

# 第一章 前奏：隐喻之需

10……久受很高的尊崇，因为它是  
十指的数字，借此我们可以用来计算。

奥维德

两个世纪以前的一个夜晚，年轻诗人威廉·华兹华斯（W. Wordsworth）和一位朋友及一位牧人向导，准备攀登威尔士的斯诺登山（Snowdon），希望从这里看到日出。这是一个闷气而又温暖的夏夜，雾色低沉，空气湿润。从山脚的农舍开始，三人在浓雾中静静无语地向山顶攀去。诗人如平时写作时一样低着头。曙光虽然尚未到来，但诗人脚下的大地已经渐渐发白，随着脚步，越来越亮。还没等去思考为什么亮了，忽然间，诗人就虔诚地叫起来：“嘿！”，他抬起头，看到了一轮明月

光静静地悬在太空  
蔚蓝无云，在我的脚下  
一层灰白的雾海

诗人从山峰顶上看到脚下无边的蒸汽海洋直伸向大海，然而，这云海之上却是万里晴空。一轮满月照耀着苍穹。除了雾海中的波涛激动着，不远处的一个蓝色的深渊，呼啸的水声无

止无休，无数激流都同样地呼啸着。这一切似乎都充满在大  
地、海洋和满星的天空，然而，一切都是静静的。

当这些景象都已消失，诗人回想着他看到的東西，对他似  
乎是一个幻象，

这象征标志  
是一种壮丽的理智，它扮演  
它拥有，它所有的和所渴望的  
它本身的和将要成为的

月亮高悬在雾海之上，光耀在上，声响于下，暗暗的深渊  
和静静的天空——“在这里我看到了心灵的象征”诗人这样写  
着。诗人编织他的心灵的印象，表现月亮和水的各部分的关  
联，它们与人类想象力相似，又具有对真的思想和创造性的深  
刻影响。心灵的创造具有如此的权威，宣称他们甚至能够用惊  
奇来感染这些创造者，

像鹰一样用声音收起它的翅膀  
从苍穹的远方展示内心的平静

通过黑暗和寂静而努力攀登，诗人的旅程对于那些试图理  
解初次沉于湿雾中的感觉大概是人们都熟悉的：在过分宁静气  
氛中的不舒适，狭路上步行的沉重，攀登中孤独的暮色。本书  
承诺并希望能给出更多的感受，譬如：完成旅程时得到的喜  
悦；对那些一生中曾进行过这样旅行的人们给以更深刻和更广  
阔的视野；对构成心灵的象征力量和形式给以更多的暗示。

要讨论两种路程，各自具有曲折和变换的历程，或具有不

同的地图和休息的地方。这些路程就是音乐和数学，这两条路的要求是很相似的，这一点毫无疑问。但是，这是一个笼罩着神秘气氛的确定无疑的问题。两者之间无论对于音乐或数学的发展而言，它们的关联都不重要；对于这两种融和的实践者和创造者来说，数学和音乐之间的相关性也不重要，同时，对任何人它都是十分含糊不清的。这种关联可以简单到不需解释或讨论就可以接受，甚至不必弄清这两种学科是如何的互不匹配。为什么两者之间必须有联系呢？它们各自活动的共同点是什么呢？两者之间是否有意义上的、技术上的或观念上的共同之处呢？我们为什么要设想它们都有相同的目标呢？它们可以独立地显示相似的视野吗？假若它们相似的话，这仅仅因为它们在全人类的创造方法上都有相同之处吗？

音乐毕竟是非完形的或难以名状的：它随时随地变化它的组织和特征。它可以是结晶有序的或像雾一样无序的，情感的或夸张的。它是短暂瞬间的，当演奏时，音乐融化于记忆之中。数学则相反，是率直的，它从不改变它的性格，它似乎在空间和时间之上随时随地总是情绪高涨。音乐是处于事物的冲突和争辩之中的，演奏时使用芦笛或肠弦，通过铜管或竹筒，使用各种材料，天然的或其他种类的。数学则是首先由抽象构成的，甚至不需要铅笔和纸张，铅笔和纸张只记录思想，如同录音机录制音乐一样。

音乐和数学不同，它似乎是毫无用处的。一个没有音乐的世界仍会有食品、衣物、遮风蔽雨的住所以及各种各样的享受；此外，若是没有那种不太顺手的机械，设计复杂的乐器如钢琴或单簧管等等，从物质角度来看这个世界仍然和我们原来的世界没有什么不同。音乐的主要功能似乎是道士、魔术师或商业叫卖者的陪伴物。而数学则在世界的任何角落都有用处。

