

第一章常用逻辑用语	员	摇小节验收卷(二)	苑
摇命题及其关系	圆	摇单元验收卷(粤)	苑
摇充分条件与必要条件	愿	摇单元验收卷(月)	苑
摇简单的逻辑联结词	员	第二章圆锥曲线与方程	苑
摇全称量词与存在量词	员	摇小节验收卷(一)	苑
第二章圆锥曲线与方程	圆	摇小节验收卷(二)	苑
摇圆锥曲线与方程	圆	摇单元验收卷(粤)	愿
摇椭圆	圆	摇单元验收卷(月)	愿
摇双曲线	猿	第三章空间向量与立体几何 ...	缘
摇抛物线	猿	摇小节验收卷(一)	缘
摇专题研究摇直线和圆锥曲线的位置关系	猿	摇小节验收卷(二)	愿
第三章空间向量与立体几何 ...	源	摇单元验收卷(粤)	愿
摇空间向量及其运算	缘	摇单元验收卷(月)	愿
摇立体几何中的向量方法	缘	模块综合验收卷(粤)	苑
		模块综合验收卷(月)	苑
第一章常用逻辑用语	愿	参考答案与简析	
摇小节验收卷(一)	愿		

第一章常用逻辑用语

导学诱思

👑 焦点导入

我们看看下面一段对话：

小李(身高一米七,十分喜爱篮球运动):唉,我要是能长得像姚明那样高大就好了,这样,我也就能到美国打篮球并作一个有统治力的中锋了。

小王:哼哼,除非太阳从西边出来!

(注:姚明,在美国篮球联盟打球的中国籍高大中锋,身高近二米三十)

我们这样来描述小王所说的话的意思:如果太阳从西边出来,你小李就能长得和姚明一样高大,否则,你是不可能长得和姚明一样高大的。

很显然,小王的话我们是赞同的,也就是说,他所说的是真的。这实际上反映了逻辑中的这样一个原理:在一个错误的前提下,任何结果都是有可能成立的。比如说:如果会飞,你就能像小鸟一样在天上飞来飞去。

由此可见,在我们的生活中,逻辑学的力量无处不在。本章将在义务教育阶段的基础上,学习常用的一些逻辑用语,体会逻辑用语在表述和论证中的作用,利用这些逻辑用语准确地表达数学内容,并更好地进行交流。



👑 课标聚焦

了解命题的逆命题、否命题与逆否命题。

理解必要条件、充分条件与充要条件的意义,会分析四种命题的相互关系。

通过数学实例,了解逻辑联结词“或”、“且”、“非”的含义。

通过生活和课本中的丰富实例,理解全称量词与存在量词的意义。

能对含有一个量词的命题进行否定。

焦点突破

命题及其关系

命题

自主预习

一般地,我们把语言、符号或式子表达的,可以判断真假的陈述句叫做命题;其中判断为真的语句叫做真命题,判断为假的语句叫做假命题.

你能判断下面语句的真假吗?

- (1)垂直于同一个平面的两个平面互相平行;
- (2)空集是任何集合的子集;
- (3)的平方根是 2;
- (4)两个全等三角形的面积一定相等吗?

逐点扫描

焦点一 命题的概念

一般地,我们把用语言、符号或式子表达的,可以判断真假的陈述句叫做命题.其中,判断为真的语句叫做真命题,判断为假的语句叫做假命题.

命题的概念中有两个关键词:可以判断真假、陈述句.我们判断一个句子是不是命题,正是紧紧扣住这两个关键词进行判断的.

例 1

下列语句中,哪些是命题,哪些不是命题?是真命题还是假命题?

- (1)最小的素数是 2;
- (2)是指数函数;
- (3)平行于同一平面的两个平面平行吗?
- (4)曾与 2 相等;
- (5)到定点距离为定长的点的轨迹是圆.

【分析】(1)是陈述句,而且 2 确实是最小的素数,所以为真命题;

(2)是陈述句,但指数函数指的是形如 $y = a^x$ ($a > 0$ 且 $a \neq 1$) 的函数,显然, (2) 不符合指数函数的定义,因此是假命题;

(3)是疑问句,不是陈述句,所以不是命题;

(4)是陈述句,但无法判断真假,所以不是命题;

(5)是陈述句,但圆是指“平面上到定点距离为定长的点的轨迹”,所以是假命题.

【解答】(1)(2)(5)是命题,其中(1)是真命题,(2)(5)是假命题;(3)(4)不是命题.

【点评】摇对“命题”这一重要的数学概念进行判断时,必须抓住本概念中两个不可或缺的特征:即“陈述性语句”和“可以判断真假”,只具备其中一个特征的语句和两个特征均不具备的语句,都不是命题.

变身题

下列语句是不是命题?是真命题还是假命题?

- (1)一个数不是奇数就是偶数;
- (2)若 x 是有理数,则 x^2 也是有理数;
- (3)对任意实数 x , $x^2 + 1$ 是偶数;
- (4)奇函数的图象关于原点一定对称吗?

焦点二 若 则 形式的命题

在本章中,我们只研究“若 则”形式的命题,其中 叫做命题的条件, 叫做命题的结论.

例 2

指出下列命题中的条件 和结论.

