
黄冈精典讲练
初一代数下册

第一章

代数初步知识

本章概述

本章主要内容是关于代数式及其简单应用的知识,包括字母表示数、列代数式、求代数式的值、公式与简易方程等,是以小学数学中的代数知识为基础的,是对小学数学中的代数知识比较系统的归纳与复习,同时又是为初中代数后续学习做准备.学好本章内容是学习初中代数知识的一个良好开端.

本章知识的重点是列代数式,难点是列代数式和列方程解应用题.用字母表示数是代数的一个重要特征.利用代数方法解决实际问题的前提就是把问题中的数量关系用代数式表示出来,因此列代数式不仅是本章的重、难点,而且在整个初中代数学习中都起着重要作用.

学习本章的关键是基本数量关系的语言表述与代数式之间的互化.即给出一个代数式,要能说出它所表示的数量关系;反过来,已知问题中的数量关系,要用代数式表示出来.

1.1 代数式

教材精讲

一、用字母表示数的意义

用字母表示数可以把现实生活中大量的数量关系简明地表示出来,使问题变得既准确,又简单明了.

二、代数式的意义

使 $4a$ 、 $a+b$ 、 $\frac{s}{t}$ 、 a^2 等

这样用运算符号把数或表示数的字母连接而成的式子.

名师精析

一、方法指导

1. 用字母可以表示我们已经学过的和今后要学到的任何一个数,也可以表示带有运算符号的式子.

2. 在同一个问题中,不同的对象或不同的数量关系,应用不同的字母表示,以免混淆.

3. 代数式中除含有数、字母和运算符号外,还可以有括号,因为有时需要指明运算顺序.这里的运算符号是指加、减、乘、除、乘方、开方.开方和乘方是今后要学习的两种运算.同时需要注意的是单个的数字或字母也是代数式.

4. 代数式中不含有“=”、“<”、“>”、“≠”符

三、代数式的书写格式

1. 在代数式中出现的乘号,通常简写作“ $\cdot$ ”或者省略不写.

2. 数字与字母相乘时,数字应写在字母的前面.

3. 带分数与字母相乘时,应把带分数化成假分数与字母相乘.

4. 在代数式中出现除法运算时,应按分数的写法来写.

四、用代数式表示简单的数量关系

用代数式表示实际问题中的数量关系,首先要认真审题,弄清问题中的各数量之间的关系和运算顺序,然后规范地写出代数式.

号,即式子中含有以上表示相等或不等关系符号的都不是代数式.

二、解难释疑

1. 用代数式表示数量关系,就是将表示基本的数量关系的文字语言转化为符号语言,关键是分析清楚问题中包含的数量关系,理清问题的各数量之间的运算顺序,并按照代数式的书写格式要求写出代数式.

2. 代数式的读法没有统一规定,可按如下三种方式读:(1)按其意义读;(2)按其运算顺序读;(3)按其运算结果读.虽然代数式的读法有多种,但无论哪种都应以能简明地体现代数式中的数量关系及运算顺序,而且不致引起误解为原则.

三、实际应用

表示实际问题中数量关系的代数式,一般要在代数式后面带上单位,当代数式属于乘积的形式,只须直接把单位名称写在代数式的后面即可.而当代数式中含有和、差关系时,应先将代数式添上括号,再在其后写上单位名称.

中考在线

一、中考要求

本节内容在中考命题中常以填空题或选择题的形式出现,主要考查考生对字母表示数的理解,尤以增长率问题、工程问题居多,近年来在探索性命题中出现频率较高,是新型的热点题型之一.

二、考题举例

【例1】(2000,山西省)

下列各式中,符合代数式书写规定的是 ()

- A. $(a+b) \div c$ B. $a-b$

新题展示

【例1】随着通讯市场竞争的日益激烈,某通讯公司的手机市话收费标准按原标准每分钟降低了 a 元后,再次下调 25%,现在的收费标准是每分钟 b 元,则原收费标准每分钟为 _____.

A. $(\frac{5}{4}b-a)$ 元 B. $(\frac{5}{4}b+a)$ 元

C. $(\frac{3}{4}b+a)$ 元 D. $(\frac{4}{3}b+a)$ 元

【答案】 D

【解析】 本题应先求第二次下调前的收费标准 $b \div (1-25\%) = \frac{4}{3}b$ 元,从而求出原收费

厘米

C. $1\frac{1}{3}x$

D. $\frac{4}{3}x$

【答案】 D.

【点拨】 根据代数式的书写格式的要求可知:A中的除法应换成分数线,并省略括号,B中的代数式应加括号,C中带分数与字母相乘应将带分数写成假分数,D符合书写要求.