它可以用来绘制财产的状况图，建造潜水艇，预测空间的曲率，解决代数问题（“若两个人油漆一个屋子需要 3 小时，3 个人漆一间屋子需要几个小时？”），开发城市交通路线。没有数学的世界将与我们现在的世界完全不同。

音乐似乎是立足于情感的。我们常常说，音乐表达了悲伤、愤怒或文雅。音乐是灵感的，美学的，神圣的。数学则对于由证明一个定理所产生的感情冲动毫不在意。是否有人曾碰到过“悲伤”的定理，或展示一个“愤怒”的证明，或由于抽象的关于拓扑学的沉思而产生一种求爱心情呢？

数学家只关心真理，在他们闪烁的眼光中，真理在一代一代地增加分量。一个问题一代人没有解决会传到下一代去解决；使笛卡尔( Descartes )彻夜不眠的问题现在已经成为高等学校学生的家庭作业了。音乐则是另一回事。斯多克豪森的成功之路如何与巴赫相比？当我们听音乐时，我们听到了比音乐本身更多的东西了吗？音乐知识，假如存在的话，从一种文化到另一种文化是很难理解的，仅能从时间的变化中得到认可。譬如古希腊音乐的声音今天全然听不到了；格利高里圣咏( Gregorian Chant )似乎与古典奏鸣曲毫无关系。音乐从它的复杂性和神秘性来看更接近语言而不是数学，它是植根于独特的文化之中的。在纽约卡内基大厅演奏南海渔歌或在澳大利亚林中演奏贝多芬的钢琴奏鸣曲，你把演奏方式和内容相混合，事情就完全改变了。

相反，数学真理扎根于与音乐或任何艺术无关的土壤之中，它似乎与空间或时间毫无牵连。巴比伦人的计数体系的基础是 60 这个数（因而有了我们今天分、秒的计算），但是，它们达到了我们今天使用十进制计算一样的结果，而今天计算机的系统是二进制。天才的数学家斯瑞瓦萨·拉玛纽扬（Srinivasa Ramanujan）可以在印度的一个孤立的茅舍中从普通的教科书

中学习数学，然后把他辉煌的结果送到剑桥去，因为在一个国家中的数学和在另一个国家中的数学同样是真实的。数学似乎不受文化的影响或约束。是否可能用两个不同的主题来培养诗喻呢？绘画和音乐可能是较为相似的兄弟。数学与音乐之间存在着根本的区别，这些区别是：真与美，永恒与变化，科学与艺术。

但是，这个区别并不像开始思考问题时那样重要。我们需要回过头来考虑这种比较本身的概念，考虑我们对事物相似与不相似的思考方法。事物可能在很多方面都有区别，我们如何知道哪方面是重要的呢？一个人与一棵白菜相似，因为都需要空气，而与鲭鱼在选择居住处所方面却不相同；那么是否人就更像白菜而不像鲭鱼呢？当我们比较两类看起来不相同的事物时，我们常被一个问题之网缠住。这是一个关于意义和意图的网，关于我们是考虑重要性还是考虑为什么的网。

在开始讨论之前，我们需要理解对相同性意义的认识方法。我们在表示事物的时候，最显著的方法，联系最密切的是它们相同的字眼：当孩子学习语言时，他们学习概念，包含一个术语中的抽象内容。鼻子不是指一个特殊的鼻子，而是通指一切鼻子；当几乎所有区别特征如形状和鼻孔被人从叫做“脸”的物体上拿到一边的时候，即可以确认它为“鼻子”。一个玩具汽车被叫做“汽车”，因为它和一个真的汽车一样，甚至不必考虑大小、形状、设计或颜色。这些概念的学习和使用是在一种完全不自觉的方式中进行的。当作为一个联系进行比较时，立刻可以看出什么是重要的，什么是不重要的。譬如对于孩子来说，玩具汽车有没有车门，小座位甚至挡风玻璃等并不重要，重要的是有四个车轮、车顶或可以走动就行了。产生联想只需要一些关键的感觉，需要抽象概念。