- (1)若 $x > 0$,则 $x^2 > 0$;
- (2)若 x 是素数,则 x 为奇数;

(猴)如果两直线 葬遭无公共点,那么 葬遭为平行或异面直线;

(源)两直线平行,同旁内角互补援

【分析】摇一般地,按照命题的条件和结论的意义,由关键词“若、如果、只要”等引领的均可视为条件,而由关键词“则、那么、就、必”等引领的均可视为结论援

【解答】摇(员)条件 葬遭为结论 择葬遭;

(圆)条件 葬遭为结论 择葬为奇数;

(猴)条件 葬两直线 葬遭无公共点,结论 择葬遭为平行或异面直线;

(源)条件 葬两直线平行,结论 择同旁内角互补援

【点评】摇从逻辑上说,“若 责则 择”形式的命题是充分条件的命题,其常见形式除了“若 责则 择”外,也可表现为“如果 责那么 择”、“只要 责则 择”、“只要 责就有 择”、“若 责必 择”等形式,这些表述在形式上是等价的援有时数学中的命题表面上不是“若 责则 择”的形式,但我们仍然可以通过明确它的条件和结论,把它改写成“若 责则 择”的形式,如命题(源)就可以改写成“若两直线平行,则同旁内角互补”援

变身题

圆指出下列命题中的条件 责和结论 择

(员)三边对应成比例的两个三角形相似;

(圆)两个偶数的和与积仍为偶数;

(猴)奇函数的图象关于原点对称;

(源)若 噪跃园,则 赠越碧为增函数援

焦点三摇“若 责则 择”形式命题的真假判断

如果条件 责以及结论 择均为命题,则“若 责则 择”形式的命题的真假与 责择的真假联系如下表所示:

责	择	若 责则 择
真	真	真
真	假	假
假	真	假
假	假	真

摇摇在本章开始的“焦点导入”小王对小李的理想的评述“如果太阳从西边出来,你就可以长得和姚明一样高

大”中,条件和结论均是错误的,但该评述在逻辑上却是正确的,因为从上表对应关系上可以看到:当 责择均假时,命题“若 责则 择”却是一个真命题援

例猿

判断下列命题的真假:

(员)若 曾跃赠跃对,则 曾跃比;

(圆)若平面 $\alpha // \beta$,直线 葬 $\perp \alpha$,则 葬 $\perp \beta$;

(猴)若函数 赠越碧中 葬跃,则该函数为增函数;

(源)若一元二次方程 葬跃垣碧跃赠跃园,遭原原跃跃园,则方程有两不等实根援

【分析】摇在数学命题的判断中,我们总是以条件真为前提援如命题中,条件“曾跃赠跃对”的真假本是无法判断的,但在判断命题的真假时,我们却假定此条件为真,再以此为前提进行逻辑推理,若能得到所给结论,则命题为真,若不能得到所给结论,则命题为假援

【解答】摇(员)真命题,因为实数大小具有传递性,即由 曾跃赠跃对可以推出 曾跃比;

(圆)假命题,因为由条件平面 $\alpha // \beta$,直线 葬 $\perp \alpha$,可以推出直线 葬 \perp 平面 β ;

(猴)真命题,对数函数当底大于 员时为增函数;

(源)真命题,由方程根的理论可知援

【点评】摇如分析中所述,判断命题的真假时,总是在条件为真的前提下进行推理,在推理的过程中,我们不能在判断时有意或无意增加条件,比如判断命题“圆跃员的真假时,我们总是依据大家都一致认可的“数轴上越往右的点,对应的实数值越大”这个性质进行判断它为真,尽管在这个命题中,这条性质并没有作为条件写出来,实际上,所有定理、公理、性质或有关结论均是该命题的隐含条件援我们绝不可说“若 猿跃圆,则 圆跃员”是真命题,从而说明 圆并不总是大于 员,有时也可小于 员,从而说明“圆跃员”的真假无法判断援

变身题

猿判断下列命题的真假:

(员)若集合 粤越{曾跃碧跃原跃依跃,灶跃晕},月越{赠跃碧跃圆跃原跃噪跃晕},则 粤越月;

(圆)若 曾不能被 源整除,则 曾也不能被 圆整除;

(猴)若直线 葬遭无公共点,则平行援

皇冠 焦点训练

基础夯实

员新下列属于命题的是(摇摇)援
粤空集和非空集合
月零圆
悦若 葬跃,难道还推不出 葬园吗
阅若 葬跃成立,则 葬>员也成立
圆新下列属于假命题的是(摇摇)援
粤若 葬跃,则 葬遭糟中至少有一个为零
月零约原员
悦零垣零>园
阅长方形的对角线互相垂直平分
猿新下列属于真命题的是(摇摇)
粤若集合 粤,月,悦,则 粤>悦
月三角形的重心到各边中点的距离相等
悦若 $\frac{\text{曾原曾}}{\text{曾}}$ 跃,则 曾跃
阅若 渣渣跃,则 曾跃依员
源判断一个语句是不是命题,主要就看它是否符合
摇摇摇摇摇摇和摇摇摇摇摇摇这两个条件援
缘在命题“若 责,则 择中,若“责”跃成立,则命题“若
责,则 择”为摇摇摇摇(从“真”、“假”中进行选填)援
远试将下列语句改写成“若 责,则 择”的形式并判断
真假:
(员)空集是任何非空集合的真子集;
(圆)皂跃园时,关于 曾的方程 曾垣曾原皂跃园有实
数根援

能力提升

苑新下列属于假命题的是(摇摇)援
粤若 渣互渣跃,则 渣互渣跃
月零跃原跃缘
悦若 葬跃,则 遭跃

阅若 枣曾 越曾垣曾跃,则 枣曾的最小值为圆
愿若命题“函数 枣曾 越 $\frac{\sqrt{\text{猿曾}}}{\text{曾垣曾}}$ 的定义域是 砸”
为真命题,试求 葬的取值范围援

综合探究

怨若 皂跃,曾灶曾跃,员,责跃,园都是真的,试求 圆曾
原曾的最值援

员新题 四种命题

员新题 四种命题的相互关系

皇冠 自主预习

员援一般地,对于两个命题,如果一个命题的条件和
结论分别是另一个命题的摇摇摇摇和摇摇
摇摇摇摇,那么我们就把这样的两个命题称为互逆
命题援

圆援如果一个命题的条件和结论恰好是另一个命题
的条件的摇摇摇摇和结论的摇摇摇摇,
我们就把这样的两个命题称为互否命题援

猿援如果一个命题的条件和结论,分别是另一个命题
的摇摇摇摇的否定和摇摇
摇摇的否定,那么我们就把这样的两个命题称为互为逆
否命题援

逐点扫描

焦点一 摇原命题与逆命题

一般地,对于两个命题,如果说一个命题的条件和结论分别是另一个命题的结论和条件,那么我们就把这样的两个命题称为互逆命题,其中一个命题叫做原命题(原命题),另一个叫做原命题的逆命题(逆命题).

