

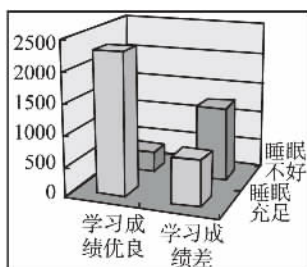
# 目 录

第一章 统计案例		小节验收卷(二) .....	55
1.1 回归分析的基本思想及其初步应用 .....	1	第二章 推理与证明	
1.2 独立性检验的基本思想及其初步应用 .....	6	小节验收卷(一) .....	57
第二章 推理与证明		小节验收卷(二) .....	59
2.1 合情推理与演绎推理 .....	12	第三章 数系的扩充与复数的引入	
2.1.1 合情推理 .....	12	小节验收卷(一) .....	61
2.1.2 演绎推理 .....	17	小节验收卷(二) .....	63
2.2 直接证明与间接证明 .....	19	第四章 框 图	
2.2.1 综合法和分析法 .....	19	小节验收卷(一) .....	65
2.2.2 反证法 .....	24	小节验收卷(二) .....	67
第三章 数系的扩充与复数的引入		参考答案与简析 .....	69
3.1 数系的扩充和复数的概念 .....	32	第一章单元验收卷 .....	1
3.1.1 数系的扩充和复数的概念 .....	32	第二章单元验收卷(A) .....	3
3.1.2 复数的几何意义 .....	34	第二章单元验收卷(B) .....	5
3.2 复数代数形式的四则运算 .....	36	第三章单元验收卷(A) .....	9
第四章 框 图		第三章单元验收卷(B) .....	11
4.1 流程图 .....	43	第四章单元验收卷 .....	13
4.2 结构图 .....	47	模块综合验收卷(A) .....	17
第一章 统计案例		模块综合验收卷(B) .....	21
小节验收卷(一) .....	53	参考答案与简析 .....	25

# 第一章 统计案例

## 👑 焦点导入

睡眠不足可能是学生学习成绩不理想的一个重要原因. 美国研究人员在研究中减少了儿童的睡眠时间, 并测试教师是否能区别出学生因此受到的影响, 结果是肯定的. 领导此项研究的布朗医学院心理学家戈汉·法隆说, “如果家长想要孩子学习成绩好, 那么让他们按时上床睡觉同让他们按时上学同等重要”.



睡眠真的对学习成绩有影响吗? 研究人员为何如此肯定呢?

要搞清楚这个问题, 我们要了解一些统计方法和统计思想.

## 👑 课标聚焦

本章通过典型案例, 学习一些常见的统计方法, 主要是要求学生体会统计的一些基本思想, 初步应用这些方法解决一些实际问题. 学习中应当达到以下学习目标:

1. 本章通过对典型案例的探究, 进一步了解回归分析的基本思想、方法及初步应用.
2. 掌握建立线性回归模型的基本步骤.
3. 了解与线性回归模型有关的若干概念, 如随机误差、总偏差平方和、残差、残差平方和、回归平方和、残差分析以及残差图等.
4. 通过对典型案例的探究, 了解独立检验的基本思想、方法及初步应用.
5. 理解分类变量、列联表.
6. 会画三维柱形图和二维条形图, 并根据图形判断两个分类变量是否有关系.
7. 会计算  $K^2$  的观测值, 并根据其值判断两个分类变量相关的可信度.

### 1.1 回归分析的基本思想及其初步应用

## 👑 自主预习

1. 函数关系是一种\_\_\_\_\_性关系, 相关关系是一

种\_\_\_\_\_性关系.

2. 回归分析是对具有\_\_\_\_\_的两个变量进行统计分析的一种常用方法.

3. 利用回归分析的方法研究两个具有线性相关关系的变量的一般步骤是: 画出两个变量的\_\_\_\_\_, 求\_\_\_\_\_, 并用\_\_\_\_\_进行预报.

