



极值问题历来是数学竞赛中的热点问题之一,而组合极值则是极值问题中的一个难点.

所谓组合极值,是指其函数自变量的取值为自然数或整数,或者问题涉及集合、子集与元素等一些离散的变量,要求在特定条件(未必是变量满足的等式或不等式,它常常是变量具有的某种性质)下,求出有关量能达到的最大值或最小值.

从问题结构上看,组合极值包括这样两个方面:论证与构造.“论证”是论证某种量满足某个不等式或论证某些对象具有某种性质,“构造”是构造一组合乎题设条件的对象或构造使命题论断不成立的反例.这两个方面无论是从思考问题的角度还是从处理问题的方式上往往都有着较大的差别,而且两者都需要灵活的思路、丰富的想象与创造性的构想,因而它常常是数学竞赛考察的重点.

从极值对象的类型上看,组合极值可分为“和积型”极值和“参数型”极值.所谓“和积型”极值,是指求极值的函数的表现形式是“和”或“积”的形式,本书前5单元介绍的就是求这种类型极值的5种常用方法.所谓“参数型”极值,是指求极值的对象或问题涉及某个参数,这种极值的主要特点是没有确定的待求极值的函数表达式,本书后8单元介绍的就是求这种类型极值的8种常用方法.

对于“参数型”极值,根据问题的提法不同,又可分为“存在参数型”极值与“全范围参数型”极值.所谓“存在参数型”极值,是指参数 k 具有这样的性质:存在某些与 k 有关的对象具有性质 p .此时,其“论证”是要证明:如果 $k > k_0$ (或 $k < k_0$),则任何合乎题设条件的对象都不具有性质 p ,由此得到不等式 $k \leq k_0$ (或 $k \geq k_0$).其“构造”是对 $k = k_0$,构造一个具有性质 p 的合乎题设条件的对象.简言之,是“论证用于不等式,构造用于等式”.所谓“全范围参数型”极值,是指对任何合乎题设条件的对象,参数 k 都具有某种性质 p .此

时,其“构造”是要解决这样的问题:如果 $k > k_0$ (或 $k < k_0$),则存在合乎题设条件的对象使 k 不具有性质 p ,从而得到关于 k 的一个不等式 $k \leq k_0$ (或 $k \geq k_0$). 而其“论证”则是证明 $k = k_0$ 时, k 确实具有性质 p . 简言之,是“论证用于等式,构造用于不等式”. 读者在阅读这两类问题时要注意它们在解题手法上的区别.

本书各单元虽有联系,但又相对独立,阅读时未必要遵循单元的先后顺序,可以先阅读自己感兴趣的部分,一些难度较大的问题也可先跳过去,待对书中所述方法有比较全面的把握时,再回过头来解决先前遗留的问题. 每个单元都配有习题,一般可采用相应单元介绍的方法求解,书后附有解答以供查对. 但读者不必囿于书中的方法,应尽量提出自己独特的创造性的见解.

本书可供高中学生、师范院校数学系师生和广大奥林匹克数学爱好者阅读.

限于作者水平,书中谬误难免,敬请读者不吝指正.

冯跃峰

2004年8月



录



1	不等式控制	001
2	累次极值	006
3	局部调整	012
4	对称处理	020
5	磨光变换	025
6	间距估计	032
7	划块估计	035
8	猜想与反证	044
9	整体估计	051
10	参数估计	057
11	算两次	064
12	缩小包围圈	071
13	考察特例	077
	习题解答	089

001



组合极值的一个显著特点,就是其约束条件或所求的极值的函数式较复杂.所谓不等式控制,就是对约束条件或极值函数进行放缩,使条件与极值函数之间的联系趋于明显.通过放缩,使问题接近于一种标准形式:在 $f(x, y) = 0$ 下,求 $u = g(x, y)$ 的最值,从而将组合极值化归为一般的极值求解.

不等式控制,通常有两种方式:一是对约束条件进行放缩,使隐蔽的约束条件明显化;二是对极值函数进行放缩,使复杂的函数式简单化.

例 1 设 m 个互异的正偶数与 n 个互异的正奇数的和为 1987,求 $3m + 4n$ 的最大值.(第 2 届 CMO 试题)

分析与解 本题的难点在于约束条件较复杂,可先利用不等式将其化简,进而将其放缩到出现目标函数式.

设题给的 m 个正偶数为 a_1, a_2, \dots, a_m , n 个正奇数为 b_1, b_2, \dots, b_n , 则

$$(a_1 + a_2 + \dots + a_m) + (b_1 + b_2 + \dots + b_n) = 1987. \quad ①$$

注意到极值函数是关于 m, n 的函数,而在约束条件中, m, n 仅作为各变量的下标.于是,应将①中对 a_1, a_2, \dots, a_m 及 b_1, b_2, \dots, b_n 的约束转化为对 m, n 的约束.