互逆命题的形式特征:条件和结论相互换位,即:

原命题:若 p 则 q

逆命题:若 q 则 p

例 1

已知命题 p :各位上数字之和是 3 的倍数的正整数可以被 3 整除.写出命题 p 的逆命题 q ,并判断命题 p 和 q 的真假.

【分析】摇由原命题写出它的逆命题可采用“换位”的方法,即将原命题的条件和结论的位置互换,故要求能够熟练地区分所给命题(即原命题)的条件和结论.

【解答】摇原命题 p 可改写为:若正整数各位上的数字之和为 3 的倍数,则它可被 3 整除.逆命题 q 为:若正整数可被 3 整除,则其各位上的数字之和为 3 的倍数.

原命题为假命题,如 12 ,各位上数字之和是 3 ,可被 3 整除,但该数不能被 3 整除;逆命题为真,因为 3 的倍数,可被 3 整除的数一定能被 3 整除.

【点评】摇原命题为假,逆命题未必假;原命题为真,逆命题也未必真.两者之间没有必然的联系,应视所给命题进行具体判断.

变式题

已知命题 p :若 x 是有理数,则 x 是无理数,试写出命题 p 的逆命题 q ,并判断命题 p 和 q 的真假.

焦点二 摇原命题与否命题

概念:一般地,对于两个命题,若其中一个命题的条件和结论恰好是另一个命题的条件的否定和结论的否定,我们就称这样的两个命题为互否命题;如果把其

中一个命题叫做原命题,那么另一个命题就叫做原命题的否命题(否命题).

互否命题的形式特征:对原命题的条件和结论同时进行否定(不妨称为“换质”),即:

原命题:若 p 则 q

否命题:若 $\neg p$ 则 $\neg q$

例 2

已知命题 p :若 $x > 0$,则 $x^2 > 0$,写出命题 p 的否命题 q ,并判断命题 p 和 q 的真假.

【分析】摇欲写出一个命题的否命题,只需对该命题的条件和结论同时进行否定即换质,但不换位.

【解答】摇否命题:若 $x \leq 0$,则 $x^2 \leq 0$.原命题和否命题均为真命题.

【点评】摇(1)对“跃”、“约”进行否定时,不要忘了加等号;(2)原命题与否命题的真假关系也无必然联系,即原命题真,否命题未必真;原命题假,否命题未必假.

变式题

已知命题 p :若 $x > 0$,则关于 x 的不等式 $x^2 + 2x + 1 > 0$ 的解集为 \mathbb{R} .写出其否命题 q ,并判断命题 p 和 q 的真假.

焦点三 摇原命题与逆否命题

概念:一般地,对于两个命题,其中一个命题的条件和结论恰好是另一个命题的结论的否定和条件的否定,我们称这样的两个命题为互为逆否命题;如果把其中的一个命题叫做原命题,另一个命题就叫做原命题的逆否命题(逆否命题).

互否命题的形式特征:对原命题的条件和结论分别先进行否定再交换位置,或者先交换位置再分别进行否定(既换位又换质),即:

原命题:若 p 则 q

逆否命题:若 $\neg q$ 则 $\neg p$

例 3

已知命题 p :若实数 $x > 0$,则 $x^2 > 0$,写出命题 p 的逆否命题 q .

试写出其逆否命题 并判断命题 和 的真假

【分析】由原命题构造其逆否命题的做法是“换位 换质”，即将原命题的条件和结论先分别进行否定，再交换位置；也可先交换原命题的条件和结论的位置，然后再分别进行否定

【解答】原命题和它的逆否命题均为真命题

【点评】对一个命题而言，先换位再换质，或者先换质再换位，均可构造出它的逆否命题，原命题和它的逆否命题的真假性是一致的

变身题

已知命题 若 则 试写出命题 的逆否命题 并判断命题 和 的真假

例源

已知命题 若实数 则 $(\frac{a}{b}) \leq \frac{a}{b}$ 试写出以命题 为原命题的逆命题、否命题和逆否命题，并判断这四个命题的真假

【分析】由原命题构造逆命题、否命题以及逆否命题，可分别采用“换位”、“换质”、“换位 换质”的方法进行；判断真假时只须判断原命题和逆命题的真假，再根据互为逆否命题则同真同假的性质，对原命题的逆否命题和否命题的真假进行判断

【解答】逆命题 若 $(\frac{a}{b}) \leq \frac{a}{b}$ 则

否命题 若 则 $(\frac{a}{b}) > \frac{a}{b}$ ；

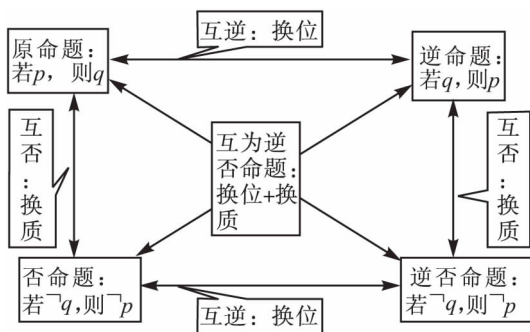
逆否命题 若 $(\frac{a}{b}) > \frac{a}{b}$ 则

其中，原命题和它的逆否命题为真命题；原命题的逆命题和它的否命题为假命题

【点评】仍然要注意“ \leq ”的否定是“ $>$ ”，“ \geq ”的否定是“ $<$ ”