当认同和关联刚刚产生时，当它们不再依赖于抽象和语言时，问题就变得更为复杂了。我们不再依赖于事先已证明了的关联所反应的文字了。比如，当我们要讨论汽车是如何与炸面包圈相似的时候，我们需要找出炸面包圈和汽车所共同的外表的形状，然后给这种特征一个另外的名称。若这个概念感到有些太一般化了的时候，那问题就更难了。在什么方面，我们可以从刘易斯·卡诺尔（Lewis Carroll）那里得到暗示，一只大渡鸦和一个写字台可以相似？在抽象概念之间产生一个抽象，意味着必须对各自的抽象本身有非常深入的理解，然后再对它们彼此之间的关系做深入的理解。因此，在比较诸如显然不相同的数学与音乐的时候，我们必须考虑它们各自的主要方面。我们必须从数学和音乐中抽去它们的习惯和利害关系，理解它们的内在事物，然后找出任何彼此共同具有的东西。我们需要界定这样的数学家对一个世界和另一个世界所做出的标识。

任何时候我们都要做这种比较，甚至对那些对象或概念最初看起来似乎没有任何共同之处的时候也是如此。比如，我们知道渡鸦有两只脚而写字台没有脚，渡鸦是活的而写字台不是，渡鸦能飞而写字台不能飞。但是我们也可以从另外一个角度来看渡鸦和写字台。我们看到渡鸦的脚站在地上，翅膀则在空中，而这种天然的稳定性似乎是模仿人造的写字台，即在压力下既不倾斜也不倒下。我们甚至可以认为写字台的功能是由制造者决定的，也可以带有宗教意味地认为渡鸦也是如此。我们可以拿渡鸦是黑色的并能预知未来的象征和联想的意义与一位作家在桌子上起草他的作品做一个联系。假如我们的兴趣是在某一方面的话，渡鸦真有可能像一个写字台。这依赖于我们对它们的来龙去脉的考察，我们比较它们时的方位，以及我们对哪一方面才重要的考察。

对于数学和音乐来说也完全一样。它们之间的相互联系能够引导我们进入深层次的思考，这种思考若基于只从单一学科考虑则很难进行。在这种联系的基础之上，我们对数学和音乐的理解发生了变化。我们甚至开始看到，我们借以对它们推理的进程与在两者中间起作用的进程具有一种神秘的类似——但那却是对可能隐藏在一条磕磕绊绊的路径尽头的东西的期待。开头并不是艺术与科学、美与真的大概的类目，而是细节，是态度与方法，是人类的行为。

“从事数学”或“搞音乐”到底是什么意思呢？数学并不像物理学或生物学那样揭示物质世界的构造，它完全是另一回事。但是，它到底是什么呢？这个简单的问题已经困扰了数学哲学家们数千年。即使数学家一般也会像我们大多数人在日常生活中一样愿意躲避这样的数学问题。数学家解决难题、教授学生，像其他行业的人一样地工作。音乐家也一样，热衷于学习保留曲目、创作新的作品、教学生，但却很少走近音乐本身是什么或它在文化中有什么地位这样的一些问题。音乐对于音乐家来说就像数学对于数学家：它是表现为一种我们要对付和接触的神秘，这就是为什么音乐哲学家总是那么淳朴的原因。不能解释的东西在静静中流过。

现在让我们来看一下“搞”音乐的最基本的经验。当我们开始学习在钢琴上弹奏巴赫的 D# 小赋格曲（从易调节练习键盘的第一册开始）的时候，音乐好像使人挫伤地复杂难懂。这里有一个十分简单的主题：以一个向上跳跃开始，但它在感觉上更像一个展开而不像一个跳跃。它应该听上去好像是第二个音符从第一个音符中生长出来，既与它相逆又与它相连。这个主题然后带着悲伤的抚爱转过身来，好像吸一口气，哀叹地转

回身去，优雅地回荡着它自己的开头，一步一步，走到它的起点。这个姿态的两部分几乎具有不同的形象——一个远足和一个回返——但这居高临下的精神是忧郁的、犹疑的；当这个主题再次进入另一个赋格曲的时候，再一次的陈述便从它自己徘徊的叹息中升腾而起。