因为 a_1, a_2, \dots, a_m 与 b_1, b_2, \dots, b_n 是互异的正偶数与正奇数,所以

$$\begin{aligned} 1987 &= (a_1 + a_2 + \dots + a_m) + (b_1 + b_2 + \dots + b_n) \\ &\geq (2 + 4 + 6 + \dots + 2m) + (1 + 3 + \dots + 2n - 1) \\ &= m^2 + n^2 + m. \end{aligned} \quad ②$$

注意到我们的目标是: $3m + 4n \leq A$ (常数) 的形式,呈现 Cauchy 不等式结构,所以应将②的右边配方,化为“平方和”.从而

$$1987 + \frac{1}{4} \geq \left(m + \frac{1}{2}\right)^2 + n^2,$$

$$\begin{aligned} \left(1987 + \frac{1}{4}\right)(3^2 + 4^2) &\geq (3^2 + 4^2) \left[\left(m + \frac{1}{2}\right)^2 + n^2\right] \\ &\geq \left(3\left(m + \frac{1}{2}\right) + 4n\right)^2, \end{aligned}$$

所以 $3m + \frac{3}{2} + 4n \leq 5\sqrt{1987 + \frac{1}{4}}$, 所以 $3m + 4n \leq \left[5\sqrt{1987 + \frac{1}{4}} - \frac{3}{2}\right] = 221$.

下面构造一组数,使不等式成立等号. 先找 (m, n) , 使 $3m + 4n = 221$.

此不定方程有多个解,但为了使 (m, n) 满足②,应使相应的偶数和奇数都尽可能小,这就要求 m 与 n 充分接近. 通过试验,得到 $m = 27, n = 35$ 时, $3m + 4n = 221$, 且 $m^2 + n^2 + m = 1981 < 1987$, 满足②.

取最小的 27 个正偶数为 $a_1 = 2, a_2 = 4, \dots, a_{27} = 54$, 最小的 35 个正奇数为 $b_1 = 1, b_2 = 3, \dots, b_{34} = 67, b_{35} = 69$, 则

$$(a_1 + a_2 + \dots + a_{27}) + (b_1 + b_2 + \dots + b_{35}) = 1987 - 6,$$

再将 b_{35} 修改为: $69 + 6 = 75$, 得 $(a_1 + a_2 + \dots + a_{27}) + (b_1 + b_2 + \dots + b_{35}) = 1987$.

综上所述, $3m + 4n$ 的最大值为 221.

注 本例解题的关键,是将①式化为②式,而后面利用 Cauchy 不等式则不是本质的. 实际上,得到②式后,求 $3m + 4n$ 的极值也可用三角代换:

由②,可令 $r = \sqrt{\left(m + \frac{1}{2}\right)^2 + n^2}$, $m = -\frac{1}{2} + r\cos\theta$, $n = r\sin\theta$,

则 $3m + 4n = 3r\cos\theta + 4r\sin\theta - \frac{3}{2} = 5r\sin(\theta + t) - \frac{3}{2} \leq 5r - \frac{3}{2} \leq 5\sqrt{1987 + \frac{1}{4}} - \frac{3}{2}$ (下同).

例 2 设 $x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbf{R}^+$, $\sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i} = A$ (常数), 对给定的正整数 k ,

求 $\sum \frac{1}{x_{i_1} + x_{i_2} + \dots + x_{i_k}}$ 的最大值. 其中求和对 $1, 2, \dots, n$ 中的所有 k -元数组 (i_1, i_2, \dots, i_k) 进行.

分析与解 本题的难点在于目标函数较复杂,期望利用不等式将其化简.由目标函数的结构特征,想到将 $\frac{1}{x_{i_1} + x_{i_2} + \cdots + x_{i_k}}$ 化为 $\frac{1}{x_{i_1}} + \frac{1}{x_{i_2}} + \cdots + \frac{1}{x_{i_k}}$ 以利用条件 $\sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i} = A$. 这恰好符合“倒数型不等式”: $\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_k} \geq \frac{k^2}{a_1 + a_2 + \cdots + a_k}$ 的特征. 于是,利用“倒数型不等式”,有

$$\frac{1}{a_1 + a_2 + \cdots + a_k} \leq \frac{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_k}}{k^2}.$$

所以
$$\sum \frac{1}{x_{i_1} + x_{i_2} + \cdots + x_{i_k}} \leq \sum \frac{\frac{1}{x_{i_1}} + \frac{1}{x_{i_2}} + \cdots + \frac{1}{x_{i_k}}}{k^2} = \frac{1}{k^2} \sum \left(\frac{1}{x_{i_1}} + \frac{1}{x_{i_2}} + \cdots + \frac{1}{x_{i_k}} \right).$$

考察上式右边“和式”中每个项 $\frac{1}{x_{i_j}}$ ($j = 1, 2, \dots, k$) 出现的次数. 显然, $\frac{1}{x_{i_j}}$ 出现一次,等价于出现一个 $(\frac{1}{x_1}, \frac{1}{x_2}, \dots, \frac{1}{x_k})$ 的含 $\frac{1}{x_{i_j}}$ 的 k -组合. 因为含有 $\frac{1}{x_{i_j}}$ 的 k -组合有 C_{n-1}^{k-1} 个,所以 $\frac{1}{x_{i_j}}$ 在“和式”中共出现 C_{n-1}^{k-1} 次,所以

$$\frac{1}{k^2} \sum \left(\frac{1}{x_{i_1}} + \frac{1}{x_{i_2}} + \cdots + \frac{1}{x_{i_k}} \right) = \frac{1}{k^2} C_{n-1}^{k-1} \sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i} = \frac{A}{k^2} C_{n-1}^{k-1}.$$

其中等式在 $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = \frac{n}{A}$ 时成立.