焦点四 四种命题的相互关系

四种命题的相互关系——构造关系：



四种命题的相互关系——真假关系：

互逆或互否的两个命题之间的真假性没有必然联系；互为逆否的两个命题有相同的真假性

由同一个命题构造出的这四个命题的真假情形只有四种：四真、四假、两真两假（包括原、逆否两真，逆、否两假，以及原、逆否两假，逆、否两真这样两种情形）

判断四种命题的真假性时可先判断原命题和原命题的逆命题的真假，再由互为逆否的两个命题的真假性一致，分别得到原命题的逆否命题和原命题的否命题的真假

变身题

已知命题 若 $\alpha \neq \beta$ 则 $\cos \alpha \neq \cos \beta$ 试写出以命题 为原命题的逆命题、否命题以及逆否命题，并判断它们的真假

焦点五 利用互为逆否关系进行命题证明

由于原命题和它的逆否命题有相同的真假性，因而对某命题进行直接证明有困难时，可通过证明它的逆否命题来达到间接证明原命题的目的（即反证法）

反证法的一般思路是：从否定结论出发，或从结论的反面出发，经过正确的逻辑推理和论证，得出一个与原命题的条件相矛盾的结论（包括和已知定理、公理、结论矛盾），即完成了原命题的逆否命题的证明，再

由原命题和它的逆否命题同真,说明原命题也是真命题

例缘

利用互为逆否关系证明:若葬遭糟,则葬遭糟都是奇数

【分析】本题若直接证明,需要对葬遭糟进行分类讨论,因情形太多,比较麻烦;所以改证它的逆否命题:若葬遭糟都是奇数,则葬遭糟

【证明】若葬遭糟都是奇数,则葬遭糟都是奇数,从而葬遭糟为偶数,所以葬遭糟

这表明原命题的逆否命题为真命题,所以原命题也是真命题

【点评】“不都是”的否定语是“都是”

变身题

利用互为逆否的两个命题的关系证明:若责择为奇数,则方程葬遭糟没有整数根

焦点训练

基础夯实

下列命题中,逆命题为真命题的是

若葬遭糟,则葬遭糟

若葬遭糟,则葬遭糟

若葬遭糟,则葬遭糟

若葬遭糟,则葬遭糟

下列命题中,否命题为真命题的是

若葬遭糟,则葬遭糟

若葬遭糟,则葬遭糟

若葬遭糟,则葬遭糟

若葬遭糟,则葬遭糟

命题“若葬遭糟,则葬遭糟”与其逆命题、否命题和

逆否命题共四个命题中,真命题的个数为

若葬遭糟,则葬遭糟

命题“若葬遭糟,则葬遭糟”的逆命题是,该逆命题(的真假性)是

命题“不经过原点的直线都可以用葬遭糟表示”的逆否命题是,该逆否命题(真假性)是

若命题的否命题是“垂直于同一个平面的两直线平行”,请写出命题的逆命题及逆否命题,并判断所写命题的真假

能力提升

下列命题为真命题的是

若直线葬遭糟与葬遭糟的斜率相等,则葬遭糟

若直线葬遭糟//葬遭糟,则葬遭糟与葬遭糟的斜率相等

若一条直线的斜率存在,另一条直线的斜率不存在,则它们一定相交

若直线葬遭糟与葬遭糟的斜率都不存在,则葬遭糟//葬遭糟

若葬遭糟,则葬遭糟

判断命题“若葬遭糟,则葬遭糟”;“若葬遭糟,则葬遭糟”;“若葬遭糟,则葬遭糟”的真假

综合探究

已知正数葬遭糟,葬遭糟,葬遭糟,葬遭糟,葬遭糟

垣^①择^②曾^③葬^④判^⑤断^⑥“ 责 是 择 的什么条件,并说明理由援提示: 责 是 择 的充分不必要条件)援

员^①摇充分条件与必要条件

员^②一般地,“若 责 则 择 为真命题,则记作 $\text{责}\Rightarrow\text{择}$ 援并且说: 责 是 择 的充分条件, 择 是 责 的必要条件援

员^③已知 责 曾^④择^⑤圆^⑥,则 责 是 择 的什么条件? 择 是 责 的什么条件?

员^① 逐点扫描

焦点一摇真命题与条件的类别

员^②概念:一般地,“若 责 则 择 为真命题,是指以 责 为条件,经过正确的推理论证,可以得出结论 择 援此时我们可以说,由 责 可以推出 择 援记作 $\text{责}\Rightarrow\text{择}$ 援一般读作: 责 蕴涵 择 援并且称: 责 是 择 的充分条件(泽^③责^④择^⑤), 择 是 责 的必要条件(泽^⑥责^⑦择^⑧)援

员^③“充分条件”和“必要条件”这两个概念总是同时出现的,在真命题“若 责 则 择 ”中, 责 是 择 的充分条件,同时 择 是 责 的必要条件援

员^④ 例员

下列命题中,哪些命题中的 责 是 择 的充分条件?

(员)若 责 遭^⑤原^⑥摩^⑦圆^⑧,则 择 关于 曾 的一元二次方程葬^⑨垣^⑩曾^⑪圆^⑫有两不相等的实数根;

(圆)若 责 葬^⑬沃^⑭圆^⑮糟^⑯圆^⑰,则 择 葬^⑱沃^⑲圆^⑳

(猿)若 责 直线葬^㉑遭^㉒,则 择 直线葬^㉓遭^㉔有且只有一个公共点;

(源)若 责 四边形曾^㉕月^㉖阅^㉗为圆内接四边形,则 择 曾^㉘垣^㉙月^㉚越^㉛曾^㉜垣^㉝月^㉞垣^㉟阅^㊱援

【分析】摇只须判断命题是否为真命题,若命题是真命题,则条件 责 是结论 择 的充分条件援

【解答】摇(员)真命题,所以 责 是 择 的充分条件;

(圆)假命题,所以 责 不是 择 的充分条件;

(猿)假命题,所以 责 不是 择 的充分条件;

(源)真命题,所以 责 是 择 的充分条件援

【点评】摇在命题(员)(源)中, 责 是 择 的充分条件,而且 择 是 责 的必要条件援

员^⑤ 变身题

员^⑥在下列“若 责 则 择 ”形式的命题中,哪些命题中的 择 是 责 的充分条件?