学着弹奏这个赋格曲的问题不仅在于训练手指去创造出这个声部，让它就好像是自己产生的一样；它要使每一个声部都产生一个天衣无缝的音乐线，而另外两条音乐线又在同时进行着。经过练习，这可以做到，手指自己会在音符上掠过，从一个音符滑向另一个音符，始终保持声部的完整。困难的是要同时倾听这些声部，去感受什么时候一个声部随着所有的音符加速而进入另一个声部节拍之中；正确的弹奏需要能够将注意力集中在所有这些声部之上，这样，在任何时候，这些声部中每一个声部都能跟得上，而其他声部的整体又未受影响。保证哪个声部都不会被怠慢的一个技巧，是在弹其他声部的时候唱另一个声部。这不仅是一个学习倾听的问题，而且也是一个理解、参与的问题；这样，不同的声音层面才能够成为一个完整的音响效果。这个主题需要作为一个单一的姿态被人们感受到，而不是作为一个音符和音程的结合，它的结合和转变的陈述需要捆在一起，成为一个戏剧性的沉思冥想，直到整个赋格曲可以似乎一口气呼出，它的企图变成自然力量的表现，忧郁的主题逐渐地变得宏伟起来。

学习一首曲子包含体力的、听觉的和智力的工作，三者互相培育。数学可以不需要体力和听力，但智力的工作是很艰难的。当这些练习赋格曲的劳累取得进步的时候，我开始了一个更大音程的练习。它不仅有一个具有确定形象的单个主题，而且有许多分散的声部，每个声部本身又极为复杂。这些声部有



名字。它们就是研究的原则和领域：它们被称作解析、代数、矩阵理论和拓扑学。各自似乎又都建立起了自己的规律，然后无论走到哪里都遵循这些规律，派生出弧线理论或数的理论，或面积的理论，或数程体的理论，它们根本没有明确的意义。我的理解之劳苦在这里被割裂开来，例如，试图理解在一个弧的状态下丈量土地的定理是怎样与一个概率连在一起的，然后再试着理解为什么我们能从数程体集中选出个体数程体的概念总是一个数学概念——实际上，这在整个数学研究领域是一个基本的事实。

直到后来，我甚至都不知道有什么能够将这些思想统一起来。我是在解决问题，试图理解细节。这就像训练我的手指去弹出正确的音符，学习规律一样——如此而已。但这之后，当一个钢琴家逐渐将模式注入到手指和头脑中去的时候，一处一处，断断续续地，在这些一个一个的领域中，将会出现一个时刻，这时，似乎不同的思想将开始连接起来，模式随之出现。突然，之前似乎并不存在的关联出现了，抽象系统似乎互相关照，或至少在分道扬镳之前互相交错。心灵像耳朵一样获得了自由。

这些启示的时刻——发现从前不存在的关系，倾听从前不存在的联系——对于所有数学和音乐的学生来说都是熟悉的，但很难说学到了什么或是怎样学习的。这个启示也似乎与生活经验关系甚小。在两者的原则中，一个人理解的范围似乎主要取决于“天赋”——气质和顿悟的天赋，协调概念的能力（以及在音乐中，协调手指、呼吸与概念的能力）。“神童”常见于音乐、数学和其他像象棋这样的领域——主要依靠对一个似乎是封闭的抽象世界的顿悟而不是一般世界的经验。例如，费利克斯·门德尔松（Felix Mendelssohn）在17岁时就创作出了十二

部交响曲和著名的《仲夏夜之梦序曲》。莫扎特的能力使他在更早的年龄就由他雄心勃勃的父亲安排在欧洲各国巡回演出了。当然，尽管少不得能力，音乐家们仍需要经验去完善成伟大的艺术家；但数学家却不需要这些经验的完善。数学家卡尔·弗里德里希·高斯（Carl Friedrich Gauss）3岁之前就纠正过他父亲计算的错误，并戏谑地说他在会说话之前就懂得了算术。正如数学家 G·H·哈代说的那样，数学是“年轻人的游戏”（几乎没有几个女人能走进这个游戏）。哈代指出，伽罗瓦（Galois）21岁去世，阿贝尔（Abel）27岁，拉玛纽扬（Ramanujan）33岁，黎曼（Riemann）40岁——他们都是数学历史中取得了几乎是不朽成绩的人。

