比喻为机器中空转的轮子。我将澄清我指的是什么。

命题的意义就是它的证实

比如,如果我说“柜子上面放着一本书”,那么我如何去证实呢？我看它一眼，或者仔细翻看它的各页，或者把它拿在手中，触摸它，打开它翻阅等等，是否就足以证实这一语句呢？这里有两种看法。一种看法认为，不管我怎样进行，我都不可能充分地证实一个语句。语句似乎永远给自己留着一扇后门。不管我们做什么，我们都不能担保，我们不欺骗自己。

另一种也就是我要为之辩护的看法认为，情况并非如此，如果我不能充分证实语句（命题）的意义，那么我就不能用语句来指任何东西。于是，语句也就没有任何意谓。

如果语句应被当做已证实的，那么为了确定语句的意义，我必须知道一确定的方法程序。在这里，会话用语比科学语言有大得多的摆动性。这里存在某种自由；这种自由意味着，我们的

① “甜的”没有数。我可以说：这种茶比那种茶甜。在这个陈述中我并没有考虑到数。

会话用语这种符号不能得到无歧义的定义。

[词总是摇摆在不同的意义之间，因此，何时能充分地证实一语句，是没有保障的。如果我们能一劳永逸地确定（词的）意义，那么我们也就可以为陈述的真理获得一个可靠的标准。]

有时证实是很困难的，比如“赛茨曾被选为市长”①。我究竟应如何着手去证实这一语句呢？正确的方法是否就是：我上街向别人探问？或者我去询问当时在场的人们？一种方法是从前面看问题，另一种是从后面看问题。或者我应通过阅读报纸来证实？

对于哲学观察者而言，我们语言中最陌生的是存在（Sein）与假象(Schein)的区分。

空转的轮子

一旦我转过身去，火炉就消失不见。（物不存在于感知间歇中。)如果“存在（Existenz）在经验意义（而不是形而上学意义）上使用，那么这一陈述就是一个空转的轮子。我们的语言是正常有序的，只要我们理解了它的句法，并认识空转的轮子。

“我只能回忆。”似乎存在其他途径,更确切说,记忆似乎并非我们据以进行创造的惟一源泉。

人们把记忆称为图像。我可以把图像与原型进行比较，但这并不是记（回）忆。对过去的体验向来就不像是遇见隔壁房间里的对象：眼下我虽然没有看见它们，我却可以走过去看它们。但我能走进去吗？

(“我不能感觉你的疼痛”)

我的身体的各部分服从于我的意志。这是一种经验。比

① 卡尔·赛茨在 1925 至 1934 年曾任维也纳市市长。