4. 在线性回归模型  $y = bx + a + e$  中,  $a$  和  $b$  为模型的未知参数,  $e$  称为\_\_\_\_\_. 这里的自变量  $x$  称为

\_\_\_\_\_，因变量  $y$  称为\_\_\_\_\_。

5. 对于相关系数  $r$ ，当  $r$  的绝对值越接近于 1，表明两个变量的线性相关性越\_\_\_\_\_（填“强”或“弱”）。

6. 统计中用  $\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2$  表示解释变量和随机误差的组合效应的总的效应，称为\_\_\_\_\_。

7. 数据点和它在回归直线上相应位置的差异  $(y_i - \hat{y}_i)$  是随机误差的效应，我们称  $e_i = y_i - \hat{y}_i$  为\_\_\_\_\_。

$\sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)^2$  叫做\_\_\_\_\_。

8. 我们用相关指数  $R^2$  来刻画回归的效果， $R^2$  的值越大，说明残差平方和越小，也就是说模型的拟合效果\_\_\_\_\_。在线性回归模型中， $R^2$  表示解释变量对预报变量的贡献率。 $R^2$  越接近于 1，表示回归效果\_\_\_\_\_。

9. 利用图形来分析残差的特性时，作图时纵坐标为\_\_\_\_\_，横坐标为样本的编号，这样作出的图形叫做\_\_\_\_\_。

10. 当回归方程不是形如  $y = bx + a$  时，我们将之称为\_\_\_\_\_。

## 👑 逐点扫描

### 焦点一 求回归方程

回归分析的基本步骤：

- (1) 画出两个变量的散点图；
- (2) 求回归方程；
- (3) 用回归方程进行预报。

### ✿ 例 1

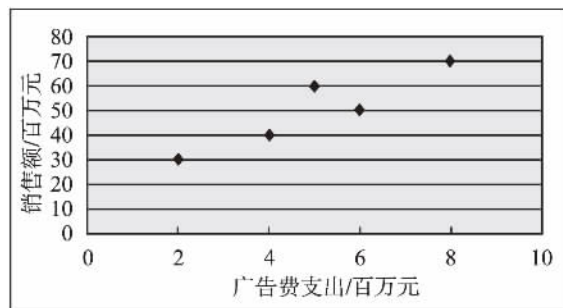
某产品的广告费支出  $x$  与销售额  $y$  (单位：百万元) 之间有如下对应数据：

$x$	2	4	5	6	8
$y$	30	40	60	50	70

- (1) 画出散点图；
- (2) 求回归方程；
- (3) 若产品的广告费支出为 11 (单位：百万元) 时，销售额估计是多少？

【分析】 此类问题计算量大，可利用计算机软件进行构图、计算。

【解答】 (1) 散点图如下图所示：



(2) 由已知条件可得：

$$\hat{b} = \frac{\sum_{i=1}^5 x_i y_i - 5 \bar{x} \bar{y}}{\sum_{i=1}^5 x_i^2 - 5 \bar{x}^2} = \frac{1380 - 5 \times 5 \times 50}{145 - 5 \times 5^2} = 6.5,$$

$$\hat{a} = \bar{y} - \hat{b} \bar{x} = 50 - 6.5 \times 5 = 17.5,$$

于是所求的回归方程为  $\hat{y} = 6.5x + 17.5$ 。

(3) 当  $x = 11$  时， $6.5 \times 11 + 17.5 = 89$ 。

故销售额估计是 8900 万元。

【点评】 (1) 从散点图可以看出，样本点呈条状分布，两个变量有比较好的线性相关关系，但用预报函数求出的预报结果不一定是可靠的。

(2) 用 Excel 作散点图方便、准确。

### 😄 变身题

1. 假设关于某设备的使用年限  $x$  (年) 和所支出的维修费用  $y$  (万元) 有如下的统计资料：

$x$	2	3	4	5	6
$y$	2.2	3.8	5.5	6.5	7.0

- (1) 画出散点图；
- (2) 求回归方程；
- (3) 使用年限为 10 年时，维修费用估计是多少？

## 焦点二 残差分析

1. 研究两个变量间的关系时,首先要根据散点图来粗略判断它们是否线性相关,是否可以用线性回归模型来拟合数据.然后我们可以通过残差  $\hat{e}_1, \hat{e}_2, \dots, \hat{e}_n$  来判断模型的拟合效果,判断原始数据中是否存在可疑数据,这方面的分析工作称为残差分析.

2. 在分析时常借助残差图.残差图的纵坐标为残差,横坐标为样本的编号,或具有实际含义的数据.

3. 相关指数是用来刻画回归效果的.