这并不是忽视音乐和数学终生从业者们天分：在真正梦想家的世界中，他们拥有自己的地位。在音乐中，我们就是这样看待晚年贝多芬的，他像牛顿一样孤独地在思想的陌生海洋中航行。爱因斯坦头上的光环预告了他超脱尘俗的权威——作为数学家和先知——与刻下他的名字的理论同样的突出。帕勒斯特里那（Palestrina）、巴赫、瓦格那——这些名字是音乐家们为之敬畏的，就像数学家在高斯、康托尔（Cantor）、凡·纽曼（von Neumann）这些名字中发现的敬畏一样。关于他们成就的一切风度的故事流传开来：钢琴家可以一眼尽览键盘上方的管弦乐队总谱，指挥家可以在记录下来的不和谐音调中听出错误的音符，作曲家不用耳朵就可以倾听，数学家轻快地解决同行们困惑数月的难题或看出所问问题问的就不对。这一切都不仅是奇迹。在数学和音乐领域，天分的拥有者是神坛上的一员，他们的光辉从其他伟大艺术家的成就中脱颖而出，其他人的努力都用在了一般的生活中。这些上帝的选民经常既受赞美又遭诅咒：当被上帝触摸之后，他们便不适合平常的生活

——像贝多芬——常在社会上显得愚笨。

数学和音乐都这么抽象，它们可能似乎重精神于来世，但又都具有非凡的现世力量——音乐在听众身上拥有效果的力量，数学在世界上拥有应用的力量。两种活动都只为上帝的选民所完全理解，它们被赋予所需的想象的热情，它们又扩展了所需要的努力，但在它们的应用和执行过程中，这两种活动又为一切人所明白。谈论数学家和音乐家的“感召”并非不和时宜。这个现象不是偶然具有宗教性的；数学和音乐以至于仪式和启迪都有着内在的关系；它们也与神秘和危险有关系。

因为神秘与实践的结合，来世与现世的结合，普遍和特殊的结合，音乐和数学几乎从古代就拥有了力量。早期的历史是粗略的，但掌握了这些秘密的人的力量是可以为人所见的。希罗多德写道：“它在地上和天堂中扩展。几何学在埃及产生于人们对一年一度的尼罗河水泛滥后丈量土地的需要”；亚里士多德则认为：埃及的数学产生于祭司这样的有闲阶层的思索。亚里士多德可能将希腊的经验加在了更早的文化之上，因为数学理论是在古希腊第一次走向成熟的，出现超越实用的地位。然而，在知识分子玩弄数字和观察天象、丈量土地、建造房屋或像《圣经》中讲的那样建造神庙之间并没有截然的界限。

音乐就其本性来说很可能为所有人所拥有，甚至存在于最初级的水平上，但它的体系和理性的开发却一定限于祭司阶层，在他们中间，音乐成为仪式的一部分——这样，在早期的宇宙观中也就占有了一个特殊的地位。事实上，在数学的实践和音乐的实践中的专门知识的需要可能会给两者以很高的地位。然后，像现在一样，会有许多知识的等级在祭司的理解中达到顶峰：当然，中世纪天主教堂的音乐也是如此。毕达哥拉斯的等级是建立在奥秘知识基础上的知识中最为著名的。它是

公社性的、秘密的，它赞同心灵转移的教义；据说毕达哥拉斯本人创造了哲学和数学这两个希腊词汇。

数学和音乐的神秘就仪式特征来说甚至在今天都是很明显的，这在我们选出任何一个乐谱或打开任何一个数学读本的时候都会看到。在这两种情况下，我们都要面对不同于我们口语标符的音符和文字的符号。数学中包含有混合了无法简单地解释的符号的普通语言的词汇——像（或  $\pi$  或？这样的标符——还有更为难解的结合：

$$|f(0)| \prod_{n=1}^{n(r)} \frac{r}{|\alpha_n|} = \exp \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \log |f(re^{i\theta})| d\theta \right\}$$

结果成了一种，如果没有引导的话，既不能读也不能理解的语言。例如，我们怎样从一段数学文字中理解句中的这个句子呢：

让  $\Gamma^*$  为一个似紧 Hausdorff 距离  $X$  上系数的细小前束的一个非负共链综。假设一些整数  $0 \leq m < n$ ,  $H^q(\Gamma^*)$  轨迹为零,  $q < m$  并  $m < q < n$ 。那么就有函数同型：

$$H^{q-m}(X; H^m(\Gamma^*)) \approx H^q(\Gamma^*(x)) \quad q < n$$

且一个函数单型： $H^{q-m}(X; H^m(\Gamma^*)) \rightarrow H^n(\Gamma^*(x))$ 。

我们可以认出许多文字，看到也许与数字相关的参照系，另一些文字也一定在数学中有特殊的定义，但是，这象征性的表达却是上文许多页推理的浓缩。阅读数学根本不是一个线性的直来直去的经验；即使是最有成就的数学家的已经审阅过的高级材料也很少能在书页上从左向右阅读。即使是一位艺术高手，理解这样的文字也需要交叉参照、停顿、细看和重读。意思很少是完全明白的，因为每一个符号或文字都代表一个概念和参照系的高度的浓缩。当然，阅读很平常的语言也很复杂，