故 $\sum \frac{1}{x_{i_1} + x_{i_2} + \cdots + x_{i_k}}$ 的最大值为 $\frac{A}{k^2} C_{n-1}^{k-1}$.

例3 设 P 是体积为 1 的正四面体 T 内(包括边界)的一个点,过 P 作 4 个平面平行 T 的 4 个面,将 T 分成 14 块, $f(P)$ 是那些既不是四面体也不是平行六面体的几何体的体积之和,求 $f(P)$ 的取值范围. (第 31 届 IMO 备选题)

解 设 P 到正四面体 $ABCD$ 的四个面的距离为 d_1, d_2, d_3, d_4 .

令 $x_i = \frac{d_i}{h}$, h 为正四面体的高. 则 $\sum_{i=1}^4 x_i = 1$.

由于 T 分成的 14 块中, 显然有 4 个体积分别为 x_i^3 的四面体. 此外, 还有 4 个体积分别为 $6 \prod_{\substack{j \neq i \\ 1 \leq j \leq 4}} x_j$ 的平行六面体 ($i = 1, 2, 3, 4$). 比如, 以 A 出发的 3 条棱为 3 度方向可得一个平行六面体, 由对称性可作出 4 个平行六面体. 于是,

$$f(P) = 1 - \sum_{i=1}^4 x_i^3 - 6 \sum_{1 \leq i < j < k \leq 4} x_i x_j x_k.$$

显然, $f(P) \geq 0$.

其次, 不妨设 $x_1 + x_2 \leq \frac{1}{2}$. 令 $x_1 + x_2 = t \leq \frac{1}{2}$, $x_1 x_2 = u \geq 0$, $x_3 x_4 =$

$v \geq 0$. 由 $\sum_{i=1}^4 x_i = 1$, 有

$$\sum_{i=1}^4 x_i^3 = (t^3 - 3tu) + (1-t)^3 - 3(1-t)v,$$

$$\sum_{1 \leq i < j < k \leq 4} x_i x_j x_k = (1-t)u + tv,$$

所以 $1 - f(P) = 1 - 3t + 3t^2 + 3(2 - 3t)u + 3(3t - 1)v$
 $\geq 1 - 3t + 3t^2 + 3(3t - 1)v.$

(1) 若 $\frac{1}{3} < t \leq \frac{1}{2}$, 则

$$3t - 1 \geq 0, 1 - f(P) \geq 1 - 3t + 3t^2 \geq \frac{1}{4},$$

其中等式在 $t = \frac{1}{2}$, $u = v = 0$, 即 P 为棱的中点时成立.

(2) 若 $0 \leq t \leq \frac{1}{3}$, 则 $3t - 1 \leq 0$, 而 $v = x_3 x_4 \leq \frac{(x_3 + x_4)^2}{4} = \frac{(1-t)^2}{4}$,

所以

$$\begin{aligned} 1 - f(P) &\geq 1 - 3t + 3t^2 + 3(3t - 1) \cdot \frac{(1-t)^2}{4} \\ &= \frac{3(3t^2 + 1 - 3t)t}{4} + \frac{1}{4} \geq \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

所以, 不论哪种情形, 都有 $0 \leq f(P) \leq \frac{3}{4}$.

又 P 为四面体的顶点时, $f(P) = 0$; P 为四面体的棱的中点时,
 $f(P) = \frac{3}{4}$.

综上所述, $f(P)$ 的取值范围是 $0 \leq f(P) \leq \frac{3}{4}$.

习 题 1

- 1** 设 $a, b, c, a+b-c, b+c-a, c+a-b, a+b+c$ 是 7 个两两不同的质数, 且 a, b, c 中有两个数的和是 800. 设 d 是这 7 个质数中最大数与最小数的差, 求 d 的最大可能值. (2001 年中国数学奥林匹克试题)
- 2** 设 $2n$ 个实数 a_1, a_2, \dots, a_{2n} , 满足条件 $\sum_{i=1}^{2n-1} (a_{i+1} - a_i)^2 = 1$, 求 $(a_{n+1} + a_{n+2} + \dots + a_{2n}) - (a_1 + a_2 + \dots + a_n)$ 的最大值. (2003 年西部数学奥林匹克试题)
- 3** 设 a_1, a_2, \dots, a_n 是 $1, 2, \dots, n$ 的一个排列, 求 $S_n = |a_1 - 1| + |a_2 - 2| + \dots + |a_n - n|$ 的最大值.
- 4** 设 $x_k (k = 1, 2, \dots, 1991)$ 满足 $|x_1 - x_2| + |x_2 - x_3| + \dots + |x_{1990} - x_{1991}| = 1991$. 令 $y_k = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_k}{k} (k = 1, 2, \dots, 1991)$. 求 $F = |y_1 - y_2| + |y_2 - y_3| + \dots + |y_{1990} - y_{1991}|$ 的最大值. (第 25 届全苏数学奥林匹克试题)
- 5** 设 $x_1, x_2, \dots, x_{1990}$ 是 $1, 2, \dots, 1990$ 的一个排列, 求 $F = |\dots| |x_1 - x_2| - x_3| - \dots - x_{1990}|$ 的最大值. (第 24 届全苏数学奥林匹克试题)
- 6** 设 $0 < p \leq a_i \leq q, b_i$ 是 a_i 的一个排列 ($1 \leq i \leq n$), 求 $F = \sum_{i=1}^n \frac{a_i}{b_i}$ 的最值. (匈牙利数学奥林匹克试题)