【例2】 填空

(1)(2002,山西省)某公司员工,月工资由 m 元增长了 10% 后达到 _____ 元.

(2)(2003,江西省)一件夹克标价为 a 元,现按标价的 7 折出售,则售价用代数式表示为: _____ 元.

【答案】 (1) $(1+10\%)m$ (2) $70\%a$

【点拨】 (1)是增长率问题,增长后的工资应为原工资与净增工资的和;(2)是售价问题,打折是后来价格是原价格的百分之几,如打 n 折,指后来价格是原来价格为 $10n\%$.

【例3】 (2003,江苏省)

观察下列等式,你会发现什么规律:

$$1 \times 3 + 1 = 2^2;$$

$$2 \times 4 + 1 = 3^2;$$

$$3 \times 5 + 1 = 4^2;$$

$$4 \times 6 + 1 = 5^2;$$

.....

标准为 $(\frac{4}{3}b+a)$ 元.

【例2】 某商品先降价 20%,再提价 20% 后的售价为 a 元,则原价为 _____ 元.

【答案】 $\frac{25}{24}a$.

【解析】 例1、例2 两题都是经济类的问题,是近年中考的热点题型,也是实用数学的体现.本题关键要弄清两次调价的基数不同.若设原价为 x 元,则第一次降价 20% 后的售价为 $(1-20\%) \cdot x$ 元,即 $\frac{4}{5}x$ 元,这是第二次调价的基数,即第二次提价 20% 后的售价应为 $(1+20\%) \cdot \frac{4}{5}x = \frac{24}{25}x$ 元,因为最后的售价为 a

元,所以 $\frac{24}{25}x = a, \therefore x = \frac{25}{24}a$ 元.

【例3】 如图 1-1-1,把一个长、宽分别为 a, b 的长方形铁片在四角各剪去一个边长为 m 的正方形 ($2m < b < a$),然后做成一个无盖的长方体盒子,用代数式表示它的容积.

【答案】 $m(a-2m)(b-2m)$

【解析】 根据长方体的体积公式 $V = \text{底面积} \times \text{高}$,欲求长方体的体积,需知长方体的底面的长和宽,以及长方体的高,如图 1-1-1 中虚线所围成的长方形即为做成的长方体的底面,它的长为 $(a-2m)$,宽为 $(b-2m)$,由做法可知盒子的高为 m ,故盒子的体积为, $m(a-2m)(b-2m)$.

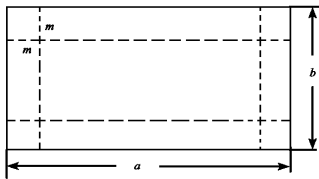


图 1-1-1

将你发现的规律用仅含字母 n (n 为正整数) 的等式表示出来:

【答案】 $n(n+2)+1=(n+1)^2$

【点拨】 这是一道探索猜想题,要求考生根据已给出的规律,猜想出一般的结论,左边是相邻两奇数(或偶数)的乘积与1的和,右边是左边两数之间的这个数的平方.

【例4】 如图 1—1—2, 搭一个正方形需 4 根火柴.

(1) 按图 1—1—2 的方式搭 2 个正方形需要 _____ 根火柴, 搭 3 个正方形需要 _____ 根火柴;

(2) 搭 10 个这样的正方形需要 _____ 根火柴;

(3) 搭 n 个这样的正方形需要 _____ 根火柴.

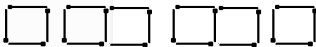


图 1—1—2

【答案】 (1) 7; 10 (2) 31 (3) $3n+1$

【解析】 根据其排列规则,除第一个正方形外,每增加一个正方形则增加 3 根火柴,或分别计算横行和竖列所用火柴的根数.

心得体会

通过对本节知识的学习,你认为初中代数与小学算术的区别是什么?

实力演练

一、选择题

※1. 在式子 $a, 4x + \frac{3y}{4}, \frac{y}{5}, 0, s=vt, x^2, a+b=b+$

$a, m^3 + n^3$ 中,代数式有 ()

A. 5 个 B. 6 个 C. 7 个 D. 8 个

※2. 代数式 $\frac{(a+b)^2}{c}$ 的意义是 ()

A. a 与 b 的平方和除 c 的商

B. a 与 b 的平方和除以 c 的商

C. a 与 b 的和的平方除 c 的商

D. a 与 b 的和的平方除以 c 的商

※3. 下列各组两个代数式的意义相同的是 ()

A. $\frac{1}{a}$ 与 $\frac{1}{b}$

B. $\frac{a+1}{3}$ 与 $\frac{a}{3} + 1$

指点迷津

← 运用代数式的意义解答.

← 根据代数式的读法判断.

← 光读出各代数式,再根据其意义判断.