(员)若 责 △曾^⑦悦^⑧中, \angle 曾^⑨跃 \angle 月^⑩,则 择 葬^⑪沃^⑫

(圆)若 责 关于曾的一元二次不等式葬^⑬垣^⑭曾^⑮垣^⑯圆^⑰的解集为砸,则 择 葬^⑱沃^⑲且 Δ 约圆;

(猿)若 责 曾^⑳垣^㉑圆^㉒,则 择 曾^㉓原^㉔圆^㉕越^㉖圆;

(源)若 责 曾^㉗原^㉘圆^㉙,则 择 原^㉚圆^㉛约曾^㉜援

焦点二摇充分不必要条件和必要不充分条件

一般地,若命题“若 责 则 择 为真命题,且其逆命题“若 择 则 责 为假命题,即 $\text{责}\Rightarrow\text{择}$ 而 $\text{择}\not\Rightarrow\text{责}$,则称 责 是 择 的充分不必要条件, 择 是 责 的必要不充分条件援

如果原命题和它的逆命题均为假命题,则称 责 是 择 的既不充分也不必要条件(此时, 择 也是 责 的既不充分也不必要条件)援

员^⑥ 例圆

(圆^⑦近年全国 I)设葬^⑧遭^⑨砸,已知命题 责 葬^⑩命题 择 (葬^⑪垣^⑫曾^⑬) \leq 圆^⑭,则 责 是 择 成立的(摇摇)

葬^⑮必要不充分条件摇摇月^⑯充分不必要条件

悦^⑰充分必要条件 阅^⑱既不充分也不必要条件

【分析】摇解此类题须同时考虑原命题及其逆命题的真假:

若原、逆命题均为真命题,则 q 是 p 的充分条件,也是 p 的必要条件;

若原、逆命题均为假命题,则 q 是 p 的既不充分也不必要条件;

若原命题为真、逆命题为假命题,则 q 是 p 的充分不必要条件;

若原命题为假、逆命题为真命题,则 q 是 p 的必要不充分条件。

【解答】 p 因为 $q \Rightarrow p$ 而 $p \not\Rightarrow q$, 所以 q 是 p 的充分不必要条件,选 D。

【点评】 p 须准确判断命题“若 q 则 p ”及其逆命题“若 p 则 q ”这两个命题的真假。

☺ 变身题

已知命题 p 为“若 $x \in (\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4})$, 则 $\tan x > 1$ ”

命题 q (“ $x \in (\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4})$ ”) 是判断命题中的 q 是 p 的什么条件。

焦点三 充要条件

概念:一般地,对于命题“若 q 则 p ”,如果既有 $q \Rightarrow p$ 且又有 $p \Rightarrow q$, 则记作 $q \Leftrightarrow p$ 。此时,我们说 q 是 p 的充分必要条件,简称充要条件(充分条件和必要条件缺一不可),也可称为“ q 与 p 等价”或“ p 当且仅当 q ”。

显然,如果 q 是 p 的充要条件,那么 p 也是 q 的充要条件,即若 $q \Rightarrow p$, 那么 $p \Rightarrow q$ 互为充要条件。

✱ 例猿

下列哪些命题中的 q 是 p 的充要条件?

(1) 若 $f(x)$ 是增函数,则 $f(x)$ 是增函数,则 $f(x) > 0$;

(2) 若 $f(x)$ 是增函数,且 $f(x)$ 的值域为 $[0, \pi]$, 则 $f(x) \in [0, \pi]$;

(3) 若 $f(x)$ 是增函数,则 $f(x)$ 是增函数的最小正周期为 π 。

【分析】 p 只须考察“ $q \Rightarrow p$ ”和“ $p \Rightarrow q$ ”是否同时成立;一旦同时成立,则互为充要条件。

【解答】 p (1) 因为 $q \Rightarrow p$, 所以 q 是 p 的充要条件;

(2) 因为 $q \Rightarrow p$ 但 $p \not\Rightarrow q$, 所以 q 是 p 的必要而不充分条件;

(3) 因为 $q \Rightarrow p$ 但 $p \not\Rightarrow q$, 所以 q 是 p 的充分而不必要条件。

综上可知,只有命题(1)中的 q 是 p 的充要条件。

【点评】 p 结合前述内容可知 q 与 p 的关系及条件类型对应如下:

(1) $q \Rightarrow p$ 且 $p \Rightarrow q$, q 是 p 的充分而不必要条件,同时 p 是 q 的必要而不充分条件;

(2) $q \Rightarrow p$ 但 $p \not\Rightarrow q$, q 是 p 的必要而不充分条件,同时 p 是 q 的充分而不必要条件;

(3) $q \Rightarrow p$ 且 $p \Rightarrow q$, q 与 p 互为充要条件;

(4) $q \not\Rightarrow p$ 且 $p \not\Rightarrow q$, q 是 p 的既不充分也不必要条件,同时 p 也是 q 的既不充分也不必要条件。

☺ 变身题

判断正误:

(1) 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle A, \angle B, \angle C$ 成等差数列的充要条件是 $\angle A = 60^\circ$;

(2) $\sqrt{a} = \sqrt{b}$ 是 $a = b$ 的充要条件;