组合极值的一个特点是极值函数中变动的量较多,难于发现函数的变化趋势.如果我们先冻结若干个变量,即视若干个变量为常数,则其函数的变化对剩下的变量的依赖关系就趋于明显,由此可比较容易地求出第一次极值.然后“解冻”原来的变量,进而求出函数的极值.

冻结变量一般有两种方法:一是冻结一个变量,它通常用于求三元函数的极值:对于三元函数 $f(x, y, z)$,若固定变量 z ,则函数可看成是关于 x, y 的二元函数.在此基础上求出二元函数的极值 $G(z)$,再视 z 为变量,对 $G(z)$ 求极值.它的基本思路是:

$$u = f(x, y, z) = g(x, y) \leq G(z) \leq C.$$

但在有的情况下, $G(z)$ 的表达式是一种分段函数,则上述思路又可表示为

$$u = f(x, y, z) = g(x, y) \leq G(z) = \begin{cases} G_1(z), & (z \in A) \\ G_2(z), & (z \in B) \end{cases}$$

$$\leq \begin{cases} A_1, & (z \in A) \\ A_2, & (z \in B) \end{cases} \Rightarrow u \leq \max\{A_1, A_2\}.$$

特别地,如果 $g(x, y) \leq G(z) \leq C$ 中的等式不同时成立,则固定 z 的取值时,须分类处理(单独讨论 z 的若干特殊取值).其基本思路为:

$$u = f(x, y, z) = \begin{cases} g_1(x, y) & (z = z_1) \\ \dots\dots & \dots\dots \\ g_k(x, y) & (z = z_k) \\ g(x, y) & (z \in A) \end{cases} \leq \begin{cases} G_1 & (z = z_1) \\ \dots\dots & \dots\dots \\ G_k & (z = z_k) \\ G(z) \leq G_A & (z \in A) \end{cases}$$

$$\Rightarrow u \leq G, \text{其中 } G = \max\{G_1, G_2, \dots, G_k, G_A\}.$$

二是冻结多个变量,它通常用于求多(超过3)元函数的极值:在多元函

数的解析式中,选择其中一个字母为主变元,冻结其他的所有变元,则函数变为一元函数 $f(t)$.至此,先求出 $f(t)$ 的极值点 $f(t_0)$,再对 $f(t_0)$ 冻结变元(因为 $f(t_0)$ 是关于其他变元的函数),又化为一元函数求解.如此下去,直至求出函数的极值.

从实质上看,累次极值就是放缩法,只是放缩方式是采用固定变量逐步消元.

我们先看一个求一般函数的极值的例子.

例1 设 x, y, z 为非负实数, $x + y + z = 1$, 求 $F = 2x^2 + y + 3z^2$ 的最值.

解 首先,采用代入消元,有 $y = 1 - x - z$, 所以

$$\begin{aligned} F &= 2x^2 + 1 - x - z + 3z^2 \\ &= 2\left(x - \frac{1}{4}\right)^2 + 3\left(z - \frac{1}{6}\right)^2 + \frac{19}{24} \\ &\geq \frac{19}{24}. \end{aligned}$$

又 $F\left(\frac{1}{4}, \frac{7}{12}, \frac{1}{6}\right) = \frac{19}{24}$, 所以 F 的最小值为 $\frac{19}{24}$.

下面用求累次极值的方法求 F 的最大值. 固定变量 z , 则 $x + y = 1 - z$ (常数).

对 $F = 2x^2 + y + 3z^2$, 因为 z 为常数, 所以只须求 $2x^2 + y = A$ 的最大值, 其中 $x + y = 1 - z$. 为叙述问题方便, 令 $1 - z = t$, 则 $x + y = t$, $0 \leq x, y \leq t \leq 1$, t 为常数.

因为 $A = 2x^2 + y = 2x^2 + t - x$ (代入消元), 注意到 $0 \leq x \leq t \leq 1$, 而二次函数的开口向上, 顶点处不是最大值, 所以 A 只能在 $x = 0$ 或 $x = t$ 处取最大值. 所以,

$$g(z) = A_{\max} = \max\{t, 2t^2\} = \begin{cases} t & (0 \leq t \leq \frac{1}{2}), \\ 2t^2 & (\frac{1}{2} \leq t \leq 1). \end{cases}$$

还原成原变量, 有

$$g(z) = A_{\max} = \max\{1 - z, 2(1 - z)^2\} = \begin{cases} 1 - z & (\frac{1}{2} \leq z \leq 1), \\ 2(1 - z)^2 & (0 \leq z \leq \frac{1}{2}). \end{cases}$$

再对 $g(z)$ 求最大值.

