

06 考生应知道的重要命题信息：大纲制定者，数学命题人

武忠祥：西安交通大学理学院教授，多次参加全国数学考试命题工作，具有丰富的教学、命题经验。从事高等数学及工程数学教学二十余年，曾获国家、省、校级优秀教学成果奖二十余项。著有《大学数学教程》《高等数学典型题》等多部著作。长期的考研命题和对考研试题深入细致的研究，深受历届考生的欢迎。

蔡燧林：浙江大学数学系教授，教育部考试中心 1992~2000 年研究生入学考试数学命题组成员、组长。长期从事大学工科数学并指导硕士研究生，获原国家教委多项奖励，并荣获国务院颁发的政府特殊津贴。对高等数学部分的命题预测要高度重视！

高应才：西安交通大学数学教授，研究生指导教师，多次参加考研命题与试卷评阅工作，主持偏微分方程理论及其数值分析，生命科学及地下水资源等领域的工作，发表论文 35 篇，获省部级科技进步奖和成果奖 7 次，出版著作《数学物理方程及其数值解法》、《高等工程数学》、《岩石力学名词词典》、《应用数学方法》、《研究生入学考试数学复习指南》等。

周概容：教育部考试中心 1986~2003 年命题组成员、组长，概率论与数理统计负责人。南开大学数学教授，莫斯科大学数学系本科，基辅大学研究生。连续 17 年参加全国硕士研究生入学统一考试“数学试题”命题工作。对概率论与数理统计部分的命题预测要高度重视！

龚冬保：西安交通大学数学教授，全国优秀教师，多次获得国家、省、校级优秀教学成果奖，国家级工科高等数学、线性代数和概率统计试题库题库组骨干专家，多次参加考研及各类数学竞赛命题工作，长期担任考研辅导、数学竞赛教练工作，是经验丰富的教学、命题专家。

王式安：北京理工大学数学教授，教育部考试中心 1987~2001 年理工类数学命题组组长，概率论与数理统计负责人。对概率论与数理统计部分的命题预测要高度重视！

潘鼎坤：西安建筑科技大学数学教授，多次参加考研命题与试卷评阅工作，曾任陕西省工科数学教学委员会副主任，《高等数学研究》杂志主编，省数学学会理事，常务理事，计算物理学会理事，有五十余年教龄，为研究生授课二十多年，编著《高等数学习题详解·释疑·指导》、《线性代数引论》（译著），《科技人员用的矩阵方法》（与刘则刚合译），《高等数学内容提要及解题指导》等。被评为省优秀教师，享受国务院颁发的政府特殊津贴。

李恒沛：北京航空航天大学数学教授，教育部考试中心 1987~2001 年数学命题组组长，高等数学命题负责人，对命题工作有深入研究，并多次参与阅卷工作，具有丰富经验。对高等数学部分的命题预测要高度重视！

周家良：西安交通大学数学教授，研究生指导教师，全国为数不多的“概率统计命题辅导专家”之一。长期任高等数学和概率统计教学工作，教学经验丰富，教学效果显著，多次获西安交大校教学奖和教学改革奖，王宽诚教学奖。多次参加全国概率统计考试命题工作，任组长，出版著作《概率论》、《应用统计方法》、《应用随机过程》、《概率论和数理统计的学习与提高》、《数学考研教程》，发表论文 31 篇。曾参与《研究生入学考试数学复习考点分析》等考研辅导及其相关资料的编写工作。

范培华：北京大学光华管理学院教授，连续 14 年研究生入学考试经济类数学命题组组长。1987 年~2000 年担任经济类命题组组长，参加历年北京考试阅卷工作。对线性代数和概率部分的命题预测要高度重视！

樊启斌：武汉大学数学与统计学院博士、教授、应用数学系副系主任，湖北省跨世纪学科带头人，多次参加考研命题与试卷评阅工作，积累了丰富的教学经验，所编著的考研辅导书《高等数学与线性代数综合解题指南》出版后广受好评、十分畅销。曾多次获得省部级、校级科研成果奖与教学成果奖。

胡金德：清华大学数学科学系教授，教育部考试中心 1989~1997 年研究生入学考试数学命题组成员、组长，北京市研究生数学试卷阅卷组负责人。长期从事大学工科教学。对高等数学部分的命题预测要高度重视！

目 录

第 1 部分

考研数学测试热点、重点、难点分析及最新典型预测题 200 例

——北京考研班核心笔记及精讲班内容

第一章 《高等数学》命题焦点、热点浓缩大串讲

清华大学大串讲浓缩内部讲稿·核心笔记·典型题解

第一节 函数、极限、连续之重点难点分析·典型题型·预测押题 (二级重点章节 命题概率 40%)	(1)
第一讲 清华大学考研名师重点、热点分析浓缩大串讲	(1)
第二讲 清华大学考研名师串讲典型常考八大题型及解法	(2)
第三讲 清华大学考研名师大串讲预测密押典型题及参考答案	(3)
第二节 一元函数微分学之重点难点分析·典型题型·预测押题 (一级重点章节 命题概率 80%)	(6)
第一讲 清华大学考研名师重点、热点分析浓缩大串讲	(6)
第二讲 清华大学考研名师串讲典型常考五大题型及解法	(6)
第三讲 清华大学考研名师大串讲预测密押典型题及参考答案	(8)
第三节 一元函数积分学之重点难点分析·典型题型·预测押题 (一级重点章节 命题概率 70%)	(11)
第一讲 清华大学考研名师重点、热点分析浓缩大串讲	(11)
第二讲 清华大学考研名师串讲典型常考七大题型及解法	(13)
第三讲 清华大学考研名师大串讲预测密押典型题及参考答案	(16)
第四节 向量代数和空间解析几何之重点难点分析·典型题型·预测押题 (非重点章节 命题概率 20%)	(20)
第一讲 清华大学考研名师重点、热点分析浓缩大串讲	(20)
第五节 多元函数微分学之重点难点分析·典型题型·预测押题 (一级重点章节 命题概率 60%)	(24)
第一讲 清华大学考研名师重点、热点分析浓缩大串讲	(24)
第二讲 清华大学考研名师串讲典型常考六大题型及解法	(24)
第三讲 清华大学考研名师大串讲预测密押典型题及参考答案	(26)
第六节 多元函数积分学之重点难点分析·典型题型·预测押题 (一级重点章节 命题概率 70%)	(28)
第一讲 清华大学考研名师重点、热点分析浓缩大串讲	(28)
第二讲 清华大学考研名师串讲典型常考七大题型及解法	(29)
第三讲 清华大学考研名师大串讲预测密押典型题及参考答案	(30)
第七节 无穷级数之重点难点分析·典型题型·预测押题 (一级重点章节 命题概率 70%)	(34)
第一讲 清华大学考研名师重点、热点分析浓缩大串讲	(34)

第二讲	清华大学考研名师串讲典型常考七大题型及解法	(35)
第三讲	清华大学考研名师大串讲预测密押典型题及参考答案	(39)
第八节	常微分方程之重点难点分析·典型题型·预测押题 (二级重点章节 命题概率 50%)	(42)
第一讲	清华大学考研名师重点、热点分析浓缩大串讲	(42)
第二讲	清华大学考研名师串讲典型常考五大题型及解法	(42)
第三讲	清华大学考研名师大串讲预测密押典型题及参考答案	(45)