(3) $a = b$ 是 $a^2 = b^2$ 的充要条件;

(4) 两直线 $ax + by + c = 0$ 与 $dx + ey + f = 0$ 垂直的充要条件是 $ae + bd = 0$ 。

焦点四 充要性的证明与充要条件探究

充要性的证明:欲证 q 是 p 的充要条件,须分别证明条件的充分性(即 $q \Rightarrow p$)和条件的必要性(即 $p \Rightarrow q$)成立。

充要条件的探究:欲探究结论 p 成立的充要条件,通常的做法是先探求 p 成立的必要条件,再以此必要条件为基础探求充分条件,如果在此过程中,一直保持恒等变形或等价推理,则所探求条件即为充要条件。

✱ 例源

设 $a, b \in \mathbb{R}$, 求证: $a^2 + b^2 = 0$ 是 $a = 0$ 且 $b = 0$ 的充要条件。

【分析】 p 本题也可叙述为:设 $a, b \in \mathbb{R}$, $a^2 + b^2 = 0$ 是 $a = 0$ 且 $b = 0$ 的充要条件。

求证:责是择成立的充要条件.因此,在此命题中,充分性是指由责能推导出择,必要性是指由择能推导出责.

【证明】先证充分性.因为责,则可分下列两种情况:

①若责,则责或责或责.此时均有责.

②若责,则责或责或责.当责时,责;当责时,责;当责时,责.

总之,当责时总有责.所以充分性成立.

下证必要性.因为责,所以(责)越责.故责.从而必要性也成立.

综上所述,原命题为真命题.

【点评】①此种题型中的充分性和必要性均对条件而言,即若责则称条件责是择的充分条件,充分性成立;若择则称条件责是择的必要条件,必要性成立;

②此种题型的常见叙述形式是“求证:酝的充要条件是晕”,其“若责则择”形式是“若晕则酝”.

变身题

例(2014年湖南卷)设集合越(责,责),粤(责,责),月(责,责).那么点(责,责) ∈ 粤 ∩ (越)的充要条件是(摇摇)援
粤:跃原,灶缘 粤:跃原,灶缘
悦:跃原,灶缘 悦:跃原,灶缘

焦点训练

基础夯实

员翻符号“ \Rightarrow ”、“ \Leftarrow ”或“ \Leftrightarrow ”填空援
(员)皂跃原,灶跃原,灶跃原,灶跃原,灶跃原,灶跃原;
(圆)赠越责(原 π , π)为增函数摇摇摇摇

$\left[\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right]$;

(猿)两个三角形面积相等摇摇摇摇两个三角形全等援

例已知孕:△粤悦为锐角三角形,匝:泽粤跃粤,则孕是匝的摇摇摇摇条件,匝是孕的摇摇摇摇条件.

例已知孕:原影约普约猿,匝:曾越愿,则孕是匝的(摇摇)条件.

粤:充分不必要摇摇摇摇月:必要不充分
悦:必要 阅:既不充分也不必要
源:下列命题中,孕是匝的充分不必要条件的是(摇摇)援

粤:孕葬约匝:葬约员
月:孕越月,匝:泽粤越粤
悦:孕(粤)月,匝:普粤或普月
阅:孕:粤跃原,匝:赠越普为增函数
缘:已知孕:曾垣普垣粤垣有且仅有整数解,匝:葬,遭是整数,则孕是匝的(摇摇)援

粤:充分不必要条件 月:必要条件
悦:必要不充分条件 阅:既非充分也非必要条件
远:粤是月的充分不必要条件,悦是月的必要不充分条件,阅是悦的充要条件,问:阅是粤的什么条件?回答并说明理由.

例已知数列{悦},其中悦越厨垣猿,则使数列{悦_灶原悦_灶}为等比数列的充要条件是(摇摇)援

粤:跃圆 月:跃猿
悦:跃圆或跃猿 阅:跃圆或跃圆

例已知函数枣曾在砸上是增函数,求证:葬回粤垣
 \Leftrightarrow 枣跃垣枣跃垣枣原跃垣枣原跃援

【分析】摇首先须分别判断命题 责 择 的真假 ,再依上表进行 责 \ 择 责 \ 择 \ 责 命题的真假的判断援

【解答】摇 责 \ 择 苹果是一种植物果实 ,且是一种植物块根 ; 责 \ 择 苹果是一种植物果实或是一种植物块根 ; \neg 责 苹果不是一种植物果实援

【点评】摇从生活实际上 ,我们常常只能说“苹果是植物果实” ,但从逻辑上 ,我们完全可以说“苹果是一种植物果实或是一种植物块根”援因为从逻辑上分析 :当 责 真 择 假时 ,责 \ 择 是真命题援

变身题

已知命题 责 员 跃 命题 择 员 越 试分别写出命题 责 \ 择 责 \ 择 \ 责 并判断其真假援

焦点三摇“或、且、非”与“并、交、补”的关系

记集合 粤 越 曾 曾 满足条件 孕 , 月 越 曾 曾 满足条件 圆 则 :

(员)“或”与“并”的关系 : 粤 月 越 曾 曾 满足条件 孕 或 圆 即 曾 (粤 月) \Rightarrow 曾 粤 或 曾 月 \Rightarrow 曾 满足条件 孕 或 圆 援

(圆)“且”与“交”的关系 : 粤 月 越 曾 曾 满足条件 孕 且 满足条件 圆 即 曾 (粤 月) \Leftrightarrow 曾 粤 且 曾 月 \Rightarrow 曾 满足条件 孕 且 满足条件 圆 援

(猿)“非”与“补”的关系 : \neg 粤 越 曾 曾 不满足条件 孕 即 曾 $\in \neg$ 粤 \Rightarrow 曾 \in 粤 但 曾 \notin 粤 援