C. $ab-1$ 与 $a(b-1)$ D. $a-b+c$ 与 $a+c-b$ ※ 4. 代数式 $\frac{2}{a-3}$ 中的字母 a ()

A. 可取任意数

B. 不等于 3

C. 不等于 0

D. 不能确定

※ 5. 小亮以一节火车的第 m 节车厢数起,一直数到第 n 节车厢($n>m$),他数过的车厢节数是 ()A. $m+n$ B. $n-m$ C. $n-m-1$ D. $n-m+1$

二、填空题

※ 6. a 千克商品的售价为 x 元,8 千克商品的售价是_____元.※ 7. 长方形土地的面积为 100 平方米,长为 a 米,则宽为_____米,周长为_____米.※ 8. 某商品在进价的基础上,加上 20% 的利润后作为价格,若优惠 10% 后的价格为 a 元,则进价是_____元.※ 9. 有一大捆粗细均匀的电线,现要确定其长度的值,从中先取出 1 米长的电线,称出它的质量为 a ,再称其余的电线的总质量为 b ,则这捆电线的总长度为_____米.※ 10. 张大伯从报社以每份 0.4 元的价格购进了 a 份报纸,以每份 0.5 元的价格出售了 b 份,剩余的以每份 0.2 元的价格退回报社,则张大伯的卖报收入为_____元.

※ 11. 学校阅览室有能坐 4 人的方桌,如果多于 4 人,就把方桌拼成一行,2 张方桌拼成一行能坐 6 人,如图 1-1-3 所示:按照这种规律填写下表的空格:

排成一行的桌子数	1	2	3		n
人数	4	6			

←分母中含有字母,应使分母不为零.

←数过的车厢节数包含了首尾两数.

←先计算单价.

←根据面积公式及周长公式解答.

←注意其基数不相同.

←注意题目中是求电线的总长度.

←用卖出的报纸的利润—退转报纸的亏损部分.

←通过特殊到一般的规律进行归纳.



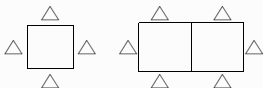


图 1—1—3

- * 12. 回收废纸用于造纸可以节约木材,据专家估计,每回收 1 吨废纸可节约 3 立方米木材,那么回收 a 吨废纸可以节约_____立方米木材.

- * 13. 观察下列等式:

$$2^2 = 1 \times (1+2) + 1; \quad 3^2 = 2 \times (2+2) + 1;$$

$$4^2 = 3 \times (3+2) + 1; \quad 5^2 = 4 \times (4+2) + 1;$$

.....

则第 n 个等式用 n 表示为_____.

三、解答题

- * 14. 股民王师傅将他持有的两支股票均以 n 元卖出,以买价计算,其中一支获利 40%,另一支股票亏损 20%,问王师傅是亏损,还是盈利?

- * 15. 某市为了鼓励市民节约用水,制定了如下收费标准:每月用户用水不超过 15 立方米,则每立方米按 a 元收费;若超过 15 立方米,则超过部分每立方米按 $2a$ 元收费,小明家本月用水 35 立方米,应缴水费多少元?

- * 16. 一个三位数用 m 表示,一个两位数用 n 表示,把 m 放在 n 的左边,组成一个五位数,用 m, n 的代数式表示这个五位数是_____.

四、探究题

17. (※※※) 怎样的两个数,它们的和等于它们的积呢?你大概马上就会想到 $2+2=2 \times 2$,其实这样的两个数还有很多,例如: $3+\frac{3}{2}=3 \times \frac{3}{2}$.

(1) 你能再写出一些这样的两个数吗?你发现了什么规律?

(2) 你能否提出一些类似的问题?在你提出的问题中选择一个问题进行探究.

← 直接计算.

← 光寻求变数与不变数,再寻求变数的变化规律.

← 分别计算两支股票的成本,再计算利润.

← 分段收费则分段计算水费,再累总.

← 五位数用 m, n 表示时注意空位上的数字零.

← 先探求其具体的数字,然后根据其规律用字母表示.