第二章 《线性代数》命题焦点、热点浓缩大串讲

北京大学大串讲浓缩内部讲稿·核心笔记·典型题解

第一节	行列式之重点难点分析·典型题型·预测押题 (非重点章节 命题概率 10%)	(48)
第一讲	北京大学考研名师重点、热点分析浓缩大串讲	(48)
第二讲	北京大学考研名师串讲典型常考七大题型及解法	(49)
第三讲	北京大学考研名师大串讲预测密押典型题及参考答案	(49)
第二节	矩阵之重点难点分析·典型题型·预测押题 (一级重点章节 命题概率 60%)	(51)
第一讲	北京大学考研名师重点、热点分析浓缩大串讲	(51)
第二讲	北京大学考研名师串讲典型常考八大题型及解法	(51)
第三讲	北京大学考研名师大串讲预测密押典型题及参考答案	(54)
第三节	向量之重点难点分析·典型题型·预测押题 (非重点章节 命题概率 20%)	(55)
第一讲	北京大学考研名师重点、热点分析浓缩大串讲	(55)
第二讲	北京大学考研名师串讲典型常考四大题型及解法	(55)
第三讲	北京大学考研名师大串讲预测密押典型题及参考答案	(57)
第四节	线性方程组之重点难点分析·典型题型·预测押题 (一级重点章节 命题概率 70%)	(59)
第一讲	北京大学考研名师重点、热点分析浓缩大串讲	(59)
第二讲	北京大学考研名师串讲典型常考三大题型及解法	(59)
第三讲	北京大学考研名师大串讲预测密押典型题及参考答案	(61)
第五节	矩阵的特征值与特征向量之重点难点分析·典型题型·预测押题 (一级重点章节 命题概率 70%)	(63)
第一讲	北京大学考研名师重点、热点分析浓缩大串讲	(63)
第二讲	北京大学考研名师串讲典型常考四大题型及解法	(63)
第三讲	北京大学考研名师大串讲预测密押典型题及参考答案	(65)
第六节	二次型之重点难点分析·典型题型·预测押题 (二级重点章节 命题概率 40%)	(68)
第一讲	北京大学考研名师重点、热点分析浓缩大串讲	(68)
第二讲	北京大学考研名师串讲典型常考二大题型及解法	(68)
第三讲	北京大学考研名师大串讲预测密押典型题及参考答案	(69)

第三章 《概率论与数理统计》命题焦点、热点浓缩大串讲

中国人民大学大串讲浓缩内部讲稿·核心笔记·典型题解

第一节 随机事件与概率之重点难点分析·典型题型·预测押题 (非重点章节 命题概率 20%) (71)

 第一讲 中国人民大学考研名师重点、热点分析浓缩大串讲 (71)

 第二讲 中国人民大学考研名师串讲典型常考五大题型及解法 (71)

 第三讲 中国人民大学考研名师大串讲预测密押典型题及参考答案 (72)

第二节 随机变量及其概率分布之重点难点分析·典型题型·预测押题 (一级重点章节 命题概率 70%) (74)

 第一讲 中国人民大学考研名师重点、热点分析浓缩大串讲 (74)

 第二讲 中国人民大学考研名师串讲典型常考六大题型及解法 (74)

 第三讲 中国人民大学考研名师大串讲预测密押典型题及参考答案 (76)

第三节 随机变量的数字特征之重点难点分析·典型题型·预测押题 (一级重点章节 命题概率 60%) (79)

 第一讲 中国人民大学考研名师重点、热点分析浓缩大串讲 (79)

 第二讲 中国人民大学考研名师串讲典型常考三大题型及解法 (80)

 第三讲 中国人民大学考研名师大串讲预测密押典型题及参考答案 (81)

第四节 大数定律和中心极限定理之重点难点分析·典型题型·预测押题 (非重点章节 命题概率 20%) (84)

 第一讲 中国人民大学考研名师重点、热点分析浓缩大串讲 (84)

 第二讲 中国人民大学考研名师串讲典型常考四大题型及解法 (84)

 第三讲 中国人民大学考研名师大串讲预测密押典型题及参考答案 (84)

第五节 数理统计初步之重点难点分析·典型题型·预测押题 (二级重点章节 命题概率 40%) (86)

 第一讲 中国人民大学考研名师重点、热点分析浓缩大串讲 (86)

 第二讲 中国人民大学考研名师串讲典型常考两大题型及解法 (86)

 第三讲 中国人民大学考研名师大串讲预测密押典型题及参考答案 (87)

第 2 部分

北京考研班最新内部讲稿 :典型预测 133题精选

——北京四大考研班核心笔记及精讲班内容

2.1 北大、清华、人大、北师大考研辅导班核心笔记及内部讲稿内容 (92)

 ——考研数学典型预测 133题精选

2.2 北大、清华、人大、北师大考研辅导班核心笔记及内部讲稿答案解析 (103)

 ——考研数学典型预测 133题答案与分析

北京考研班后期冲刺精品预订

黑博士强化训练系列（10 - 12 月中旬，去年该系列命中政治 47 分、数学 65 分）		
1. 《政治高分复习成功指导》（有辅导重点，信息量大，命中率高）		（48 元 / 册）
2. 《考研数学新典型 1000 题精选》（理工类/经济类 信息量大，命中率高）		（25 元 / 册）
3. 《政治高分题库精编 1800 题精选》（有辅导重点 信息量大 命中率高）		（38 元 / 册）
4. 《数学冲刺命题预测卷（数学一）》（销量排行榜 1 名，密押卷第一面旗帜）		（25 元 / 册）
5. 《数学冲刺命题预测卷（数学二）》（销量排行榜 1 名，密押卷第一面旗帜）		（25 元 / 册）
6. 《数学冲刺命题预测卷（数学三）》（销量排行榜 1 名，密押卷第一面旗帜）		（25 元 / 册）
7. 《数学冲刺命题预测卷（数学四）》（销量排行榜 1 名，密押卷第一面旗帜）		（25 元 / 册）
8. 《英语冲刺命题预测卷》（上、下册）（销量排行榜 1 名，密押卷第一面旗帜）		（20 元 / 册）
9. 《政治冲刺命题预测卷》（上、下册）（销量排行榜 1 名，密押卷第一面旗帜）		（20 元 / 册）
10. 《政治历年真题详解与命题研究》（销量排行榜前 2 名，第一品牌）		（19.8 元 / 册）
11. 《英语历年真题详解与命题研究》（销量排行榜前 2 名，第一品牌）		（22 元 / 册）
12. 《数学历年真题详解与命题研究》（数学一）（销量排行榜前 2 名，第一品牌）		（19.8 元 / 册）
13. 《数学历年真题详解与命题研究》（数学二）（销量排行榜前 2 名，第一品牌）		（19.8 元 / 册）
14. 《数学历年真题详解与命题研究》（数学三）（销量排行榜前 2 名，第一品牌）		（19.8 元 / 册）
15. 《数学历年真题详解与命题研究》（数学四）（销量排行榜前 2 名，第一品牌）		（19.8 元 / 册）
黑博士背诵版系列（10 - 12 月中旬，去年该系列命中政治 56 分，分析题 4 道）		
1. 《政治“浓缩笔记·预测讲稿”北京政治强化班大串讲（红皮书）》		（18 元 / 册）
2. 《背诵版 A：考前预测 40 天 40 题》（销量排行榜前 2 名，背诵版第一品牌）		（14.8 元 / 册）
3. 《背诵版 B：典型分析题精选 100 题》（销量排行榜前 2 名，背诵版第一品牌）		（14.8 元 / 册）
4. 《背诵版 C：形势与政策命题精选 200 题》（销量排行榜前 2 名，背诵版第一品牌）		（14.8 元 / 册）
黑博士考前密押系列（12 月中旬，去年该系列命中政治 52 分、数学 78 分）		
1. 《政治最后内部预测（密押）试卷》（A/B）（销量第 1 名，密押卷第一面旗帜）		（10 元 / 册）
2. 《英语最后内部预测（密押）试卷》（A/B）（销量第 1 名，密押卷第一面旗帜）		（10 元 / 册）
3. 《数一最后内部预测（密押）试卷》（A/B）（销量前 2 名，密押卷第一面旗帜）		（10 元 / 册）
4. 《数二最后内部预测（密押）试卷》（A/B）（销量前 2 名，密押卷第一面旗帜）		（10 元 / 册）
5. 《数三最后内部预测（密押）试卷》（A/B）（销量前 2 名，密押卷第一面旗帜）		（10 元 / 册）
6. 《数四最后内部预测（密押）试卷》（A/B）（销量前 2 名，密押卷第一面旗帜）		（10 元 / 册）
7. 《北京名师 12 月临考阅读新大纲浓缩点题 30 篇》（销量销量排行榜前 2 名，第一品牌）		（10 元 / 册）
8. 《黑博士英语考前 20 天命题预测押题作文 20 篇》（销量前 2 名，第一品牌）		（10 元 / 册）
9. 《黑博士临考阅读新题型命题预测浓缩 50 篇》（销量销量排行榜前 2 名，第一品牌）		（15 元 / 册）