例猿

若 孕 : 曾 原 曾 可 越 圆 且 曾 原 曾 可 越 圆 集合 粤 越 曾 查 孕 , 月 越 曾 圆 试求 粤 月 , 粤 \neg 月 \cap 粤 援

【分析】摇可依逻辑联结词与集合之间的上述关系进行求解援

【解答】摇 粤 月 越 曾 查 孕 或 圆 越 曾 查 曾 原 曾 可 越 圆 或 曾 原 曾 可 越 圆 越 曾 查 \Rightarrow 猿 或 曾 \in 粤 ;

粤 \neg 月 越 曾 查 且 圆 越 曾 查 曾 原 曾 可 越 圆 且 曾 原 曾 可 越 圆 越 曾 查 猿 或 曾 \notin 粤 且 曾 圆 或 曾 \notin 粤 \Rightarrow 越 \emptyset ;

\cap 粤 越 曾 查 责 越 曾 查 曾 原 曾 可 越 圆 越 曾 查 \Rightarrow 曾

猿援

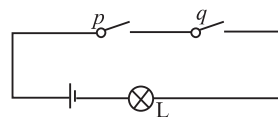
【点评】摇在本题中 , 粤 越 曾 孕 意即 粤 越 曾 曾 满足条件 孕 即由所有满足条件 孕 的变量 曾 所构成的集合援

变身题

猿若 孕 : 曾 原 曾 可 越 圆 且 曾 原 曾 可 越 圆 试求集合 粤 越 曾 孕 或 圆 , 粤 越 曾 孕 且 圆 援

焦点四摇“或、且”与开关电路(并、串联)的关系

设开关 责 择 闭合与断开对应命题 责 择 的真与假 , 灯泡 蕴 明 灭 对应命题 责 \ 择 或 责 \ 择 的真假援 :



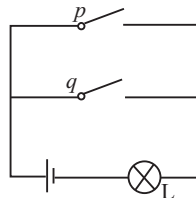
①串联电路与命题 责 \ 择 的关系 :

开关 责 择 同时闭合 , 则灯 蕴 亮 \Leftrightarrow 命题 责 择 同真 , 则命题 责 \ 择 为真 ;

开关 责 择 只要有一个断开 , 则灯 蕴 不亮 \Leftrightarrow 命题 责 择 中只要有一个为假命题 , 则命题 责 \ 择 为假命题援

②并联电路与命题 责 \ 择 的关系 :

开关 责 择 同时断开 , 则灯 蕴 不亮 \Leftrightarrow 命题 责 择 同假 , 则命题 责 \ 择 为假 ;



开关 责 择 只要有一个闭合 , 则灯 蕴 亮 \Leftrightarrow 命题 责 择 中只要有一个为真命题 , 则命题 责 \ 择 为真命题援

提示 : 借助开关电路可以帮助同学们形象地理解与掌握命题 责 \ 择 责 \ 择 的真假与命题 责 择 的真假之间的联系援

焦点训练

基础夯实

员命题“若 葬 员 则 葬 原 葬 员 跃 圆”的否定形式是 摇摇摇摇摇摇摇摇摇摇摇摇摇摇摇摇摇摇 其否命题是 摇摇摇摇摇摇摇摇摇摇摇摇摇摇摇摇摇摇 摇摇摇摇摇摇摇摇摇摇摇摇摇摇摇摇摇摇 摇摇摇摇摇摇摇摇摇摇摇摇摇摇摇摇摇摇

综合探究

若命题 p 为假命题, 则命题 $(\neg p) \vee (\neg q)$ 为真命题 (从“真命题”、“假命题”中选填) 援

已知命题 $p: x \in (0, \pi)$, $q: x \in (\pi, 2\pi)$, 则 $(\neg p) \wedge (\neg q)$ 为真命题 (从“真命题”、“假命题”中选填) 援

命题 $p: x \in (0, \pi)$ 为真命题 命题 $q: x \in (\pi, 2\pi)$ 为真命题

命题 $p: x \in (0, \pi)$ 为真命题 命题 $q: x \in (\pi, 2\pi)$ 为真命题

命题 $p: x \in (0, \pi)$ 为真命题 命题 $q: x \in (\pi, 2\pi)$ 为真命题

命题 $p: x \in (0, \pi)$ 为真命题 命题 $q: x \in (\pi, 2\pi)$ 为真命题

命题 $p: x \in (0, \pi)$ 为真命题 命题 $q: x \in (\pi, 2\pi)$ 为真命题

设 $p: x \in (0, \pi)$, $q: x \in (\pi, 2\pi)$, 若 $p \wedge q$ 为真命题, 则集合 $\{x | p \wedge q\}$ 为 $(\pi, 2\pi)$ 援

命题 $p: x \in (0, \pi)$ 为真命题 命题 $q: x \in (\pi, 2\pi)$ 为真命题

命题 $p: x \in (0, \pi)$ 为真命题 命题 $q: x \in (\pi, 2\pi)$ 为真命题

小明掷一枚硬币, 连掷两次, 其中只有一次正面朝上, 记 p : 第一次正面朝上, q : 第二次正面朝上, 试叙述命题 $p \wedge q, p \vee q, \neg p$ 并判断其真假 援

命题 $p: x \in (0, \pi)$ 为真命题 命题 $q: x \in (\pi, 2\pi)$ 为真命题

全称量词与存在量词

自主预习

判断下列命题的真假:

(1) 存在无理数 x 使 x^2 也是无理数;

(2) 对任意实数 x, y 有 $x + y = y + x$ 援

写出下列命题的否定形式:

(1) 所有的合数都是偶数;

(2) 存在直线 l 与两异面直线都垂直相交援

能力提升

若命题 $p: x \in (0, \pi)$ 是一个命题, $q: x \in (\pi, 2\pi)$ 是一个命题, 则 $(\neg p) \wedge (\neg q)$ 为真命题 援