1.2 列代数式

教材精讲

一、列代数式

在解决实际问题时,把问题中与数量有关的词语,用含有数、字母和运算符号的式子表示出来,就是列代数式。

二、列代数式的实质就是将文字语言转化成符号语言。

名师精析

一、方法指导

列代数式一要认真审题,仔细分析问题中基本术语的含义;二是要弄清题中数量关系的运算顺序;三是规范书写代数式。

二、解难释疑

1. 抓住问题中的关键性词语,如“大”、“小”、“多”、“少”、“和”、“差”、“积”、“分”等词语对应的运算。

2. 理清运算顺序,正确使用表示运算顺序的括号。

三、实际应用

对层次较多的问题,用“浓缩原题,分段处理、最后组装”的方式来处理。

中考在线

一、中考要求

本节内容在中考命题中常用填空题考察考生对代数式的理解,会列一些实际问题,特别是税率问题、增长率问题。

二、考题举例

【例 1】(2003·哈尔滨)抗“非典期间,个别商贩将原来每桶 a 元的过氧乙酸消毒液提高 20% 后出售,市政府及时来采取措施,使每桶价格在涨价后下降 15%,那么现在每桶的价格是_____元。

【答案】 $1.02a$

新题展示

【例 1】已知 A 、 B 两地相距 s km,甲、乙两人的速度分别是 a km/h、 b km/h,若甲从 A 地、乙从 B 地同时出发,相向而行,那么到他们相遇时,所用的时间是_____h。

【答案】 $\frac{s}{a+b}$

【解析】本题属于行程问题中的相遇问题,根据其基本关系式:甲、乙两人的路程和等于总路程。设所用的时间为 x h,则 $S = ax + bx$, $\therefore x = \frac{s}{a+b}$ 。

【例 2】为鼓励节约用电,某地对用户用电收费标准做如下规定:如果每月每户用电不超过 100 度,那么每度按 a 元收费;

【点拨】 这是售价问题,也是增长率问题,第一次涨价后价格应为 $(1+20\%)a=1.2a$,第二次降价是在涨价后,因此它是以 $1.2a$ 元为基数的,故降价后的价格应为 $1.2a \times (1-85\%)=1.02a$.

【例 2】 (2003·长沙市)小李家住房的结构如图 2—1—1 所示,小李打算把卧室和客厅铺上木地板,请你帮他算一算,他至少需要买多少平方米的木地板:()

- A. $12xy$ B. $10xy$
C. $8xy$ D. $6xy$

【答案】 A

【点拨】 小李需购买的木块板的数量应是客厅的面积与卧室的面积和,即 $2x \cdot 4y + 2x \cdot 2y = 12xy$.

【例 3】 (2002·大连市)观察下列数表:

1	2	3	4		第一行
2	3	4	5		第二行
3	4	5	6		第三行
4	5	6	7		第四行
...	...	...	...		
第	第	第	第		
一	二	三	四		
列	列	列	列		

根据数表所反映的规律,猜想第 6 行第 6 列的交叉点上的数应为 _____,第 n 行第 n 列的交叉点上的数应为 _____ (用含有正整数 n 的式子表示)

【答案】 $11; 2n-1$.

如果超过 100 度,那么超过的部分每度加倍收费,某户居民在一个月內用电 180 度,在这个月应缴电费()

- A. $180a$ 元 B. $260a$ 元
C. $280a$ 元 D. $360a$ 元

【答案】 B

【解析】 该居民在一个月內用电 180 度,显然超过 100 度,必须分两部分计算电费,即 100 度按每度 a 元计算,超过的 80 度按每度 $2a$ 元计算. 故这个月该居民应缴电费 $100a + 80 \times 2a = 260a$ 元.

【例 3】 目前世界各地的足球比赛大多采用主客场制,比赛场次的计算,就是所有参赛队都与另一队比赛两场。

(1)若 3 支球队参加比赛,全部比赛完毕至少需赛多少场?

(2)我国目前有甲 A 球队 16 支,一个赛季共进行了多少场比赛?

(3)总结一个公式,表示 n 个队参加比赛,用主客场赛制,总共比赛的场次 m .

【答案】 (1)每支球队要比赛 $(3-1) \times 2 = 4$ 场,3 个球队比赛完毕共需 $\frac{4 \times 3}{2} = 6$ 场.

(2)16 支球队,每支球队要与其他 15 支球队各比赛两场,共赛 $15 \times 2 = 30$,所以一个赛季共比赛 $\frac{30 \times 16}{2} = 240$ 场

(3) n 个队参加比赛的总场数 $m = \frac{n(n-1) \times 2}{2} = n(n-1)$ 场.

【解析】 首先考察每一支队比赛的场次,再计算所有队的比赛场次. 注意在计算场次时,每一场比赛都计算了两次. 所以总场数 = 每队比赛场数 $\times$ 参赛队的支数 $\div 2$.

【例 4】 如果 a 名同学在 b 小时内共搬运 c 块砖,那么 c 名同学以同样的速度搬运 a 块砖所需的小时数是()

【点拨】 根据已知的数表分析第一行第一列、第二行第二列、第三行第三列、第四行第四列的交叉点上的数据 1、3、5、7 则不难推出其排列规律.

【例 4】 (2001 年孝感市) 一种商品每件成本 a 元, 按成本增加 25% 定出价格, 后因库存积压减价, 按价格的 92% 出售, 每件还能盈利_____元.