（严格遵循教育部考试中心最新大纲，名师主笔 + 最新力作 + 高信息量 + 强预测性）

数量有限 预订优惠 欲购从速

第 1 部分

考研数学测试热点、重点、难点分析 及最新典型预测题 200 例

——北京考研班核心笔记及精讲班内容

第一章 《高等数学》命题焦点、热点浓缩大串讲

清华大学大串讲浓缩内部讲稿·核心笔记·典型题解

第一节 函数、极限、连续之重点难点分析·典型题型·预测押题

第一讲 清华大学考研名师重点、热点分析浓缩大串讲

特别注意

该节内容数一、数二考查要求基本相同 属于二级重点章节

在本节的三块内容函数、极限和连续中,重点和热点内容是极限,求函数的极限是每年的必考题,甚至有时在同一年的一套试题中,直接考查求函数极限的就达 3 题,分数达 16 分之多.本节的另一块内容判断函数是否连续,其实质仍是求函数的极限.另外在函数这一块里,尽管内容多,但大部分都是基础知识,所以本节只要抓住了极限就基本上把握了全节的核心内容.求极限的方法很多,在考试中常用的主要有:

- (1) 利用极限的四则运算法则(这一条是求函数极限的最基本的知识);
- (2) 利用两个重要极限(见大纲要求);
- (3) 利用洛必达法则;
- (4) 利用等价无穷小替换(它往往在求极限的过程中能使运算简化);
- (5) 利用夹逼定理;
- (6) 利用“单调有界数列必有极限”准则;
- (7) 利用极限定义;
- (8) 利用连续函数性质(这一条不会单独命题,但它常用在求极限的过程中,是求极限的基础知识);
- (9) 利用导数和定积分定义;
- (10) 分段函数、复合函数

本节除极限是考查内容的重中之重外,判断函数是否连续也是近几年来考试重点之一.另外在函数这一部分里,重点为复合函数与分段函数.

上面提到的内容既是重点又是近年来的考试热点.

第二讲 清华大学考研名师串讲典型常考八大题型及解法

典型题型一 求未定式的极限

典型的未定式共有七种： $\frac{0}{0}$ -型、 $\frac{\infty}{\infty}$ -型、 $\infty - \infty$ -型、 $0 \cdot \infty$ -型、 0^0 -型、 ∞^0 -型以及 1^∞ -型 ㉞

读者在遇到这七种未定式时,建议首先采用洛必达法则试一试,因为以上虽号称是七种,但事实上大都可以转化为求 $\frac{0}{0}$ -型的极限这种类型 ㉞

[附]使用洛必达法则应注意:

(1) 使用洛必达法则时,要先判断是否为 $\frac{0}{0}$ 或 $\frac{\infty}{\infty}$ -型,是,可用;不是,不可用;

(2) 每使用一次法则都要将式子化简并整理(如整理后发现所得表达式不是越来越简单,而是越来越复杂,此时应作替换);

(3) 注意与其它方法(如等价无穷小)配合使用;

(4) 当 $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$ 不存在(或非 ∞)时,不能推出 $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$ 不存在(非 ∞);

(5) 当 $x \rightarrow \infty$ 时,若式子中含有 $\cos x, \sin x$ (或当 $x \rightarrow 0$ 时,式子中含有 $\cos \frac{1}{x}, \sin \frac{1}{x}$),则不宜使用洛必达法则求极限 ㉞

洛必达法则求未定式非常有效的方法,只要式中不出现上述第 5 项中的情况,建议读者首先用洛必达法则试一试 ㉞

典型题型二 求非未定式的极限

这类题通常要利用函数的连续性、极限的四则运算法则以及利用定积分的定义或夹逼定理 ㉞注:这里说的非定式是指除未定式以外的式子,包括不符合极限四则运算的式子 ㉞

在近几年的考试中,求函数的极限还是绝大部分以求未定式函数的极限为主,望读者注意 ㉞

典型题型三 无穷小的比较

无穷小的比较在近年来的考试中经常出现,解这类题根本的方法还是求极限,同样可用洛必达则、泰勒展开式等式极限的方法来看 ㉞

等价无穷小的应用范围极广,下面给出一些常用的等价无穷小;当 $x \rightarrow 0$ 时

$$\sin x \sim x \quad \arcsin x \sim x \quad \tan x \sim x$$

$$\ln(1+x) \sim x \quad e^x - 1 \sim x \quad 1 - \cos x \sim \frac{1}{2}x^2$$

$$(1+x)^{\frac{1}{n}} - 1 \sim \frac{x}{n} \quad (1-ax)^{\frac{1}{n}} - 1 \sim -\frac{a}{n}x$$

如果用以上等价无穷小替换仍无法做出题目时,可用泰勒公式多展开几项 ㉞

典型题型四 判断函数的连续性与间断点的类型

此类题的实质是求函数的极限 ㉞这种题一般与函数的可异性连在一块,并且考到的知识点还包括变上限积分函数的求导等 ㉞

典型题型五 讨论连续函数在给定区间的零点或方程在给定区间无实根

解这类题的关键是利用连续函数的性质, 设 $f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上连续, 那么

(1) $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上有界;

(2) $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上有最大值和最小值;

(3) (介值定理) 若 η 是介于 $f(a), f(b)$ ($f(a) \neq f(b)$) 间的任何一个数, 则至少存在一点 $\xi \in (a, b)$, 使 $f(\xi) = \eta$;

(4) 若 $f(a) \cdot f(b) < 0$, 则至少存在一点 $\xi \in (a, b)$, 使 $f(\xi) = 0$;

以上这些基础知识要求读者能熟练掌握

典型题型六 求分段函数的复合函数

分段函数的复合要注意定义域, 适用方法有分析法、图示法.