4. 相关指数的计算公式: 
$$R^2 = 1 - \frac{\sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)^2}{\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2}.$$

5. 我们用相关指数  $R^2$  来刻画回归的效果,  $R^2$  的值越大,说明残差平方和越小,也就是说模型的拟合效果越好.在线性回归模型中,  $R^2$  表示解释变量对预报变量的贡献率,其值越接近于 1,表示回归效果越好.

### ✿ 例 2

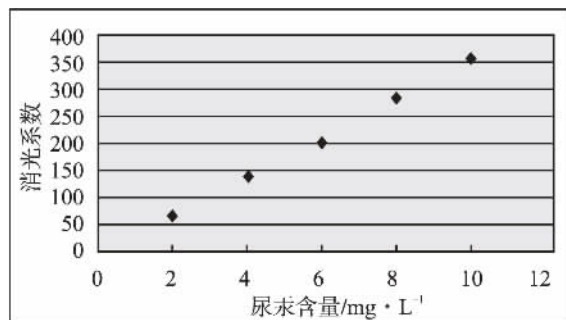
某医院用光电比色计检验尿汞时,得到尿汞含量  $x$  (单位:  $\text{mg} \cdot \text{L}^{-1}$ ) 与消光系数  $y$  的关系如下表:

尿汞含量 $x$	2	4	6	8	10
消光系数 $y$	64	138	205	285	360

- (1) 作散点图;
- (2) 求回归方程,并预测尿汞含量为 9 时消光系数的值;
- (3) 作残差图;
- (4) 求相关指数  $R^2$ .

**【分析】** 求出回归方程后,要先求出残差,再画残差图.

**【解答】** (1) 散点图如下图所示:



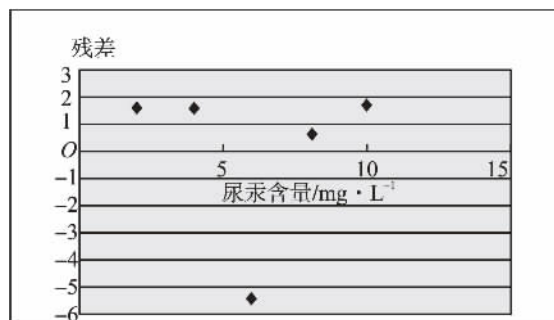
(2) 回归方程为  $\hat{y} = 36.95x - 11.3$ ,

当  $x=9$  时,  $\hat{y} \approx 321$ .

(3) 列表如下:

尿汞含量 $x$	2	4	6	8	10
消光系数 $y$	64	138	205	285	360
$\hat{y}_i$	62.6	136.5	210.4	284.3	358.2
残差	1.4	1.5	-5.4	0.7	1.8

残差图如下图所示:



(4) 相关系数  $R^2 \approx 0.999321$ .

**【点评】** 从残差图中可以看出,第三个样本点的残差的绝对值较大,需确认采集样本点过程中是否有人为的错误.

### ☺ 变身题

2. 在 7 块并排、形状和大小相同的试验田上进行施化肥量对水稻产量影响的试验中得到的一组数据(单位: kg) 见下表:

施化肥量 $x$	15	20	25	30	35	40	45
水稻产量 $y$	330	345	365	405	445	450	455

- (1) 由以上数据作出散点图;
- (2) 由图判断施化肥量和水稻产量之间是否近似成线性关系,若近似成线性关系请求出其回归方程;
- (3) 请预测施化肥量为 28 kg 时水稻产量约为多少 kg;
- (4) 作残差图;
- (5) 求相关指数  $R^2$ .

### 焦点三 利用线性回归模型解决一类非线性回归问题

当两个变量不成线性相关关系时,要通过变换将其转化成线性函数,利用最小二乘法得到线性回归方程,再通过相应的变换得到非线性回归方程.

#### ✿ 例 3

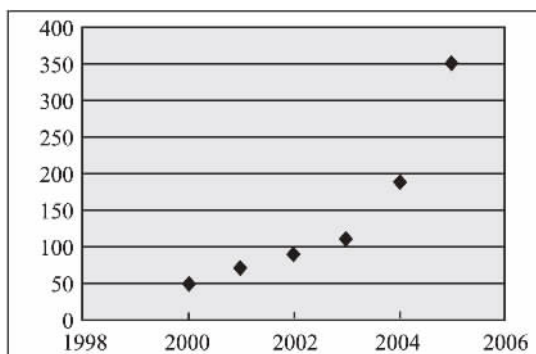
某城市理论预测 2000 年到 2005 年人口总数(单位:万)与年份的关系如下表所示:

年份 $x$	2000	2001	2002	2003	2004	2005
人口数 $y$	50	69	88	110	190	350

- (1)画出散点图,试建立  $y$  与  $x$  之间的回归方程;
- (2)据此估计 2006 年人口总数;
- (3)求残差、残差平方和;
- (4)计算相关指数  $R^2$ .