【答案】 $0.15a$

【点拨】 明确 25% 和 92% 这两量的基数, 同时应注意盈利的含义: 盈利 = 卖出价格 - 买进成本.

$$A. \frac{c^2}{a^2b}$$

$$B. \frac{c^2}{ab}$$

$$C. \frac{ab}{c^2}$$

$$D. \frac{a^2b}{c^2}$$

【答案】 D

【点拨】 分析清楚“以同样的速度”的含义, 即先求出每人每小时搬运多少块砖:

$\frac{c}{ab}$, 再计算 c 各同学搬运 a 块砖的时间.

【心得体会】

学习了代数式后, 你认为学习代数式有哪些好处, 请说说看.

实力演练

一、选择题

- ※1. 设甲数为 x , 乙数为 y , 则甲数的 2 倍与乙数的 $\frac{1}{3}$ 的和用代数式表示为_____.
- ※2. n 为整数, 被 3 整除并且商恰为 n 的那个数为_____.
- ※3. 托运行李 P 千克 (P 为整数) 的费用为 C , 已知托运第一个 1 千克需付费 2 元, 以后每增加 1 千克 (不足 1 千克按 1 千克计算) 需增加费用 5 角, 则用托运行李的重量 P 来表示托运费用 C 的代数式是_____.
- ※4. 一项工程, 甲队单独完成要 a 天, 乙队单独完成要 b 天, 两队合作需要_____天完成.
- ※5. 甲、乙两人从同一地点出发, 甲每小时走 a km, 乙每小时走 b km ($b < a$) 用代数式表示:
- (1) 反向行走 t h, 两人相距_____ km;
 - (2) 同向行走 t h, 两人相距_____ km;
 - (3) 反向行走, 甲比乙早出发 m h, 乙走 n h, 两人相距_____ km;
 - (4) 同向行走, 甲比乙晚出发 m h, 乙走 n h, 两

指点迷津

← 正确处理倍、分、和.

← 被除数 = 除数 $\times$ 商 正确理解“以后每增加 1 千克”的含义, 即增加重量为 $(P-1)$ kg.

← 合作效率 = 甲、乙两人的效率和.

← 同向行走的相距路程是甲、乙两人行走的路程差, 反向行走的相距路程是甲、乙两人行走的路程和.

人相距_____ km.

- ※ 6. 某工厂一月份生产总值 a 万元, 如果月生产总值以 10% 的增长率增长, 则第一季度这个工厂的生产总值是_____万元.
- ※ 7. 浓度为 $P\%$ 的盐水 m kg, 其中含盐 _____ kg; 加入 n kg 水以后盐水的浓度是 _____.
- ※ 8. 一列火车匀速前进, 从它进入 300 米长的隧道到完全通过隧道, 共用时 20 秒, 隧道顶部有一盏固定的灯, 灯光在列车上照射了 10 秒钟, 如果列车的车身长为 x 米, 那么用代数式表示列车的速度为 _____.

二、选择题

- ※ 9. 某船在静水中的速度为 a km/h, 水流速度为 3 km/h, 该船顺水航行 5 h 可行水路 ()
 A. $5a$ km B. $5(a+3)$ km
 C. $5(a-3)$ km D. 15 km
- ※ 10. 某商品按原零售价的九折降价后, 又降价 a 元, 每件商品现售 b 元, 那么该商品原零售价是 () 元.
 A. $0.9(a+b)$ B. $0.9(a-b)$
 C. $\frac{a-b}{0.9}$ D. $\frac{a+b}{0.9}$
- ※ 11. 某工厂原计划每天生产 a 个零件, 实际每天多生产 b 个, 那么生产 m 个零件提前的天数是 ()
 A. $\frac{m}{a} - \frac{m}{b}$ B. $\frac{m}{a} - \frac{m}{a+b}$
 C. $\frac{m}{a+b}$ D. $\frac{m}{a+b} - \frac{m}{a}$
- ※ 12. 一(一)班同学排成长方形长队, 每排的同学数为 m 人, 排数比每排的同学数 m 的 4 倍还多了, 那么全班同学数为 ()
 A. $n \times 4n + 3$ B. $n(4n+3)$
 C. $n+4n+3$ D. $4n(n+3)$
- ※ 13. a, b 两数的平方差除以 a 与 b 的差的平方用代数式表示为 ()

← 第一季度的生产总值是一、二、三月份的生产总值的和.

← 浓度 = $\frac{\text{溶质重量}}{\text{溶液的重量}}$.

← 完全通过隧道是指火车头入隧道口到火车尾离开隧道时走的路程.