典型题型七 已知数列的前几项数值及通项表达式, 求数列的极限 (重点)

此类题型, 或者利用单调有界数列必有极限定理求解. (求解程序 ① 判断极限的存在性 $\begin{cases} \text{① 单调性} \\ \text{② 有界性} \end{cases}$, 方法可用数学归纳法或不等式的放缩法 ② 先令 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = l$ 然后通过解关于 l 的方程, 求得 l 的值, 从而得极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$) 或者利用数列极限的定义求解. (先令 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = l$, 然后在通项的两边取极限得出 l 的数值, 再证 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ 的存在性, 此步通常是利用 $|x_n - l|$ 的逐步放大而得出其小于一个无穷小量)

典型题型八 分段函数式中参数的确定 (重点)

此类问题的基本思路是: 根据分段函数在其分段点处的性质来确定所含常数的值, 例如: 如果已知一函数在某点连续, 则根据函数在该点连续的充要条件来求解.

第三讲 清华大学考研名师大串讲预测密押典型题及参考答案

预测题 1 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{3x+4} + \sqrt{4-3x} - 4}{x^2}$ ($\frac{0}{0}$ 型).

预测题 2 求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{1}{\ln(x + \sqrt{1+x^2})} - \frac{1}{\ln(1+x)} \right]$.

预测题 3 求极限 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left[\sin\left(\ln\left(1 + \frac{3}{x}\right)\right) - \sin\left(\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)\right) \right]$.

预测题 4 求极限 (1) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}\right)^n$ (1^∞ 型);
(2) $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt[n]{n} - 1)^{\frac{1}{n}}$ (0^0 型).

预测题 5 设 $f(x) = \begin{cases} e^x, & x < 1 \\ x, & x \geq 1 \end{cases}$, $\varphi(x) = \begin{cases} x+2, & x < 0 \\ x^2-1, & x \geq 0 \end{cases}$, 求 $f(\varphi(x))$.

预测题 6 设函数 $f(x)$ 连续, 且 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - \sin x}{x} = a$ (a 为常数), 又 $F(x) = \int_0^1 f(xy) dy$, 求 $F(x)$ 并讨论导函数 $F'(x)$ 的连续性.

◆ 参考答案 ◆

预测题 1 解法 1 用泰勒公式, 由于

$$\begin{aligned} \sqrt{3x+4} &= 2\sqrt{1+\frac{3}{4}x} = 2\left(1+\frac{3}{4}x\right)^{\frac{1}{2}} \\ &= 2\left(1+\frac{1}{2}\left(\frac{3}{4}x\right)+\frac{1}{2!}\times\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}-1\right)\left(\frac{3}{4}x\right)^2+o(x^2)\right) \\ &= 2+\frac{3}{4}x-\frac{1}{4}\times\frac{9}{16}x^2+o(x^2), (x \rightarrow 0) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{而 } \sqrt{4-3x} &= 2\left(1 - \frac{3}{4}x\right)^{\frac{1}{2}} = 2\left(1 - \frac{1}{2} \times \frac{3x}{4} - \frac{1}{2} \times \frac{1}{4} \times \left(-\frac{3}{4}x\right)^2 + o(x^2)\right) \\ &= 2 - \frac{3x}{4} - \frac{1}{4} \times \frac{9}{16}x^2 + o(x^2) \quad (x \rightarrow 0)\end{aligned}$$

$$\text{故 原极限} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\frac{1}{2} \times \frac{9}{16}x^2 + o(x^2)}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(-\frac{9}{32}\right) + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{o(x^2)}{x^2} = -\frac{9}{32}$$

解法 2 去掉根号

$$\begin{aligned}\text{原极限} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{3x+4} + \sqrt{4-3x})^2 - 16}{x^2(\sqrt{3x+4} + \sqrt{4-3x} + 4)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2\sqrt{16-9x^2} - 8}{x^2(\sqrt{3x+4} + \sqrt{4-3x} + 4)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2(-9x^2)}{x^2(\sqrt{3x+4} + \sqrt{4-3x} + 4)(\sqrt{16-9x^2} + 4)} = -\frac{9}{32}.\end{aligned}$$

预测题 2 解: 本题属 $\infty - \infty$ 型, 先通分化成 $\frac{0}{0}$ 型, 则有

$$\omega = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x) - \ln(x + \sqrt{1+x^2})}{\ln(x + \sqrt{1+x^2}) \ln(1+x)}.$$

如直接用洛必达法则比较麻烦, 若注意到

$$(\ln(x + \sqrt{1+x^2}))' = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}, \quad \text{则} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x + \sqrt{1+x^2})}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} = 1$$

即 $\ln(x + \sqrt{1+x^2}) \sim x (x \rightarrow 0)$, 又 $\ln(1+x) \sim x (x \rightarrow 0)$, 因此对分母先作等价无穷小因子替换后再用洛必达法则得

$$\begin{aligned}\omega &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x) - \ln(x + \sqrt{1+x^2})}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{1+x} - \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}}{2x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{(1+x)\sqrt{1+x^2}} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x^2} - (1+x)}{x} = \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}} - 1\right) = -\frac{1}{2}.\end{aligned}$$

预测题 3 解 把原式改写成

$$\begin{aligned}& \left(\sin\left(\ln\left(1 + \frac{3}{x}\right)\right) - \sin\left(\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)\right) \right) \\ &= 2 \frac{\sin\left(\ln\left(1 + \frac{3}{x}\right)\right) - \sin\left(\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)\right)}{\left(1 + \frac{3}{x}\right) - \left(1 + \frac{1}{x}\right)} \\ &= 2 \frac{f\left(1 + \frac{3}{x}\right) - f\left(1 + \frac{1}{x}\right)}{\left(1 + \frac{3}{x}\right) - \left(1 + \frac{1}{x}\right)}\end{aligned}$$

其中 $f(t) = \sin(\ln t)$, 因而可用微分中值公式得

$$\omega = 2 \lim_{x \rightarrow \infty} f(\xi) \quad \xi \text{ 在 } \left(1 + \frac{3}{x}\right) \text{ 与 } \left(1 + \frac{1}{x}\right) \text{ 之间, } x \rightarrow \infty \text{ 时 } \xi \rightarrow 1 \text{ 从而}$$

$$\omega = 2 \lim_{x \rightarrow \infty} \cos(\ln \xi) \cdot \frac{1}{\xi} = 2 \lim_{\xi \rightarrow 1} \cos(\ln \xi) \cdot \frac{1}{\xi} = 2.$$

预测题 4 解: (1) 解法一 利用重要极限 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$.

$$\text{原极限} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\left(1 + \frac{n+1}{n^2}\right)^{\frac{n^2}{n+1}} \right)^{\frac{n+1}{n^2} \cdot n} = e.$$