当 $0 \leq z \leq \frac{1}{2}$ 时, $F \leq g(z) + 3z^2 = 2(1-z)^2 + 3z^2 = 5z^2 - 4z + 2 \leq 2$.

当 $\frac{1}{2} \leq z \leq 1$ 时, $F \leq g(z) + 3z^2 = (1-z) + 3z^2 \leq 3$.

由此可见, 对一切 x, y, z , 恒有 $F \leq 3$, 其中等式在 $x = y = 0, z = 1$ 时成立. 所以 F 的最大值为 3.

综上所述, F 的最小值为 $\frac{19}{24}$, 最大值为 3.

注 本题求 F 的最大值时, 若对次数与系数进行放缩, 则解答异常简单.

实际上, $2x^2 + y + 3z^2 \leq 2x + y + 3z \leq 3x + 3y + 3z \leq 3$.

例 2 有 1988 个单位立方体, 用它们(全部或一部分)拼成高为 1, 底边长为 a, b, c ($a < b < c$) 的三个正四棱柱 A, B, C . 现在把 A, B, C 都摆在第一象限, 使各个底边都平行于坐标轴, C 的一个顶点在坐标原点, B 在 C 上, 且 B 的任何一个单位立方体均在 C 的某个单位立方体上, 但 B 的边界不与 C 的任何边界对齐. 同样, A 在 B 上, 且 A 的任何一个单位立方体均在 B 的某个单位立方体上, 但 A 的边界不与 B 的任何边界对齐. 这样得到一个三层楼. 问: a, b, c 取何值时, 能摆出的三层楼的个数最多? (第 11 届奥地利—波兰数学竞赛试题)

分析与解 由“边界不对齐”, 有 $a \leq b-2 \leq c-4$, 这样, A 放在 B 上有 $(b-a-1)^2$ 种放法, B 放在 C 上有 $(c-b-1)^2$ 种放法. 于是, 共有 $P = (b-a-1)^2(c-b-1)^2$ 个不同的三层楼. 这样, 问题等价于: 对所有满足 $1 \leq a \leq b-2 \leq c-4, a^2 + b^2 + c^2 \leq 1988$ 的正整数 a, b, c , 求 $P = (b-a-1)^2(c-b-1)^2$ 的最大值.

显然, $P \leq (b-2)^2(c-b-1)^2$, 其中等式在 $a = 1$ 时成立. 于是, 只须对所有满足 $3 \leq b \leq c-2, b^2 + c^2 \leq 1987$ 的正整数 b, c , 求 $Q = (b-2)(c-b-1)$ 的最大值.

容易想到

$$Q \leq \frac{[(b-2) + (c-b-1)]^2}{4} = \frac{(c-3)^2}{4}. \quad (*)$$

至此, 只须求 c 的取值范围就能得出 $\frac{(c-3)^2}{4}$ 的最大值. 由条件, 有 $c^2 \leq$

$1987 - b^2 \leq 1987, c \leq 44$, 所以 $Q \leq \frac{(44-3)^2}{4} < 421, Q \leq 420$.

遗憾的是, 等号不能成立, 只能改求累次极值.

固定 c , 则

$$\begin{aligned} Q &= -b^2 + (1+c)b + 2 - 2c \\ &= -\left(b - \frac{1+c}{2}\right)^2 + \frac{(1+c)^2}{4} + 2 - 2c, \end{aligned} \quad (* *)$$

由二次函数图象可知, $Q \leq \frac{(1+c)^2}{4} + 2 - 2c = A(c)$ (当 c 为奇数时, $b = \frac{1+c}{2}$);

或 $Q \leq \frac{(1+c)^2}{4} - \frac{1}{4} + 2 - 2c = B(c)$ (当 c 为偶数时, $b = \frac{c}{2}$).

现在, 再求 $A(c)$ 、 $B(c)$ 的最大值.

由 $b^2 + c^2 \leq 1987$, 有 $c \leq 44$, 于是,

当 c 为奇数时,

$$Q \leq A(c) \leq A(43) = \frac{(1+43)^2}{4} + 2 - 86 = 400. \quad ①$$

当 c 为偶数时,

$$Q \leq B(c) \leq B(44) = \frac{(1+44)^2}{4} - \frac{1}{4} + 2 - 88 = 420. \quad ②$$

虽然恒有 $Q \leq 420$, 但等号不成立. 实际上, 要使式②式取等号, 则有 $c = 44$, 且 $b = \frac{c}{2} = 22$. 而 $(44, 22)$ 不满足 $b^2 + c^2 \leq 1987$. 由此可知, 不能统一固定 c 求 $Q = (b-2)(c-b-1)$ 的最大值, 应对 c 的取值分类讨论, 得到不同形式的极值函数.