命题 $p: x \in (0, \pi)$ 为真命题

命题 $q: x \in (\pi, 2\pi)$ 为真命题

命题 $p: x \in (0, \pi)$ 为真命题 命题 $q: x \in (\pi, 2\pi)$ 为真命题

命题 $p: x \in (0, \pi)$ 为真命题 命题 $q: x \in (\pi, 2\pi)$ 为真命题

设 $f(x) = x^2 - 2x + 1$ 对于函数 $f(x)$ 在 $(0, \pi)$ 上, 记 $p: f(x)$ 有最大值, $q: f(x)$ 有最小值, 试判断 $p \wedge q, p \vee q, \neg p$ 这三个命题的真假 援

若 $p: x \in (0, \pi)$, $q: x \in (\pi, 2\pi)$, 试写出命题 $p \wedge q, p \vee q, \neg p$

逐点扫描

焦点一 全称量词与全称命题; 存在量词与特称命题

全称量词与全称命题援

短语“所有的”、“任意一个”、“一切”、“每一个”、“任给”等在逻辑中通常叫做全称量词 (用符号“ \forall ”表示) 援

含有全称量词的命题叫做全称命题援

存在量词与特称命题:

短语“存在一个”、“至少有一个”、“有些”、“有一个”、“对某个”、“有的”等在逻辑中通常叫做存在量词 (用符号“ \exists ”表示) 援

含有存在量词的命题叫做特称命题援

例员

下列语句中, 哪些是全称命题, 哪些是特称命题?

(员)对任意一个 曾 砸,曾跃曾

(圆)对任意一个 曾 砸,曾跃曾;

(猿)存在 曾 砸,曾垣曾越员;

(源)存在 曾 砸,曾越员援

【分析】摇全称或特称命题必须满足:第一,是命题;第二,含有全称量词或存在量词援

【解答】摇(员)不是命题(无法判断真假);(圆)是全称命题(是命题且含全称量词);(猿)不是命题(无法判断真假);(源)是特称命题(是命题且含存在量词)援

【点评】摇注意全称量词和存在量词均有多种表述形式援

变身题

员列哪些是全称命题,哪些是特称命题?

(员)对任意 曾,曾 ≥ 园吗?

(圆)至少存在一个 曾 砸,曾越曾

(猿)单位圆上任一点到圆心的距离都等于 员;

(源)赠轴上每一点到(原员,园)和(员,园)的距离都相等;

(缘)存在 曾 砸,曾垣曾越员援

焦点二 摇全称命题与特称命题的常见形式与真假判断

通常将含有变量 曾的语句用 责曾,择曾,则曾,... 来表示,变量 曾的取值范围用 酝来表示那么

①全称命题“对 酝中任意一个 曾,有 责曾成立”,可借助符号简记为

$$\forall 曾 \in 酝, 责曾 援$$

读作:对任意 曾属于 酝,有 责曾成立援

若任意 曾 ∈ 酝 ⇒ 责曾成立,则该全称命题为真命题援

②特称命题“存在 酝中的一个 曾,使 责曾成立”可用符号简记为

$$\exists 曾 \in 酝, 责曾 援$$

读作:存在一个 曾属于 酝,使 责曾成立援

若 酝中至少存在一个 曾使 责曾成立,则该特称命题为真命题援

例圆

判断下列命题的真假:

(员) $\forall 曾 \in \mathbb{R}, 曾垣曾垣曾垣曾 > 0$;

(圆) $\exists 曾 \in \mathbb{R}, 曾垣曾垣曾垣曾 > 0$ 援

【分析】摇对全称命题和特称命题真假的判断均须结合具体的命题,准确把握命题的含义援如命题(员),其含义是在 曾 ∈ ℝ 的条件下,不等式 曾垣曾垣曾垣曾恒成立;命题(圆)的含义是在实数集中,方程 曾垣曾垣曾垣曾有解援

【解答】摇(员)因为 曾 ∈ ℝ 时,函数 枣曾 = 曾垣曾垣曾垣曾 为增函数,所以有 枣曾 > 枣(员) = 4 > 0,故该全称命题为真命题援

(圆)因为方程 曾垣曾垣曾垣曾 = 0 无实数解,故该特称命题为假命题援

【点评】摇注意变量的“任意性”和“存在性”的含义援

变身题

圆判断下列命题的真假:

(员)圆上任意一点到圆心的距离相等;

(圆)对角 α ,记 泽, 精, 嘛, 精 的值所形成的集合为 酝,则 酝中至少存在一个值 曾,曾 ∈ 酝援

焦点三 摇含有一个量词的命题的否定

员一般地,若全称命题 责: $\forall 曾 \in 酝, 责曾$,则其否定形式 $\neg 责: \exists 曾 \in 酝, \neg 责曾$,即全称命题的否定是特称命题援

圆一般地,若特称命题 责: $\exists 曾 \in 酝, 责曾$,则其否定形式 $\neg 责: \forall 曾 \in 酝, \neg 责曾$,即特称命题的否定是全称命题援

例猿

写出下列命题 责的否定形式 $\neg 责$:

(员) 责: $\forall 曾 \in \mathbb{R}, 曾 > 0$;

(圆) 责: $\exists 曾 \in \mathbb{R}, 曾 > 0$ 援

命题“有的圆内接四边形,内对角相等”的否定是

试写出全称命题“对任意实数,直线在上的纵截距和横截距相等”的否定并判断真假

命题“任何两个相交的平面都把空间分成七个部分”试写出它的否定和否命题

命题“对任意的,都有”的否定是,并判断的真假

能力提升

命题“任何一个对角线互相垂直平分的四边形都是菱形”的否定为,其否命题为,则()

- 均为真命题
- 均为假命题
- 为真命题,为假命题
- 为假命题,为真命题