解法二 不能直接对原式用洛必达法则, 令 $y = \left(1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}\right)^x$ ($x \rightarrow +\infty$, x 为连续变量), 因为

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln y = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln\left(1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}\right)}{\frac{1}{x}} \quad (\text{洛}) \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{x^2 + x + 1} \left(\frac{x+2}{x^2}\right) = 1$$

所以 $\lim_{x \rightarrow +\infty} y = e^{\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln y} = e^1 = e$.

x 依任何方式趋于 $+\infty$ 时, 极限为 e 特别地当 $n \rightarrow +\infty$ 时, 极限也是 e (利用函数极限与数列极限的关系), 即

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}\right)^n = e.$$

(2) 考虑极限 $A = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{x^x} - 1\right)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{\frac{1}{x} \ln\left(\frac{1}{x^x} - 1\right)}$, 由于

$$\left(\frac{1}{x^x}\right)' = \left(e^{-\frac{1}{x} \ln x}\right)' = e^{-\frac{1}{x} \ln x} \cdot \left(-\frac{\ln x + 1}{x^2}\right) = \frac{1}{x^x} \cdot \left(\frac{1 - \ln x}{x^2}\right)$$

$$\text{故} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln\left(\frac{1}{x^x} - 1\right)}{x} \quad (\text{洛}) \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\left(\frac{1}{x^x}\right)'}{\frac{1}{x^x} - 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{x^x} \cdot \left(\frac{1 - \ln x}{x^2}\right)}{\frac{1}{x^x} - 1}$$

$$(\text{洛}) \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{x^x} \cdot \left(\frac{1 - \ln x}{x^2}\right)^2 + \frac{1}{x^x} \cdot x \cdot \frac{-1 - 2(1 - \ln x)}{x^3}}{\frac{1}{x^x} \cdot \frac{1 - \ln x}{x^2}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\left(\frac{1 - \ln x}{x}\right)^2 + \frac{2 \ln x - 3}{x}}{1 - \ln x} = 0$$

预测题 5 解: $f(\varphi(x)) = \begin{cases} e^{(x)}, & \varphi(x) < 1 \\ \varphi(x), & \varphi(x) \geq 1 \end{cases}$

① 当 $\varphi(x) < 1$ 时:

$$\text{或 } x < 0, \varphi(x) = x + 2 < 1, \text{ 即 } \begin{cases} x < 0 \\ x < -1 \end{cases} \Rightarrow x < -1$$

$$\text{或 } x \geq 0, \varphi(x) = x^2 - 1 < 1, \text{ 即 } \begin{cases} x \geq 0 \\ x^2 < 2 \end{cases} \Rightarrow 0 \leq x < \sqrt{2}$$

② 当 $\varphi(x) \geq 1$ 时:

$$\text{或 } x < 0, \varphi(x) = x + 2 \geq 1, \text{ 即 } \begin{cases} x < 0 \\ x \geq -1 \end{cases} \Rightarrow -1 \leq x < 0$$

$$\text{或 } x \geq 0, \varphi(x) = x^2 - 1 \geq 1, \text{ 即 } \begin{cases} x \geq 0 \\ x^2 \geq 2 \end{cases} \Rightarrow x \geq \sqrt{2}$$

$$\text{综上所述, } f(\varphi(x)) = \begin{cases} e^{x+2}, & x < -1 \\ x+2, & -1 \leq x < 0 \\ e^{x^2-1}, & 0 \leq x < \sqrt{2} \\ x^2-1, & x \geq \sqrt{2} \end{cases}$$

预测题 6 解: $F(x)$ 是含参变量 x 的定积分, 应先作变量替换 $t = xy$, 化为变上限的积分, 才可求导.

由于 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - \sin x}{x} = a$, 可知 $\lim_{x \rightarrow 0} [f(x) - \sin x] = 0$, 从而 $f(0) = 0, F(0) = 0$. 在积分中含 $t = xy$, 当

$$x \neq 0 \text{ 则 } F(x) = \frac{\int_0^x f(t) dt}{x}, \text{ 于是}$$

$$F(x) = \frac{x f(x) - \int_0^x t f(t) dt}{x^2} \quad (x \neq 0)$$

又根据导数定义

$$\begin{aligned} F'(0) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{F(x) - F(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x f(t) dt}{x^2} \\ &\stackrel{\text{洛}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - \sin x + \sin x}{2x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - \sin x}{2x} + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{2x} = \frac{a}{2} + \frac{1}{2} \end{aligned}$$

易知 $x=0$ 是 $F(x)$ 的分段点, 先讨论 $x=0$ 的连续性. 因为

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} F(x) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x f(x) - \int_0^x f(t) dt}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} - \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x f(t) dt}{x^2} \\ &= a + 1 - \left(\frac{a}{2} + \frac{1}{2} \right) = \frac{a}{2} + \frac{1}{2} = F(0) \end{aligned}$$

所以 $F(x)$ 在 $x=0$ 处连续. 当 $x \neq 0$ 时, 因为 $f(x)$ 连续, 所以变上限积分 $\int_0^x f(t) dt$ 可微, 从而也是连续的, 于是当 $x \neq 0$ 时 $F(x)$ 连续.

第二节 一元函数微分学之重点难点分析·典型题型·预测押题

第一讲 清华大学考研名师重点、热点分析浓缩大串讲

特别注意

该节内容数一、数二都考, 主体内容大同小异, 请注意大纲的细微差别, 属于一级重点章节.

在一元函数微分学这一节里, 读者要掌握的知识是很多的. 鄧

如把本节内容归纳起来, 共有四个方面的重点(也是近年来的考试热点):

(1) 概念部分: 重点是导数和微分的定义. 特别要会利用导数的定义讨论分段函数在分界点的导性. 鄧另外, 要注意可导与连续的关系(可导必连续, 但连续不一定可导)可导与可微的关系(可导必可微, 可微必可导). 鄧

(2) 运算部分: 重点是基本初等函数的导数公式(要熟记)、微分公式, 以及反函数、隐函数和由参数方程所确定的函数的求导. 鄧

(3) 理论部分: 重点是罗尔定理、拉格朗日中值定理、柯西中值定理、泰勒定理的应用, 其中读者着重掌握两个中值定理, 证明题的方法多、难度大, 但证明题还是有章可循的. 鄧

(4) 应用部分: 重点是利用导数研究函数的性态(包括函数的单调性与极值, 函数图形的凹凸性与拐点、渐近线)以及最值应用题. 鄧

第二讲 清华大学考研名师串讲典型常考五大题型及解法

典型题型一 求函数导数

本题型包括求复合函数导数、参数方程导数、隐函数导数、幂指函数导数、分段函数导数等几方面. 鄧
隐函数求导的方法有三种. 鄧

第一种: 方程两边对 x 求导, 要记住 y 是 x 的函数. 鄧

第二种: 直接代公式, 由 $F(x, y) = 0$, 知 $\frac{dy}{dx} = -\frac{F'_x(x, y)}{F'_y(x, y)}$

其中 $F'_x(x, y)$, $F'_y(x, y)$ 分别表示 $F(x, y)$ 对 x 和 y 的偏导数. 鄧

第三种: 利用微分形式不变性, 在方程两边求微分, 然后解出 $\frac{dy}{dx}$. 鄧

分段函数的微分主要是求分段点的导数,它一般用定义解,对某些函数比如绝对值函数,也可转化为分段函数,讨论这类函数在分段点的微分一般用左导数是否等于右导数来求

解这类题的一种共同思路是:先取自然对数,再对自变量求导,其主要依据是公式: $(\ln x)' = [\ln |x|]' = \frac{1}{x}$

典型题型二 利用中值定理证明有关命题和不等式

运用中值定理证明等式或不等式在历年来的考试中都有较难的题目,许多考生尽管在考前做了很多证明题,但由于不注重总结,所以在考试中还是丢分.事实上,本节常见的证明题题型就几种,并且都有相对固定的解法.下面分别说明