当 $c = 44$ 时, $Q = -b^2 + 45b - 86$. 因为 $b^2 \leq 1987 - c^2 = 51, 3 \leq b \leq 7$, 所以, 当 $b = 7$ 时, Q 取最大值 180;

当 $c = 43$ 时, $3 \leq b \leq 11$, 此时, $Q \leq 279$, 等式在 $b = 11$ 时成立;

当 $c = 42$ 时, $3 \leq b \leq 14$, 此时, $Q \leq 324$, 等式在 $b = 14$ 时成立;

当 $c = 41$ 时, $3 \leq b \leq 17$, 此时, $Q \leq 345$, 等式在 $b = 17$ 时成立;

当 $c = 40$ 时, $3 \leq b \leq 19$, 此时, $Q \leq 340$, 等式在 $b = 19$ 时成立;

当 $c \leq 39$ 时, $Q \leq \frac{[(b-2) + (c-b-1)]^2}{4} = \frac{(c-3)^2}{4} \leq 18^2 = 324$.

由上可知,恒有 $Q \leq 345$ 成立. 又当 $(a, b, c) = (1, 17, 41)$ 时成立等式. 故当 $(a, b, c) = (1, 17, 41)$ 时 P 取最大值 345^2 .

例 3 给定正整数 k 及正数 a , 又 $k_1 + k_2 + \cdots + k_r = k$ (k_i 为正整数, $1 \leq r \leq k$), 求 $F = a^{k_1} + a^{k_2} + \cdots + a^{k_r}$ 的最大值. (第 8 届中国数学奥林匹克试题)

分析与解 本题的实质是将 k 分解为若干个正整数 k_i , 使 $a^{k_1} + a^{k_2} + \cdots + a^{k_r}$ 的值最大. 但其分解出的正整数的个数不确定, 因而应分两步走(求累次最值). 先固定 r , 假定 k 分解为 r 个正整数 $k_i (i = 1, 2, \dots, r)$, 求 $a^{k_1} + a^{k_2} + \cdots + a^{k_r}$ 的最大值 $f(r)$. 然后再解冻变量 r , 求 $f(r)$ 的最大值.

先走第一步. 取 $k = 6, r = 3$, 则 $k_1 + k_2 + k_3 = 6, F = a^{k_1} + a^{k_2} + a^{k_3}$.

(1) 若 $(k_1, k_2, k_3) = (2, 2, 2)$, 则 $F_1 = a^2 + a^2 + a^2 = 3a^2$;

(2) 若 $(k_1, k_2, k_3) = (1, 2, 3)$, 则 $F_2 = a + a^2 + a^3$;

(3) 若 $(k_1, k_2, k_3) = (1, 1, 4)$, 则 $F_3 = a + a + a^4 = 2a + a^4$.

$F_2 - F_1 = a - 2a^2 + a^3 = a(1 - 2a + a^2) = a(1 - a)^2 \geq 0$,

$F_3 - F_2 = a + a^4 - a^2 - a^3 = a(1 + a^3 - a^2 - a) = a(1 - a^2)(1 - a) \geq 0$, 所以 F_3 最大.

一般地, 不难想到, 当指数 k_1, k_2, \dots, k_r 尽量集中到某一个指数时, F 的值最大. 即 F 的极值点为 $(1, 1, \dots, k-r+1)$. 我们先证明下面的

引理: 设 $a > 0, x, y \in \mathbf{N}^*$, 则 $a^x + a^y \leq a^{x+y-1} + a$.

实际上, $a^{x+y-1} + a - a^x - a^y = a[a^{x-1} - 1][a^{y-1} - 1] \geq 0$.

反复利用引理, 得

$$\begin{aligned} F &= a^{k_1} + a^{k_2} + \cdots + a^{k_r} \\ &\leq a + a^{k_1+k_2-1} + a^{k_3} + \cdots + a^{k_r} \\ &\leq a + a + a^{k_1+k_2+k_3-2} + a^{k_4} + \cdots + a^{k_r} \\ &\leq \cdots \leq a + a + \cdots + a + a^{k_1+k_2+\cdots+k_r-(r-1)} \\ &= (r-1)a + a^{k-r+1}. \end{aligned}$$

下面再对 $1 \leq r \leq k$, 求 $f(r) = (r-1)a + a^{k-r+1}$ 的最大值.

令 $f(x) = a(x-1) + a^{k-x+1}$, 则因 $a(x-1)$ 、 a^{k-x+1} 都是凸函数, 所以 $f(x)$ 是凸函数. 于是 $f(r) \leq \max\{f(1), f(k)\} = \max\{a^k, ka\}$.

综上所述, F 的最大值为 $\max\{a^k, ka\}$.

 习 题 2

- 1 设 x, y, z 为非负实数, $x+y+z=a$ ($a \geq 1$), 求 $F=2x^2+y+3z^2$ 的最大值.
- 2 求一个十进制 3 位数, 使它与各位数字之和的比最小.
- 3 设 x_1, x_2, \dots, x_n 是非负实数, 记 $H = \frac{x_1}{(1+x_1+x_2+\dots+x_n)^2} + \frac{x_2}{(1+x_2+x_3+\dots+x_n)^2} + \dots + \frac{x_n}{(1+x_n)^2}$ 的最大值为 a_{n+1} . 问: 当 x_1, x_2, \dots, x_n 为何值时, H 的值达到最大? 并求出 a_n 与 a_{n-1} 之间的关系及 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$.
- 4 设 n 是给定的整数 ($n > 1$), 正整数 a, b, c, d 满足 $\frac{b}{a} + \frac{d}{c} < 1, b+d \leq n$, 求 $\frac{b}{a} + \frac{d}{c}$ 的最大值.