← 顺水速度 = 静水速度 + 水流速度

← 先求九折后的价格, 再求原价.

← 提前的天数 = 原计划生产天数 - 实际生产的天数.

← 将每位同学看成是一个单位, 求总人数即是求面积.

← 注意平方差与差分平方差与差的平方的运算顺序的区别.

- A. $\frac{a^2-b^2}{(a-b)^2}$ B. $\frac{(a-b)^2}{a^2-b^2}$
 C. $\frac{a^2-b^2}{a-b^2}$ D. $\frac{a-b^2}{a^2-b^2}$

三、解答题

- * 14. 如图 1—1—2 是一个机械零件的断面图, 写出图中的断面的面积 (即阴影部分) 的代数式.

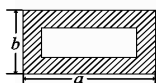


图 1—1—2

- * 15. (1) 桔子每千克 a 元, 买 10 千克以上按 9 折优惠, 买 20 千克应付多少钱?
 (2) 桔子每千克 a 元, 买 10 千克 (包括 10 千克) 以下的不优惠, 超过 10 千克的, 超过部分按 9 折优惠, 买 20 千克应付多少钱?
- * 16. 银行半年期整存整取定期存款的年利率为 1.96%, 且利息应缴纳 20% 的个人所得税, 王某将 a 元人民币按半年定期存入银行, 到期后应缴个人所得税多少元? 得到的利息是多少?
- * 17. 一个梯形的下底是上底的 2 倍, 高比上底少 4 cm, 试用含一个字母的代数式来表示这个梯形的面积.

← 关键是求内部矩形的长和宽的代数式.

← 注意优惠价的数量限制条件. (2) 题仅仅是超过部分才按 9 折优惠.

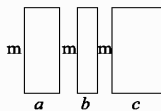
← 半年定期的利率是年利率的一半.

← 选择不同的量设为未知数有不同的代数式.

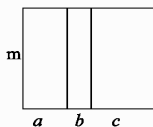
四、探究题

- * 18. (1) 如图 1—2—3①三个矩形的长都为 m , 宽分别为 a, b, c , 如果将这三个矩形拼在一起, 如图 1—2—3②变成一个大矩形, 它与前面三个矩形之间的面积有什么关系? 能否用一个式子表示出来? 它与乘法对加法的分配律有何联系?
- (2) 仿照 (1) 的方法, 你能从图 1—2—3③中发现什么?
- (3) 你能说明你的发现的正确性吗?
- (4) 请利用你的发现计算 1001^2 的值.

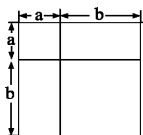
← ①中的三个长方形面积和等于②中大长方形的面积. 由此可推出等式. ③应以图形的整体方式求面积与部分面积之间的关系去寻求面积关系式; 1001 可看作是 $1000+1$.



①



②



③

图 1—2—3

1.3 代数式的值

教材精讲

一、代数式的值

用数值代替代数式中的字母,按照代数式指明的运算,计算出的结果,叫代数式的值.

代数式的值是由代数式中字母的取值所决定的,同一个代数式,由于字母的取值不同,所求的值也不同.

二、求代数式的值的步骤:

第一步:用数值代替代数式里的字母,简称为“代入”;

第二步:按照代数式指明的运算顺序,计算出结果,简称为“计算”.

名师精析

一、方法指导

1. 求代数式的值就是将题目中给出的具体数字代替代数式中的字母,即是将相应的字母换成数字,其它的运算符号和原来的数字都不能改变.

2. 代数式中原来省略乘号的,代入数字后出现数字与数字相乘时,必须添上括号.

3. 若字母的取值是分数或负数(以后即将学习)时运算时应添上括号.

二、解难释疑

1. 代数式里的字母取值一定要确保代数式有意义,表示实际意义的数量要使其有实际意义.

2. 由于代数式的值是由所含字母取值确定的,它随着代数式中字母取值的变化而变化,所以求代数式的值的书写格式,在代入前,必须写出“当……时”,表示这个代数式的值是在这种条件下求得的.

三、实际应用

代数式的值有时由代数式中的某部分整体决定,所以可用整体代入法求代数式的值.

中考在线

一、中考要求

代数式的化简求值是中考的热点题型,会求代数式的值,同时能运用整体代入法求代数式的值,有时会与列代数式综合考查所以应会列代数式并求值.

二、考题举例

【例1】(2001年·河南省)

新题展示

【例1】当 $x = 3\frac{1}{2}$ 时,求代数式 $\frac{1}{2}x^2 - x + 1$ 的值.