第一种 证明至少存在一点 $\xi \in (a, b)$ 使 $f'(\xi) = 0$

在“重点热点分析”里给出了一道这样的例题,解这种题一般有三种思路

[思路一]验证 $f^{(n-1)}(x)$ 在 $[a, b]$ 上满足罗尔定理的条件,然后由该定理的结论可得命题的证明.注意在验证过程中通常要用到函数在闭区间上的连续的性质以及微分中值定理

[思路二]验证 ξ 为 $f''(x)$ 的最值点或极值点,用费尔马定理可得命题的证明

[思路三]用泰勒公式证明(这种方法针对已知高阶导数的某些特征下)

第二种 证明至少存在一点 $\xi \in (a, b)$ 使得 $f'(\xi) = k (k \neq 0)$,或者有关 $a, b, f(a), f(b), \xi, f'(\xi)$ 所构成的代数式的证明

证这类题的总思路是:作辅助函数 $F(x)$,验证 $F(x)$ 满足罗尔定理条件,再由定理得出命题的证明,那么现在问题的关键是如何构造辅助函数 $F(x)$

常用的辅助函数 $F(x)$ 的作法有两种:原函数法和常数 k 值法

(1) 用原函数法(原函数来源于不定积分)的步骤

- ① 将欲证结论中的 ξ 换成 x ;
- ② 通过恒等变形将式子化为易于消去导数符号的形式;
- ③ 通过观察法和积分法求出原函数(即不含导数符号的式子);
- ④ 移项使等式一端为 0,另一端即为所求的辅助函数 $F(x)$

(2) 用常数 k 值法的步骤

- ① 将常数部分令作 r ;
- ② 将等式恒等变形,使等式一端为 a 及 $f(a)$ 的构成的代数式,另一端为 b 及 $f(b)$ 构成的代数式;
- ③ 验证关于端点的表达是否为对称式,若是,只要把端点 a (或 b) 改成 x 相应的函数 $f(a)$ (或 $f(b)$) 改成 $f(x)$,则变换后的端点表达式就是所求的辅助函数 $F(x)$

第三种 不等式的证明

不等式的证明除了用中值定理外,主要的方法还有泰勒公式、函数的单调性与利用极值(最值)

典型题型三 利用导数研究函数性态和描述函数图形

典型题型四 应用题(在几何、物理、经济等方面的应用)

另外,利用导数描绘函数图形在最近几年中直接考这一知识的少,但并不表明不考函数的作图,这类题主要是把握:拐点、驻点、单调区间、渐近线以及一些特殊函数值点(比如与 X 轴交点,与 Y 轴交点)其求渐近线的过程如下:

设函数 $y = f(x)$.

(1) 水平渐近线 当 $x \rightarrow \infty$ 时,若 $y \rightarrow m$,则有水平渐近线 $y = m$

(2) 竖直渐近线 当 $y \rightarrow \infty$ 时,若 $x \rightarrow n$ 则有竖直渐近线 $x = n$

(3) 斜渐近线 $y = ax + b$ 因为 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} (ax + b)$

$$\text{故 } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} a + \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{b}{x} = a$$

$$\text{即 } a = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x}$$

$$b = \lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - ax]$$

用洛必达法则求未定式函数的极限也是本节的题型之一,有关内容请参考第一节 䄑

典型题型五 利用导数定义求极限、函数方程

$$\text{导数定义 } f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \dots (1) \text{ 或 } f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \dots (2).$$

由(1)(2)易得,若右边极限存在且被减数中对应符号 $f(\cdot)$ 内表达式与减数中之差恰好等于极限式分母的多少倍,则该极限就为函数在该指定点导数的几倍。

第三讲 清华大学考研名师大串讲预测密押典型题及参考答案

预测题 1 求函数 $f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$ 的一、二阶导数并讨论其连续性。

预测题 2 求下列函数 $f(x)$ 的导数:

(1) 设 $f(x) = |1 - 2x| \sin(2 + x + \sqrt{1 + x^2})$, 求 $f'(x)$;

(2) 设 $f(x) = \begin{cases} \frac{\sin 2x}{2x}, & x > 0, \\ (1 + x^2)^{\frac{4}{3}} + \cos 2x - 1, & x \leq 0, \end{cases}$ 求 $f'(x)$ 及 $f'(0)$;

(3) 设 $g(x) = \begin{cases} x^2 \arctan \frac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0, \end{cases}$ $f(x)$ 处处可导, 求 $f(g(x))$ 的导数。

预测题 3 设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上二次可微, 且对任意 $x \in (a, b)$ 有 $|f'(x)| \leq M$, 又 $f(a) = f(b)$, 证明

$$|f'(x)| \leq \frac{M}{2}(b - a) \quad (x \in [a, b]; b > a)$$

预测题 4 设 $f(x) < 0, f(0) = 0$, 证明当 $0 < a \leq b$ 时, $f(a + b) < f(a) + f(b)$ 。

预测题 5 求函数 $y = (x - 1)e^{\frac{\pi}{2} + \arctan x}$ 的单调区间和极值, 并求该函数图形的渐近线。(2000年试题 7分)

预测题 6 确定常数 a 和 b , 使得函数 $f(x) = \begin{cases} ax + b, & x > 1 \\ x^2, & x \leq 1 \end{cases}$ 处处可导。

◆ 参 考 答 案 ◆

预测题 1 解 先求一阶导数, 当 $x \neq 0$ 时, $f'(x) = \frac{2}{x^3} e^{-1/x^2}$; 当 $x = 0$ 时, 由定义有

$$f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{-1/x^2}}{x} \quad (\text{无法直接用洛必达法则})$$

令 $t = \frac{1}{x}$, 则当 $x \rightarrow 0$ 时, $t \rightarrow \infty$, 于是

$$f'(0) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{t}{e^{\frac{1}{t^2}}} \stackrel{\text{洛}}{=} \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{2te^{\frac{1}{t^2}}} = 0$$

因此, $f'(x)$ 的一阶导数在 $(-\infty, +\infty)$ 上存在, 又

$$\lim_{x \rightarrow 0} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2}{x^3} e^{-1/x^2} \stackrel{t=1/x}{=} \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{2t^3}{e^{\frac{1}{t^2}}} \stackrel{\text{洛}}{=} \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{3t}{e^{\frac{1}{t^2}}} = 0 = f'(0)$$

即 $f'(x)$ 的一阶导函数在 $x = 0$ 处连续, 从而 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上连续, 而

$$f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 e^{-1/x^2}}{x} \stackrel{t=1/x}{=} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2t}{e^{\frac{1}{t^2}}} = 0$$

类似上面的讨论易知 $f(x)$ 的二阶导函数

$$f'(x) = \begin{cases} \left(-\frac{4}{x^6} - \frac{6}{x^4}\right) \cdot e^{1/x^2}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

在 $(-\infty, +\infty)$ 上存在且连续.