这种方法,是先证明所求的极值存在,然后由问题的直观性,猜想出极值点.最后从反面证明函数在其他点不能达到极值:假设函数在另外的点 (x_1, x_2, \dots, x_n) 处达到极值,经过适当调整(常常是将小的分量变大,大的分量变小),发现函数在 $(x'_1, x'_2, \dots, x'_n)$ 处的值更大或更小,从而断定它不是极值点.它的基本步骤是:

证明极值存在——猜出极值点——证明其他点非极值点——得出结论.

例 1 若干个正整数之和为 1976, 求其积的最大值. (第 18 届 IMO 试题)

分析 先看若干个数的和为 4、5、6、7、8 的简单情形. 使积最大的分拆分别为:

$$4 = 2 + 2, 5 = 2 + 3, 6 = 3 + 3, 7 = 2 + 2 + 3, 8 = 2 + 3 + 3.$$

由此猜想: 要使积最大, 其分拆的和中只含有 2 和 3, 且最多有两个 2.

解 首先, “和”为 1976 的正整数组只有有限个, 于是, 其中必有一个正整数组使各数的积达到最大.

不妨设使积达到最大的正整数组为 (x_1, x_2, \dots, x_n) , 其中 $x_1 + x_2 + \dots + x_n = 1976$. 此时, 数组的各数的积为 $P = x_1 x_2 \cdots x_n$. 我们证明, 当 P 最大时, 可使所有 x_i 具有如下性质:

$$(1) x_i \leq 3.$$

若有某个 $x_i \geq 4$, 则将 x_i 换作两个数: 2 和 $x_i - 2$, 得到一个新的数组: $(x_1, x_2, \dots, x_{i-1}, x_i - 2, 2, x_{i+1}, \dots, x_n)$. 注意到 $2(x_i - 2) = 2x_i - 4 \geq x_i$, 所以, 调整后 P 值不减.

$$(2) x_i \neq 1.$$

若有某个 $x_i = 1$, 则在数组中任取一个 x_j , 将 1 和 x_j 换作一个数: $(1 +$

x_j), 得到一个新的数组: $(x_1, x_2, \dots, x_{j-1}, x_{j+1}, \dots, x_n, x_j + 1)$. 注意到 $1 \cdot x_j < 1 + x_j$, 所以, 调整后 P 值增加.

(3) 其中等于 2 的 x_i 的个数不多于 2.

若有 $x_i = x_j = x_k = 2$, 则将 x_i, x_j, x_k 换成两个数: 3 和 3, 得到一个新的数组. 注意到 $2 \times 2 \times 2 < 3 \times 3$, 所以, 调整后 P 值增加.

由此可知, x_i 为 2 或 3, 且 2 的个数不多于 2. 注意到 $1976 = 658 \times 3 + 2$, 所以, P 的最大值为 $3^{658} \times 2$.

注 若将 1976 换作 1975, 则由 $1975 = 658 \times 3 + 1 = 657 \times 3 + 2 + 2$, 知 P 的最大值为 $3^{657} \times 2^2$.

例 2 空间有 1989 个点, 无 3 点共线, 将其分成点数互异的 30 组. 在任何 3 个不同的组中各取一点, 以这 3 个点为顶点作三角形. 问: 要使这种三角形的总数最大, 各组的点数应为多少? (第 4 届中国数学奥林匹克试题)

分析 直觉告诉我们, 各组点数相等时, 三角形总数最大. 但仔细阅读题目又发现, 分组要求各组点数互异, 于是想到各组点数应当充分接近. 为了强化这一感觉, 可用特例加以印证.

先看 10 点分为 3 组的情形. 当各组点数分别为 1、2、7 时, 三角形总数 $S = 14$, 简记为 $S(1, 2, 7) = 14$. 类似地, $S(1, 3, 6) = 18$, $S(1, 4, 5) = 20$, $S(2, 3, 5) = 30$. 其中以 $S(2, 3, 5) = 30$ 最大. 对一般情形, 由上述特例可大胆猜想: 各组点数 n_i 彼此接近时 S 最大. 所谓各 n_i 彼此接近, 是指任意相邻两个 n_t, n_{t+1} 相差尽可能小. 显然, n_t, n_{t+1} 至少相差 1, 但能否对所有 n_t, n_{t+1} 都有 $n_{t+1} - n_t = 1$ 对此进行研究, 即可找到解题的途径.

解 设各组的点数分别为: $n_1 < n_2 < \dots < n_{30}$, 则三角形的总数为:

$$S = \sum_{1 \leq i < j < k \leq 30} n_i n_j n_k, \text{ 其中 } n_1 + n_2 + \dots + n_{30} = 1989.$$

由于分组的方法是有限的, 从而 S 存在最大值. 若 n_1, n_2, \dots, n_{30} 使 S 达到最大值, 不妨设 $n_1 < n_2 < \dots < n_{30}$, 则 n_1, n_2, \dots, n_{30} 具有以下一些性质:

(1) 对任何 $t = 1, 2, \dots, 29$, 都有 $n_{t+1} - n_t \leq 2$.