**【分析】** 先作出散点图,然后观察两个变量是否成线性相关关系,并确定合适的拟合函数.

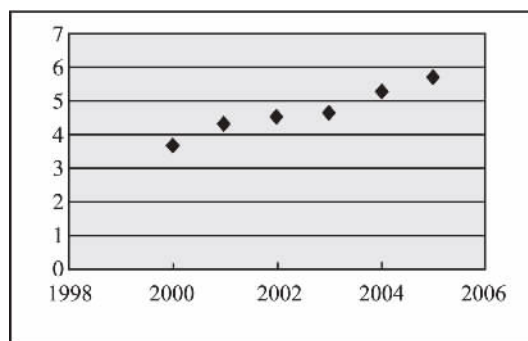
**【解答】** (1)散点图如下图所示:



由图可知,样本点分布在某一条指数函数曲线  $y = c_1 e^{c_2 x}$  的周围,令  $z = \ln y$ ,则  $z = bx + a (a = \ln c_1, b = c_2)$ ,得到变换后的数据如下表:

$x$	2000	2001	2002	2003	2004	2005
$z$	3.912	4.234	4.477	4.700	5.247	5.858

作散点图如下图所示,即知变换后的样本分布在一条直线附近,故可以用线性回归方程来拟合.



利用计算器计算可得线性回归方程为  $\hat{z} = 0.3712x - 738.558$ ,因此,年份  $x$  与人口数  $y$  (单位:万)之间的非线性回归方程为  $\hat{y} = e^{0.3712x - 738.558}$ .

- (2)估计 2006 年人口总数应为 432.335 万.
- (3)列表如下:

年份 $x$	2000	2001	2002	2003	2004	2005
人口数 $y$	50	69	88	110	190	350
$\hat{y}_i$	46.619	67.572	97.944	141.968	205.778	298.270
$\hat{e}_i$	3.381	1.428	-9.944	-31.968	-15.778	51.730

即知残差平方和为 4059.245.

(4)相关指数  $R^2 = 0.936$ .

**【点评】** 根据散点图,选取恰当的回归模型才能真正地做好回归分析,有时模型是线性的,有时是非线性的,如指数型、反比例型等.

#### ☺ 变身题

3. 为了研究某种细菌随时间  $x$  变化繁殖的个数,收集数据如下:

天数 $x$	1	2	3	4	5	6
繁殖个数 $y$	6	12	25	49	95	190

- (1)用天数作解释变量,繁殖个数作预报变量,作出这些数据的散点图;
- (2)描述解释变量与预报变量之间的关系;
- (3)计算残差、相关指数  $R^2$ .

## 👑 焦点训练

1. 在画两个变量的散点图时,下列叙述中正确的是( ).

- A. 预报变量在  $x$  轴上,解释变量在  $y$  轴上
- B. 解释变量在  $x$  轴上,预报变量在  $y$  轴上
- C. 可以选择两个变量中任意一个在  $x$  轴上
- D. 可以选择两个变量中任意一个在  $y$  轴上

2. 已知回归直线的斜率的估计值是 1.23,样本点的中心为(4,5),则回归直线的方程是( ).

- A.  $\hat{y}=1.23x+4$
- B.  $\hat{y}=1.23x+5$
- C.  $\hat{y}=1.23x+0.08$
- D.  $\hat{y}=0.08x+1.23$

3. 在回归分析中,代表了数据点和它在回归直线上相应位置的差异的是( ).

- A. 总偏差平方和
- B. 残差平方和
- C. 回归平方和
- D. 相关指数  $R^2$

4. 若回归直线方程中的回归系数  $b=0$ ,则相关系数  $r=$ \_\_\_\_\_.

5. 多种因素都会影响贫穷,教育也许是其中之一.在研究这两个因素的关系时,收集了美国 50 个州的成年人受过 9 年或更少教育的百分比( $x$ )和收入低于官方规定的贫困线的人数占本州人数的百分比( $y$ )的数据,建立的回归方程为  $\hat{y}=0.8x+4.6$ ,斜率的估计等于 0.8 说明\_\_\_\_\_.