预测题 2 解: (1) 这是分段函数, 可改写成

$$f(x) = \begin{cases} (1-2x) \sin(2+x+\sqrt{1+x^2}), & x \leq \frac{1}{2}, \\ (2x-1) \sin(2+x+\sqrt{1+x^2}), & x \geq \frac{1}{2}. \end{cases}$$

当 $x \leq \frac{1}{2}$ 时,

$$f(x) = -2 \sin(2+x+\sqrt{1+x^2}) + \frac{(1-2x)(x+\sqrt{1+x^2}) \cos(2+x+\sqrt{1+x^2})}{\sqrt{1+x^2}},$$

$$x = \frac{1}{2} \text{ 处是右导数: } f'_+(\frac{1}{2}) = -2 \sin(\frac{5+\sqrt{5}}{2});$$

当 $x \geq \frac{1}{2}$ 时,

$$f(x) = 2 \sin(2+x+\sqrt{1+x^2}) + \frac{(2x-1)(x+\sqrt{1+x^2}) \cos(2+x+\sqrt{1+x^2})}{\sqrt{1+x^2}},$$

$$x = \frac{1}{2} \text{ 处是左导数: } f'_-(\frac{1}{2}) = 2 \sin(\frac{5+\sqrt{5}}{2});$$

因 $f'_+(\frac{1}{2}) \neq f'_-(\frac{1}{2})$, 所以 $f'(\frac{1}{2})$ 不存在.

(2) 这是分段函数, 连接点 $x=0$ 其中左边一段的表达式包括连接点, 即 $x \leq 0$, 于是可得

$$\text{当 } x \leq 0 \text{ 时, } f(x) = \frac{8}{3} x (1+x^2)^{\frac{1}{3}} - 2 \sin 2x; \quad x=0 \text{ 处是左导数: } f'_-(0) = 0;$$

$$\text{当 } x > 0 \text{ 时, } f(x) = \left(\frac{\sin 2x}{2x} \right)' = \frac{2x \cos 2x - \sin 2x}{2x^2},$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{(2x \cos 2x - \sin 2x)'}{4x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-4x \sin 2x}{4x} = 0.$$

又 $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 1$, 即 $f(x)$ 在 $x=0$ 连续 $\Rightarrow f'_+(0) = 0$.

$$\text{因此 } f(x) = \begin{cases} \frac{2x \cos 2x - \sin 2x}{2x^2}, & x > 0 \\ \frac{8}{3} x (1+x^2)^{\frac{1}{3}} - 2 \sin 2x, & x \leq 0 \end{cases}.$$

这也是分段函数, 为求 $f'(0)$ 要分别求 $f'_+(0)$ 与 $f'_-(0)$, 同前可求 $f'_-(0)$:

$$\begin{aligned} f'_-(0) &= \left(\frac{8}{3} x (1+x^2)^{\frac{1}{3}} - 2 \sin 2x \right)' \Big|_{x=0} \\ &= \left(\frac{8}{3} (1+x^2)^{\frac{1}{3}} - 4 \cos 2x \right) \Big|_{x=0} = \frac{8}{3} - 4 = -\frac{4}{3} \end{aligned}$$

按定义求 $f'_+(0)$ 则有

$$\begin{aligned} f'_+(0) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2x \cos 2x - \sin 2x}{2x^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-4x \sin 2x}{6x^2} = -\frac{4}{3} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin 2x}{2x} = -\frac{4}{3}. \end{aligned}$$

因为 $f'_+(0) = f'_-(0) = -\frac{4}{3}$, 所以 $f'(0) = -\frac{4}{3}$.

(3) 若 $g(x)$ 已求, 则由复合函数求导法可得 $\frac{d}{dx} f(g(x)) = f'(g(x)) g'(x)$, 故只须求 $g'(x)$.

$$\text{当 } x \neq 0 \text{ 时, } g(x) = 2x \arctan \frac{1}{x} + x^2 \frac{1}{1 + \frac{1}{x^2}} \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) = 2x \arctan \frac{1}{x} - \frac{x^2}{1 + x^2};$$

$$\text{当 } x = 0 \text{ 时, 按定义求 } g(0) \text{ 则有 } g(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x) - g(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \arctan \frac{1}{x}}{x} = 0.$$

$$\text{因此, } \frac{d}{dx} f(g(x)) = \begin{cases} f(x^2 \arctan \frac{1}{x}) (2x \arctan \frac{1}{x} - \frac{x^2}{1 + x^2}), & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

预测题 3 证明 因为 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上二次可微, 且 $|f(x)| \leq M$, 故可用泰勒公式证明.

对 $\forall x \in [a, b]$ 分别将 $f(b), f(a)$ 在 $x_0 = x$ 处展开一阶泰勒公式:

$$f(b) = f(x) + f'(x)(b-x) + \frac{1}{2!} f''(\xi_1)(b-x)^2, \quad (x < \xi_1 < b)$$

$$f(a) = f(x) + f'(x)(a-x) + \frac{1}{2!} f''(\xi_2)(a-x)^2, \quad (a < \xi_2 < x)$$

上面两式相减, 得

$$\begin{aligned} f(b) - f(a) &= \frac{1}{b-a} [f(b) - f(a)] + \frac{1}{2!} [f''(\xi_2)(a-x)^2 - f''(\xi_1)(b-x)^2] \\ &= \frac{1}{2(b-a)} [f''(\xi_2)(a-x)^2 - f''(\xi_1)(b-x)^2] \end{aligned}$$

因为当 $a < x < b$ 时, $|f''(x)| \leq M$, 所以

$$|f(b) - f(a)| \leq \frac{M}{2(b-a)} [(a-x)^2 + (b-x)^2]$$

当 $a \leq x \leq b$ 时, $\frac{(b-a)^2}{2} \leq (a-x)^2 + (b-x)^2 \leq (b-a)^2$, 因此

$$|f(b) - f(a)| \leq \frac{M}{2} (b-a).$$

预测题 4 证明 要证 $f(a+b) < f(a) + f(b)$, 只要证 $f(a+b) - f(b) < f(a) - f(0)$.

由微分中值定理知

$$\frac{f(a)}{a} = \frac{f(a) - f(0)}{a - 0} = f'(\xi_1) \quad (0 < \xi_1 < a), \quad \frac{f(a+b) - f(b)}{a} = f'(\xi_2) \quad (b < \xi_2 < a+b)$$

而 $0 < \xi_1 < a \leq b < \xi_2 < a+b$, 因为 $f'(x) < 0$, 故 $f'(x)$ 严格单调减少, 所以 $f'(\xi_2) < f'(\xi_1)$,

从而有

$$\frac{f(a+b) - f(b)}{a} < \frac{f(a)}{a}$$

即

$$f(a+b) < f(a) + f(b)$$

预测题 5 解 求函数 y 的导数

$$y' = \frac{x^2 + x}{1 + x^2} e^{\frac{\pi}{2} + \arctan x}$$

令 $y' = 0$ 得驻点 $x_1 = 0, x_2 = -1$.