但阅读数学是一种不同的复杂程序，它包含一种向写作过程思考的回归。

当我们看一个音乐乐谱的时候，我们也远离普通语言。意大利和德国的读者会不时地发现一些熟悉的文字（*allegro*, *klagend*），但是，不像在一般的文字中那样，在音乐中有一种精巧的空间感被应用并界定：垂直的空间被一行行五线谱所分割，五线谱上又排列着黑色的标符，横的空间为穿过五线谱的竖线所划分。

这里，阅读也被一些东西控制着，但这些东西不是符号的纯连接；它是由标在文字（*allegro con brio*）开始的速度和常常为表示节拍的（ $\text{♩} = 108$ ）东西所限定。我们要根据时间的进程而“阅读”，同时想象着声音。它也不是纯线性的：它包含了竖直维度和平行线性的交叉，曲折地表现为一种音乐空间，后者表现为音乐节拍的行进。

数学文字和音乐文字都不好翻译。当一般的文字自己完全可以结束的时候，数学和音乐这两种文字却都不会结束。它们是思考和倾听的记录。音乐文字是高度压缩了的，要理解它必须给它解压缩，将它翻译成它诞生时的思考。音乐文字只是一种近似，一种直接指向声音本身的符号。数学文字和音乐文字都不是正常的指向。两者都指向与在其中普通语言如鱼得水的世界完全不同的世界。

但是，各自也都有一个为表现似乎隐藏在普通语言之后的思想而产生的符号中的天赋。直到零作为一个位置的占有者发展起来，算术的面貌一直不为人们注意；有了零，符号的自我操纵就可以提供展示。我们知道一些关于 100 和 10 的和写作 110 的深远意义，如果把它写成罗马数字 CX，我们就不会知道这个结果。在高级数学当中，连接的第一步是创立一个符号



贝多芬第五交响曲的开头

来赋予概念以结构和意义。事实上，有时在数学中会因一个难题而困惑，这时，符号中的类似就会成为深化关系的第一条线索。

同样，音乐五线谱不仅创造了一种西方音乐在其中诞生的结构，而且也展示出超出声音的东西。它指给人们各种因素是如何互相处于特定关系之中的，声音是如何创造空间的。它展示了音高的图画式的表现，绘出了高音和低音；它告诉人们，不同的声部是互相衬托和交叉的；它连接起音高和节拍的各个方面，并给节奏以形象。这些符号允许和弦和多声部产生；它影响了它意欲默默服务的艺术进程。

这些文字的力量是艺术力量的一部分；我们利用这一个去发现另一个，这些文字对于它们各自的艺术都有一个离奇的关系，文字中的一种相似可以展示一种实际的相似。而且创作这些文字的行为几乎不能从完成这些艺术的行为中分离出来。这些文字呈现出它们自身的生命。它们因充满了含义和弦外之音而成为偶像。一个漂浮的第八音符或者一个书写的积分符号代表着这种艺术本身。

这两种文字也展示了这两种艺术的形象，因为表现和相似是音乐和数学的心脏。这是它们仪式形式的一个原因。魔力和仪式常需要实施来影响它物，影响远处事物的行动。一般来说，这种影响是通过某种相似创造的。这种相似可以是一种事物的形象特征——一只蜡烛可以代表的一般力量要超出它的热能和光亮。这种相似也可以通过一个“属于”或连接与另一个物体的物理的联系而产生——就好像皇冠可以赋予皇权一样。魔力和仪式需要隐喻和转喻；它们需要诗人的想象。

例如，一些中世纪犹太神话相信，我们可以创造一个与人体相像的神性的隐喻图表；这个人体的每一部分都设计一个神性的标志。这个隐喻也说明，在一个人体和各个部分与神的“身体”各个部分之间存在一种联系；这一部分的行动可以在另一部分上产生影响。这样，隐喻就变成了文字。神的“胳膊”可以通过使用的胳膊而被神秘地影响。就像一位神秘主义者说的那样：“对我们来说是隐喻，但对他来说不是。”祈祷——包括语言的和文字的两种形式——也是通过相似产生效力的。有一个体系叫 *gematria*，它说希伯来字母与宇宙的基本性质相关联。每一个字母都建立起一个数字的价值，这样就在似乎毫无联系的词汇之中建立起神秘的连接：如果词汇的字母加到同样的数量，它就会在词汇之间，在词汇所代表的物体之间