\_\_\_\_\_,成年人受过 9 年或更少教育的百分比( $x$ )和收入低于官方的贫困线的人数占本州人数的百分比( $y$ )之间的相关系数\_\_\_\_\_ (填“大于 0”或“小于 0”).

6. 一台机器使用的时间较长,但还可以使用,它按不同的转速生产出来的某机械零件有一些会有缺点,每小时生产有缺点零件的多少,随机器运转的速度而变化,下表为抽样试验的结果:

转速 $x$ (转/秒)	16	14	12	8
每小时生产有缺点的零件数 $y$ (件)	11	9	8	5

- (1) 试就变量  $y$  对  $x$  进行相关性检验;
- (2) 如果  $y$  对  $x$  有线性相关关系,求回归方程;

(3) 若实际生产中允许每小时的产品中有缺点的零件最多为 10 个,那么机器的运转速度应控制在什么范围内?

7. 如果有一组数据的总偏差平方和为 100,且相关指数为 0.5,那么残差平方和为\_\_\_\_\_,回归平方和为\_\_\_\_\_.

8. 随机从 12 个公司中收集广告费与销售量的数据,如下表所示.

编号	1	2	3	4	5	6
广告费/万元	250	300	200	180	150	200
销售量/万件	2600	2950	1850	1650	1500	2400
编号	7	8	9	10	11	12
广告费/万元	240	300	190	150	120	220
销售量/万件	2800	2960	2400	1600	1500	2350

(1) 作散点图,根据散点图猜想广告费与销售量之间是什么关系;

(2) 建立广告费为解释变量,销售量为预报变量的回归方程,求总偏差平方和、残差平方和;

- (3) 作残差图；  
 (4) 求相关指数  $R^2$ .

的变量称为\_\_\_\_\_.

2. 列出两个分类变量的频数表, 叫\_\_\_\_\_.
3. 利用随机变量  $K^2$  来确定是否能以给定把握认为“两个分类变量有关系”的方法, 称为两个分类变量的\_\_\_\_\_.

4. 可以利用独立性检验来考察两个分类变量是否有关系, 并且能较精确地给出这种判断的可靠程度. 具体做法是:

- (1) \_\_\_\_\_;
- (2) \_\_\_\_\_;
- (3) \_\_\_\_\_.

## 👑 逐点扫描

### 焦点一 三维柱形图和二维条形图

1. 通过三维柱形图或二维条形图, 可以粗略地判断两个分类变量是否有关系, 但是这种判断无法精确地给出所得结论的可靠程度.

2. 在三维柱形图中, 主对角线上两个柱形高度的乘积  $ad$  与副对角线上两个柱形高度的乘积  $bc$  相差越大,  $X$  与  $Y$  有关系的可能性就越大.

3. 在二维条形图中, 可以估计满足条件  $X=x_1$  的个体中具有  $Y=y_1$  的个体所占的比例  $\frac{a}{a+b}$ , 也可以估计满足条件  $X=x_2$  的个体中具有  $Y=y_1$  的个体所占的比例  $\frac{c}{c+d}$ . 两个比例的值相差越大,  $X$  与  $Y$  的有关系的可能性就越大.

#### ✿ 例 1

人们常认为教师易患咽喉炎. 在对 1437 名不同职业者的调查中发现, 患咽喉炎的人中有 597 名是教师, 而另外的 626 名非教师职业者中有 175 名患有咽喉炎. 利用图形判断患咽喉炎与职业是否有关系.

	不患咽喉炎	患咽喉炎	总计
教师	214	597	811
非教师	451	175	626
总计	665	772	1437

【分析】 利用 Excel 画图.