列表

x	$(-\infty, -1)$	-1	$(-1, 0)$	0	$(0, +\infty)$
y'	$+$	0	$-$	0	$+$
y	$\nearrow$	$-2e^{\frac{\pi}{2}}$	$\searrow$	$-e^{\frac{\pi}{2}}$	$\nearrow$

由此可见 递增区间为 $(-\infty, -1) \cup (0, +\infty)$ 递减区间为 $(-1, 0)$.

极小值为 $f(0) = -e^{\frac{\pi}{2}}$ 极大值为 $f(-1) = -2e^{\frac{\pi}{2}}$.

由于

$$a_1 = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = e, \quad b_1 = \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - a_1 x] = -2e$$

$$a_2 = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = 1, b_2 = \lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - a_2 x] = -2$$

可见渐近线为

$$y_1 = a_1 x + b_1 = \bar{e}(x - 2)$$

$$y_2 = a_2 x + b_2 = x - 2$$

预测题 6 解 这是分段函数. 当 $x > 1$ 与 $x < 1$ 时分别与某初等函数相等, 是可导的. 关键是确定 a 和 b , 使得 $f(x)$ 在 $x = 1$ 处可导. 对这类问题是根据 ① 函数在某点可导则在该点处连续; ② 函数在某点处可导, 则在该点处左、右导数相等这两个性质, 建立两个待定常数之间的两个关系式, 然后解出来.

由 $f(x)$ 在 $x = 1$ 处可导, 得 $f(x)$ 在 $x = 1$ 处连续. 由表达式知, $f(x)$ 在 $x = 1$ 是左连续的. 于是, $f(x)$ 在 $x = 1$ 连续 $\Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 1+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1+} (ax + b) = f(1) \Rightarrow a + b = 1$.

又 $f(x)$ 在 $x = 1$ 可导 $\Leftrightarrow f'_+(1) = f'_-(1)$.

在 $a + b = 1$ 条件下, $f(x)$ 可改写成 $f(x) = \begin{cases} ax + b, & x \geq 1, \\ x^2, & x \leq 1. \end{cases}$

于是 $f'_+(1) = (ax + b)' \Big|_{x=1} = a, f'_-(1) = (x^2)' \Big|_{x=1} = 2$.

因此 $f(x)$ 在 $x = 1$ 可导 $\Leftrightarrow \begin{cases} a + b = 1, \\ a = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = -1. \end{cases}$

故仅当 $a = 2, b = -1$ 时 $f(x)$ 处处可导.

第三节 一元函数积分学之重点难点分析·典型题型·预测押题

第一讲 清华大学考研名师重点、热点分析浓缩大串讲

特别注意

该节内容数一、数二考查要求基本相同. 属于一级重点章节. 属于

本节和一元函数微分学一样可分为概念部分、运算部分、理论证明部分以及应用部分. 属于

概念部分有原函数的概念, 定积分、不定积分的概念以及广义积分的概念. 考试的重点、热点偏重对定积分概念的理解上. 属于

注意第一换元积分, 第二换元积分以及分部积分的技巧与使用条件.

运算部分大纲要求掌握定积分和不定积分的基本公式以及换元积分法与分部积分法. 会求有理函数, 三角函数的有理式及简单无理函数的积分等等. 但考查的重点、热点是定积分与不定积分的换元积分法和分部积分法. 事实上求无理函数、三角函数的有理式及简单无理函数的积分不过是换元操作法和分部积分法在某个领域的应用而已. 在应用的过程中, 要求考生对定积分、不定积分的基本公式相当熟练. 以下是常用基本公式, 也是读者必须背熟的公式. 属于

$$(1) \int 0 dx = c$$

$$(2) \int x^\alpha dx = \frac{1}{\alpha+1} x^{\alpha+1} + c \quad (\alpha \neq -1)$$

$$(3) \int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + c$$

$$(4) \int a^x dx = \frac{1}{\ln a} a^x + c \quad (a > 0)$$

$$(5) \int e^x dx = e^x + c$$

$$(6) \int \sin x dx = -\cos x + c \quad (\text{注意负号})$$

$$(7) \int \cos x dx = \sin x + c$$

$$(8) \int \sec^2 x dx = \tan x + c$$

$$(9) \int \csc^2 x dx = -\cot x + c \text{ (注意负号)}$$

$$(10) \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x + c$$

$$(11) \int \frac{1}{1+x^2} dx = \arctan x + c$$

$$(12) \int \tan x dx = -\ln |\cos x| + c \text{ (注意负号与绝对值号)}$$

$$(13) \int \cot x dx = \ln |\sin x| + c$$

$$(14) \int \sec x dx = \ln |\sec x + \tan x| + c$$

$$(15) \int \csc x dx = \ln |\csc x - \cot x| + c$$

$$(16) \int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a} \arctan \frac{x}{a} + c$$

$$(17) \int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right| + c$$

$$(18) \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - a^2}} = \operatorname{arcsin} \frac{x}{a} + c \text{ (} a > 0 \text{)}$$

$$(19) \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln |x + \sqrt{x^2 \pm a^2}| + c$$

$$(20) \int \sinh x dx = \cosh x + c$$

$$(21) \int \cosh x dx = \sinh x + c$$

$$(22) \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin x)^n dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos x)^n dx$$

$$= \begin{cases} \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n-3}{n-2} \cdots \frac{1}{2} \times \frac{n}{2}, & \text{当 } n \text{ 为奇数} \\ \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n-3}{n-2} \cdots \frac{2}{3} \times 1, & \text{当 } n \text{ 为偶数} \end{cases}$$

换元法分为第一换元法和第二换元法,第一换元法即凑微分法,它主要靠考生对以上基本公式的熟练程度以及考生的观察力解题.下面讲第二换元法常用的几种情况及对策:

(1) 若被积函数含有如下二次根式,可用三角函数(或双曲函数)代换,代换目的就是去根号:

$$\sqrt{a^2 - x^2}, \text{ 令 } x = a \sin t \text{ (} -\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2} \text{)} \text{ 或 } x = a \cos t \text{ (} -\infty < t < +\infty \text{)}$$

$$\sqrt{a^2 + x^2}, \text{ 令 } x = a \tan t \text{ (} -\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2} \text{)} \text{ 或 } x = a \sinh t \text{ (} -\infty < t < +\infty \text{)}$$

$$\sqrt{x^2 - a^2}, \text{ 令 } x = a \sec t \text{ (} 0 < t < \frac{\pi}{2} \text{)} \text{ 或 } x = a \cosh t \text{ (} 0 < t < \infty \text{)}.$$

(2) 若被积函数含有指数函数 e^{kx} (k 为常数)可用代换 $t = e^{kx}$

(3) 倒代换:令 $t = \frac{1}{x}$, 设 m, n 分别表示分子分母的最高次数, $n - m > 1$ 时,用倒代换比较简便.例如求

$$\int \frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{x^4} dx$$

$$\text{令 } x = \frac{1}{t}, \text{ 则 } dx = -\frac{1}{t^2} dt$$

$$\text{原式} = \int t \sqrt{a^2 - \frac{1}{t^2}} \left(-\frac{1}{t^2} dt \right) = -\int \sqrt{a^2 t^2 - 1} t dt$$