揭示出一种深层的联系。

这与我们早些时候关于在似乎不相关的物体中找到相似的思想有关。在宗教背景上将现世与永恒结合在一起，这相似是祈祷和仪式的基础。因为音乐和数学好像参与了两个世界，像犹太神秘的 *gematria* 一样，它们已经习惯于控制和连接两个世界——从音乐内在世界的倾听者到上天星宿的王国。这个天才既是先知又是祭司，因为他可以将音乐和数学中的隐秘联系展示出来，就像神秘图表一样展示外在环境的隐秘联系。

古希腊人对此相当清楚。历史可以与毕达哥拉斯派的传说一同浮现，但他们的理论却有着非凡的影响。数学由数的神秘相伴随，每一个整数都有一个超感觉的意义：数字 7 与女神雅典娜相关，5 代表婚姻，因为它是第一个偶数与第一个由第一个偶数加一的奇数的结合。亚里士多德指出，毕达哥拉斯的理论把数的原则当作支配一切的原则。这符合有关音乐的神秘主义，它本身就与数字和情感 and 指挥生活的特征相关联。这些深层的关系也被其他思想家所领悟。柏拉图拒绝心灵无欲望状态的音乐风格——例如哀怨的或柔弱的——在他的《理想国》中，只赞扬多里安人的和弗里吉亚人的调式，这种调式表现勇气和节制。亚里士多德在他的《政治学》中明确表示：节奏和旋律是道德品质的声音转换和表现。正如毕达哥拉斯的论说主张的一样，这些音乐与心灵状态的连接也是与宇宙的和谐相关的。

2 000 年之后，约翰尼斯·开普勒在他的关于天体运动规律的著作中明确提出了数学探索的宗教式的主张：“骰子已经投出；我也写完了我的书；它可能会被现代人阅读或者它的读者是后世人，它并不在意；它会等待一位读者，因为上帝等待他垂训的解释者已经等了 6 000 年。”在 17 世纪，格特佛里德·莱布尼兹



(Gottfried Leibniz)在他 20 岁的时候就认为他能够创造“一个一般的方法，其中所有真理推理都将简化成一种计算。同时，它又将是一种宇宙语言或文字，但与所有迄今为止的具体化的语言文字都完全不同；因为其中的符号甚至词汇将指导推理。”这样的一种语言将展现相似的基础；它将是一种包含有展示的文字，一切都是真理，没有错误。它将是上帝手稿的语言。

对音乐的要求是一样的，它的力量向内到达心灵，向外到达天堂。索尔兹伯里的约翰，1176 到 1178 年沙特尔主教说过：“心灵据说由音乐的和音构成”，而通过音乐调和规律，“天体协调了，宇宙和人类得到了控制。”400 年之后，开普勒宣称，他的定律揭示了一个天体的音乐——当行星走过宇宙的时候它们创造了音调。

在与此相关的陈述中，音乐家和数学家经常好像互换角色。吉恩-菲力普·拉莫恩(Jean-Philippe Rameau)于 1722 年通过赞美数学开始他论述和谐的经典论文（“我必须承认，我的思想只有通过数学的帮助才变得清晰，光明取代模糊”）。伽俐略在 17 世纪曾经思考过“为什么一些音调的结合要比另一些音调的结合好听。”18 世纪数学家里昂哈德·欧拉写过论述和音的一篇文章。现代解析学的发展——在微积分的抽象的基础上扩展的数学领域——是部分地受到企图描述颤动琴弦的运动启示的。20 世纪的音乐可以看到音乐语言的一个迅速的数学化，伴随着集合理论的符咒，马尔科夫链，不规则碎片形及各式各样似乎与数学学说的子集无关的全体内容。这些关系的神圣性常被认为是理所当然的。克劳德·列维·斯特劳斯(Claude Levi-Strauss)的神话结构分析用了数学词汇和技巧，他在《生的和熟的》一文中写道：“音乐的创造者是可与神相比的人，音乐本身是人的科学的最高神话，一个所有各色原则都要碰到的神话。