9. 某种书每册的成本费  $y$ (元) 与印刷册数  $x$ (千册) 有关, 经统计得到数据如下:

$x$	1	2	3	5	10	20	30	50	100	200
$y$	10.15	5.52	4.08	2.85	2.11	1.62	1.41	1.30	1.21	1.15

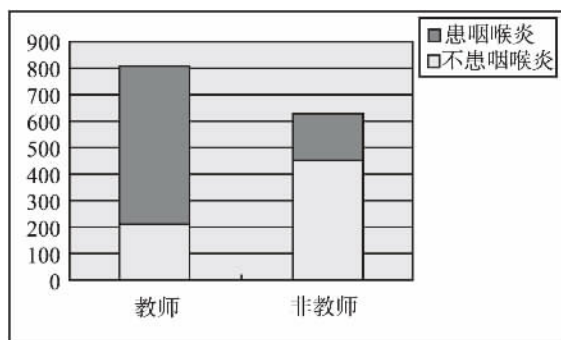
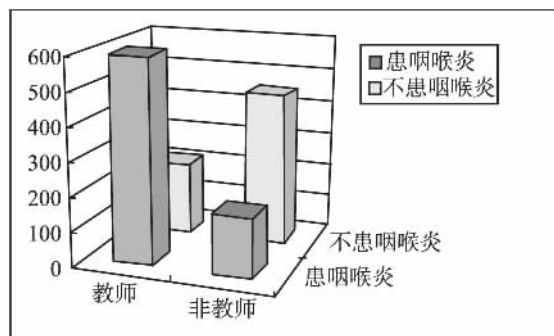
画出散点图, 并建立每册书的成本费  $y$  与印刷册数  $x$  之间的回归方程.

## 1.2 独立性检验的基本思想及其初步应用

### 👑 自主预习

1. 变量的不同“值”表示个体所属的不同类别, 这样

**【解答】** 下图分别是三维柱形图和二维条形图,由图知可在某种程度上认为“患咽喉炎与职业有关”.



**【点评】** 与表格相比,三维柱形图和二维条形图能更直观地反映出相关数据的总体情况.

### 🧙 变身题

1. 生物小组对于人类头发的颜色与眼睛的虹膜的颜色是否有关进行了调研,调查人数共 212 人,调查记录如下表.利用图形说明头发的颜色与眼睛虹膜的颜色是否有关系.

	眼睛蓝色	眼睛棕色
头发红/金黄色	156	12
头发黑色	20	24

## 焦点二 独立性检验

### 1. 独立性检验的步骤.

(1)通过三维柱形图和二维条形图,可以粗略地判断两个分类变量是否有关系.

(2)可以利用独立性检验来考察两个分类变量是否有关系,并能精确判断可靠程度.

2. 由观测数据计算  $K^2$ , 其值越大,说明“X 与 Y 有关系”成立的可能性越大.

3. 由临界值表确定可靠程度.

### ✿ 例 2

某人力资源部为了研究企业员工工作积极性与对待企业改革态度的关系,随机抽取了 189 名员工进行调查,其中积极支持企业改革的调查者中,工作积极的有 54 人,工作一般的有 32 人,而不太赞成企业改革的调查者中,工作积极的有 40 人,工作一般的有 63 人.

(1)根据以上数据建立一个  $2 \times 2$  的列联表;

(2)根据以上数据是否可以认为企业的全体员工对待企业改革的态度与其工作积极性有关系.

**【分析】** 通过计算  $K^2$  的观测值,查临界值表来确定可靠程度.

**【解答】** (1)列表如下:

	积极支持企业改革	不太赞成企业改革	合计
工作积极	54	40	94
工作一般	32	63	95
合计	86	103	189

$$(2) K^2 = \frac{189 \times (54 \times 63 - 40 \times 32)^2}{94 \times 95 \times 86 \times 103} \approx 10.759,$$

因为  $10.759 > 7.879$ , 所以有 99.5% 的把握说: 抽样员工对待企业改革的态度与工作积极性是有关系的. 可以认为企业的全体员工对待企业改革的态度与其工作积极性是有关系的.

**【点评】**  $K^2$  的值越大,两个分类变量有关系的可能性越大,而且还可以通过与临界值比较,精确地判断出可靠的程度.

### 🧙 变身题

2. 为了探究患慢性气管炎与吸烟有无关系,调查了 339 名 50 岁以上的人,结果如下表所示,据此数据回答: 50 岁以上的人患慢性气管炎与吸烟习惯有关系吗?

	患慢性气管炎	未患慢性气管炎	合计
吸烟	43	162	205
不吸烟	13	121	134
合计	56	283	339

## 👑 焦点训练

1. 三维柱形图中柱的高度表示的是( ).

- A. 各分类变量的频数    B. 分类变量的百分比  
C. 分类变量的样本数    D. 分类变量的具体值

2. 利用独立性检验来考察两个分类变量  $X$  和  $Y$  是否有关时,通过查阅下表来确定断言“ $X$  和  $Y$  有关系”的可信度. 如果  $k > 5.024$ , 那么就有把握认为“ $X$  和  $Y$  有关系”的百分比为( ).