实际上, 假定存在 $1 \leq t \leq 29$, 使 $n_{t+1} - n_t \geq 3$ (也可以不妨设 $n_2 - n_1 \geq 3$), 令 $n'_t = n_t + 1, n'_{t+1} = n_{t+1} - 1$, 则各组点数仍互异. 考察:

$$S = \sum_{1 \leq i < j < k \leq 30} n_i n_j n_k$$

$$= n_t n_{t+1} \cdot \sum_{\substack{k \neq t, t+1 \\ 1 \leq k \leq 30}} n_k + (n_t + n_{t+1}) \cdot \sum_{\substack{j, k \neq t, t+1 \\ 1 \leq j < k \leq 30}} n_j n_k + \sum_{\substack{i, j, k \neq t, t+1 \\ 1 \leq i < j < k \leq 30}} n_i n_j n_k,$$

$$S' = n'_t n'_{t+1} \cdot \sum_{\substack{k \neq t, t+1 \\ 1 \leq k \leq 30}} n_k + (n'_t + n'_{t+1}) \cdot \sum_{\substack{j, k \neq t, t+1 \\ 1 \leq j < k \leq 30}} n_j n_k + \sum_{\substack{i, j, k \neq t, t+1 \\ 1 \leq i < j < k \leq 30}} n_i n_j n_k,$$

因为 $n'_t + n'_{t+1} = n_t + n_{t+1}$, 而 $n'_t n'_{t+1} = n_t n_{t+1} - n_t + n_{t+1} - 1 > n_t n_{t+1}$, 所以 $S' > S$, 矛盾. 所以 $n_{t+1} - n_t = 1$ 或 2 .

(2) 至少有一个 $t (1 \leq t \leq 29)$, 使 $n_{t+1} - n_t = 2$.

实际上, 若对所有 t , 都有 $n_{t+1} - n_t \neq 2$, 而由 (1), 有 $n_{t+1} - n_t \leq 2$, 所以 $n_{t+1} - n_t = 1$, 即 n_1, n_2, \dots, n_{30} 是 30 个连续正整数, 它们的和为 15 的倍数.

但 $\sum_{t=1}^{30} n_t = 1989$ 不是 15 的倍数, 矛盾.

(3) 最多有一个 $t (1 \leq t \leq 29)$, 使 $n_{t+1} - n_t = 2$.

实际上, 若有 $s, t (1 \leq s < t \leq 29)$, 使 $n_{t+1} - n_t = n_{t+1} - n_s = 2$, 则令 $n'_s = n_s + 1, n'_{t+1} = n_{t+1} - 1$. (最大的减小, 最小的增大), 代换后各组的点数仍互异. 考察:

$$\begin{aligned} S &= \sum_{1 \leq i < j < k \leq 30} n_i n_j n_k \\ &= n_s n_{t+1} \cdot \sum_{\substack{k \neq s, t+1 \\ 1 \leq k \leq 30}} n_k + (n_s + n_{t+1}) \cdot \sum_{\substack{j, k \neq s, t+1 \\ 1 \leq j < k \leq 30}} n_j n_k + \sum_{\substack{i, j, k \neq s, t+1 \\ 1 \leq i < j < k \leq 30}} n_i n_j n_k, \\ S' &= n'_s n'_{t+1} \cdot \sum_{\substack{k \neq t, t+1 \\ 1 \leq k \leq 30}} n_k + (n'_s + n'_{t+1}) \cdot \sum_{\substack{j, k \neq t, t+1 \\ 1 \leq j < k \leq 30}} n_j n_k + \sum_{\substack{i, j, k \neq t, t+1 \\ 1 \leq i < j < k \leq 30}} n_i n_j n_k, \end{aligned}$$

因为 $n'_s + n'_{t+1} = n_s + n_{t+1}$, 而 $n'_s n'_{t+1} = n_s n_{t+1} - n_s + n_{t+1} - 1 > n_s n_{t+1}$, 所以 $S' > S$, 矛盾.

由 (2) 和 (3) 可知, 恰有一个 $t (1 \leq t \leq 29)$, 使 $n_{t+1} - n_t = 2$.

最后证明, 同时满足 (1) (2) 和 (3) 的数组: n_1, \dots, n_{30} 是惟一的.

实际上, 不妨设 30 个数为: $n_1, n_1 + 1, n_1 + 2, \dots, n_1 + t - 1, n_1 + t + 1, n_1 + t + 2, \dots, n_1 + 30$, 那么 $n_1 + (n_1 + 1) + (n_1 + 2) + \dots + (n_1 + t - 1) + (n_1 + t + 1) + (n_1 + t + 2) + \dots + (n_1 + 30) = 1989$.

所以 $(n_1 + t) + (n_1 + 1) + (n_1 + 2) + \dots + (n_1 + t - 1) + (n_1 + t + 1) + (n_1 + t + 2) + \dots + (n_1 + 30) = 1989 + t$, 即 $1989 + t = 30n_1 + (1 + 2 + \dots + 30) = 30n_1 + 15 \times 31$.