【答案】当 $x = 3\frac{1}{2}$ 时,

$$\begin{aligned}\text{原式} &= \frac{1}{2} \times (3\frac{1}{2})^2 - 3\frac{1}{2} + 1 \\ &= 3\frac{5}{8}.\end{aligned}$$

已知代数式 $3y^2 - 2y + 6$ 的值为 8, 那么代数式 $\frac{3}{2}y^2 - y + 1$ 的值为 ()

A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

【答案】 B

【点拨】 由 $3y^2 - 2y + 6 = 8$, 可得 $3y^2 - 2y = 2$, 而 $\frac{3}{2}y^2 - y = \frac{1}{2}(3y^2 - 2y) + 1 = \frac{1}{2} \times 2 + 1 = 2$.

【例 2】 (2001 年·山东省) 在某地, 人们发现某种蟋蟀叫的次数与温度之间有如下的近似关系: 用蟋蟀 1 分钟叫的次数除以 7, 然后再加上 3, 就近似地得到该地当时的温度 ($^{\circ}\text{C}$).

(1) 用代数式表示该地当时的温度;

(2) 当蟋蟀 1 分钟叫的次数分别是 80, 100 和 120 时, 该地当时的温度约是多少?

【答案】 (1) 用 c 表示蟋蟀 1 分钟叫的次数, 则该地当时的温度为 $\frac{c}{7} + 3$;

(2) 把 $c = 80, 100$ 和 120 分别代入 $\frac{c}{7} + 3$, 得

$$\frac{80}{7} + 3 = \frac{101}{7} \approx 14,$$

$$\frac{100}{7} + 3 = \frac{121}{7} \approx 17,$$

$$\frac{120}{7} + 3 = \frac{141}{7} \approx 20.$$

因此, 当蟋蟀 1 分钟叫的次数分别是 80, 100 和 120 时, 该地

【解析】 求代数式的值应根据其步骤: 一代入, 二计算, 并注意当字母的取值是分数时, 代入时, 应将分数添上括号.

【例 2】 已知: $a - b = 3, b - c = 2$, 求 $(a - b)^2 + (b - c)^2 + (a - c)^2$ 的值.

【答案】 由 $a - b = 3, b - c = 2$, 知 $a - c = 5$, 将他们整体代入得:

$$\begin{aligned} \text{原式} &= 3^2 + 2^2 + 5^2 \\ &= 37. \end{aligned}$$

【解析】 代数式 $(a - b)^2 + (b - c)^2 + (a - c)^2$ 中含有三个字母 a, b, c , 已知 $a - b = 3, b - c = 2$, 不能求出 a, b, c 的值, 但 $(a - b)^2$ 与 $(b - c)^2$ 可由 $a - b$ 和 $b - c$ 的值求得, 通过观察可知将 $a - b = 3$ 与 $b - c = 2$ 相加可得 $a - c = 5$, 于是可求其代数式的值.

【例 3】 已知 $\frac{a}{2} = \frac{b}{3} = \frac{c}{4}$, 求

$\frac{a^2 + 2b^2 - c^2}{3a^2 - b^2 + c^2}$ 的值 ($a \neq 0$).

【解】 设 $\frac{a}{2} = \frac{b}{3} = \frac{c}{4} = k$, 则 $a = 2k, b = 3k, c = 4k$.

$\because a \neq 0, \therefore k \neq 0$.

$$\therefore \frac{a^2 + 2b^2 - c^2}{3a^2 - b^2 + c^2} =$$

$$\frac{(2k)^2 + 2 \times (3k)^2 - (4k)^2}{3 \times (2k)^2 - (3k)^2 + (4k)^2}$$

$$= \frac{6k^2}{19k^2} = \frac{6}{19}.$$

【解析】 本题题设没有给出代数式中各个字母的具体值, 但是给出了各字母之间的相互关系, 这就可以把原代数式中的各个字母都统一用一个字母表示, 然后约分求值.

【例 4】 某汽车行驶中油箱中余油量 Q (千克) 与行驶时间 t (小时) 的关系如下表:

当时的温度大约分别是 14°C , 17°C 和 20°C .

【点拨】 首先应先设未知数表示蟋蟀 1 分钟叫的次数, 然后根据蟋蟀 1 分钟叫的次数除以 7, 然后再加上 3, 近似地表达出该地当时的温度.

【例 3】 (2002 · 江苏省) 银行存款利息计算公式为: 利息 = 本金 × 利率 × 期数; 从 1999 年 11 月 1 日起, 利息要征收 20% 的利息税, 设实得利息为 P 元, 本金为 a 元, 年利率为 $x\%$, 期数为 n (月), 写出表示利息 P 的代数式, 并求出 $a=20000$, $x=2.4$, $n=10$ 时, P 的值.