$P(K^2 > k)$	0.50	0.40	0.25	0.15	0.10
$k$	0.455	0.708	1.323	2.072	2.706
$P(K^2 > k)$	0.05	0.025	0.010	0.005	0.001
$k$	3.84	5.024	6.635	7.879	10.83

- A. 25%    B. 75%    C. 2.5%    D. 97.5%

3. 在三维柱形图中,主对角线上两个柱形高度的乘积与副对角线上两个柱形高度的乘积相差越大,两个变量有关的可能性就( ).

- A. 越大    B. 越小  
C. 无法判断    D. 以上都不对

4. 如果由一个  $2 \times 2$  列联表中的数据计算得出  $K^2 = 4.013$ , 那么有\_\_\_\_\_把握认为两个变量有关系.

5. 某高校“统计初步”课程的教师随机调查了选修该课的一些学生的情况,具体数据如下表:

专业 \ 性别	非统计专业	统计专业
男	13	10
女	7	20

为了判断主修统计专业是否与性别有关系,根据表中的数据,得到  $K^2 = \frac{50 \times (13 \times 20 - 10 \times 7)^2}{23 \times 27 \times 20 \times 30} \approx 4.844$ .

因为  $K^2 \geq 3.841$ , 所以判定主修统计专业与性别有关系,那么这种判断出错的可能性为\_\_\_\_\_.

6. 容易生气的人更有可能患心脏病吗?某机构随机调查了 2796 人,调查结果如下表,那么容易生气的人是否更有可能患心脏病呢?

	患心脏病	不患心脏病	合计
易怒	27	606	633
不易怒	53	2110	2163
合计	80	2716	2796

7. 假设有两个分类变量  $X$  与  $Y$ , 它们的值域分别为  $\{x_1, x_2\}$  和  $\{y_1, y_2\}$ , 其  $2 \times 2$  列联表如下:

	$y_1$	$y_2$	总计
$x_1$	$a$	$b$	$a+b$
$x_2$	$c$	$d$	$c+d$
总计	$a+c$	$b+d$	$a+b+c+d$

对于以下数据,对同一样本能说明  $X$  与  $Y$  有关的可能性最大的一组为( ).

- A.  $a=5, b=4, c=3, d=2$   
A.  $a=5, b=3, c=2, d=4$   
C.  $a=5, b=2, c=4, d=3$   
D.  $a=2, b=3, c=5, d=4$

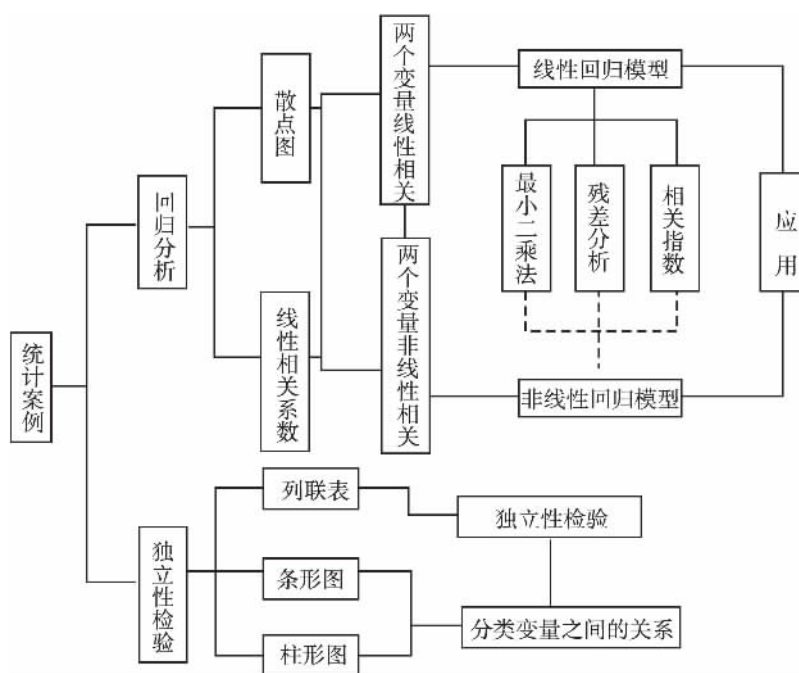
8. 打鼾不仅影响别人休息,而且可能与患某种疾病有关,下表是一次调查所得的数据,那么每晚都打鼾与患心脏病有关系吗?有多大把握认为你的结论成立?