【答案】 依题意, 得

$$P = a \times \frac{x\%}{12} \times n \times (1 - 20\%)$$

当 $a=20000$, $x=2.4$, $n=10$ 时,

$$\begin{aligned} P &= 20000 \times 2.4\% \div 12 \times 10 \times \\ &\quad (1 - 20\%) \\ &= 320 (\text{元}) \end{aligned}$$

【点拨】 由利息计算公式, 利息 = 本金 × 利率 × 期数可得, 实得利息等于存款利息减去征收的利息税.

行驶时间 (小时)	余油量 Q (千克)	行驶时间 (小时)	余油量 Q (千克)
1	$48-6$	2	$48-12$
3	$48-18$	4	$48-24$
5	$48-30$	...	...

(1) 写出用时间 t 表示余油量 Q 的代数式;

(2) 根据所列代数式回答, 汽车行驶之前油箱中有多少千克汽油?

(3) 油箱中原有汽油可以供汽车行驶多少小时?

【解】 (1) $Q = 48 - 6t$

(2) 当 $t=0$ 时, $Q=48$;

所以, 汽车行驶之前油箱中有 48 千克汽油.

(3) 由题意知, 汽车每小时耗油 6 千克, 所以油箱中 48 千克汽油可供汽车行驶 8 小时.

【解析】 (1) 观察分析表中的数量关系, 发现规律, 从而列出所求的代数式;

(2) 要求行驶之前的余油量 Q , 此时汽车处于静止状态, 即 $t=0$, 即可求得 Q .

(3) 当汽油耗尽, 即 $Q=0$, 即可求得 t .

心得体会

求代数式的值的计算过程与小学学过的计算题有什么联系, 你知道吗?

实力演练

一、选择题

※ 1. 下列说法中正确的有 ()

- ① 代数式的值只与代数式本身有关; ② 一个只含有一个字母的代数式, 只有一个值; ③ 代数式 $x^2 + x - 1$ 的值是 -1 .

A. 0 个 B. 1 个 C. 2 个 D. 3 个

※ 2. 下列代数式中, 当 $x=1$ 和 $x=5$ 时, 其值都不

指点迷津

← 本题是考查对代数式的值的意义的理解.

← 须求其值, 后作选择

为零的是

- A. $(x-1)(x-5)$ B. $(x+1)(x-5)$
C. $(x-1)(x+5)$ D. $(x+1)(x+5)$

※3. 已知 $\frac{a}{b}=3$, 则 $\frac{a-b}{a}$ 的值为

- A. $\frac{4}{3}$ B. 1 C. $\frac{2}{3}$ D. 0

※4. 若 $4m+3n-1$ 的值为 $\frac{1}{4}$, 那么 $4(4m+3n)+2$ 的值为

- A. 4 B. 5 C. 6 D. 7

※5. 已知 $\frac{a+b}{a-b}=2$, 则 $\frac{3a-3b}{a+b} + \frac{a+b}{4a-4b}$ 的值等于

- A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

※6. 下列计算错误的是

A. 当 $a=4, b=12$ 时, 代数式 $a^2 - \frac{b}{a}$ 的值是 13

B. 当 $x=\frac{1}{3}, y=\frac{1}{4}$ 时, 代数式 $x(x-y)$ 的值是 $\frac{1}{36}$

C. 当 $x=5, y=3$ 时, 代数式 $(x+y)^2 - (x+y)$ 的值是 8

D. 当 $x=1.5, y=0.5$ 时, 代数式 $\frac{x-y}{x+y}$ 的值是 $\frac{1}{2}$

二、填空题

※7. 当 $x=$ _____ 时, 代数式 $\frac{2x-1}{5}$ 的值为零.

※8. 当 $a=1, b=2$ 时, 代数式 $\frac{1}{3}ab + (a^2 + b^2)$ 的值是 _____.

※9. 根据 $1=1^2, 1+3=2^2, 1+3+5=3^2$, 可得 $1+3+5+\dots+(2n-1)=$ _____, (其中 n 为正整数), 如果 $1+3+5+\dots+x=361$, 则奇数 $x=$ _____.

※10. 当 $a+b=2, a-b=1$ 时, 代数式 $(a+b)^2 - 2(a+b)(a-b) + (a-b)^2$ 的值是 _____.

※11. 一条船往返于甲、乙两地之间, 如果顺流航行 4 小时的路程与逆流航行 5 小时的路程相等,

←用整体代入法求解

←用整体代入法求解

←注意 $\frac{a+b}{a-b}$ 与 $\frac{a-b}{a+b}$ 互为倒数

←应先分别求各个代数式的值, 由其值再判断其正误.

←由分子为 0 求解.

←考查求值及括号根据其规律, 先猜想, 后验证.

←用整体代入法求解.

←注意往返的路程相等这一等量关系及速度