	患心脏病	未患心脏病	合计
每晚都打鼾	30	224	254
不打鼾	24	1355	1379
合计	54	1579	1633

9. 在对人们的休闲方式的一次调查中,共调查了 124 人,其中女性 70 人,男性 54 人. 女性中有 43 人主要的休闲方式是看电视,另外 27 人主要的休闲方式是运动;男性中有 21 人主要的休闲方式是看电视,另外 33 人主要的休闲方式是运动.

- (1) 根据以上数据建立一个  $2 \times 2$  的列联表;
- (2) 作出三维柱形图;
- (3) 判断性别与休闲方式是否有关系.

## 👑 焦点回眸



## 👑 高考链接

1. (2007年广东卷)下表提供了某厂节能降耗技术改造后生产甲产品过程中记录的产量  $x$  (吨) 与相应的生产能耗  $y$  (吨标准煤) 的几组对照数据:

$x$	3	4	5	6
$y$	2.5	3	4	4.5

- (1) 请画出上表数据的散点图;
- (2) 请根据上表提供的数据, 用最小二乘法求出  $y$  关于  $x$  的线性回归方程  $y = \hat{b}x + \hat{a}$ ;
- (3) 已知该厂技术改造前 100 吨甲产品的生产能耗为 90 吨标准煤, 试根据 (2) 中求出的线性回归方程预测生产 100 吨甲产品的生产能耗比技术改造前降低多少

吨标准煤.

(参考数值:  $3 \times 2.5 + 4 \times 3 + 5 \times 4 + 6 \times 4.5 = 66.5$ )

【解答】 (1) 散点图略.

(2)  $\sum_{i=1}^4 x_i y_i = 66.5$ ,  $\sum_{i=1}^4 x_i^2 = 3^2 + 4^2 + 5^2 + 6^2 = 86$ ,  $\bar{x} = 4.5$ ,  $\bar{y} = 3.5$ ,

$$\hat{b} = \frac{66.5 - 4 \times 4.5 \times 3.5}{86 - 4 \times 4.5^2} = \frac{66.5 - 63}{86 - 81} = 0.7;$$

$$\hat{a} = \bar{y} - \hat{b}\bar{x} = 3.5 - 0.7 \times 4.5 = 0.35.$$

$\therefore$  所求的回归方程为  $y = 0.7x + 0.35$ .

(3)  $x = 100$ ,  $y = 100 \times 0.7 + 0.35 = 70.35$ .

预测生产 100 吨甲产品的生产能耗比技术改造前降低  $90 - 70.35 = 19.65$  (吨).

: )☆ : )☆ : )☆ : )我学习 😊 我快乐 ! : )☆ : )☆ : )☆ : )

### 回 归

“回归”一词是英国科学家高尔顿提出的. 高尔顿是遗传学家, 研究人类身高问题.

在身高遗传问题中他观察到下列现象: 人们都知道身材高大的父母会有较高的后代, 身材矮小的父母其孩子也矮, 那么由此就容易得到的一个基本结论: 随着时间的进程, 则人群中的身高的差异就会愈来愈大, 然而这一情况并未发生. 高尔顿发现人的身高在遗传中会“回归”到人群的“均值”, 即: 高的人群的后代虽然身材

较高, 但有许多会略低于其父母; 反之矮的父母, 其后代也可能会比他们高. 因此, 高尔顿发现后代的身高虽依赖于父母, 然而人群高度差异变化却由“回归”而趋向于平均值, 以此足以保证人群高度在相当一段时间内几乎不太发生变化.

简而言之, 高尔顿发现随着时间的进程而产生的回归现象给我们指出了大自然中的一种“中庸之道”: 高的值将会回归到较低的值, 而低的也将回到高的值, 这个客观值就是均值.

## 第二章 推理与证明

### 👑 焦点导入

伽罗华是法国数学家,19世纪杰出的数学天才.

鲁柏是伽罗华的好友.一天,伽罗华得知鲁柏被刺的不幸消息,急忙奔赴探询.女看门人告诉伽罗华,警察已勘察过现场,没有发现其他线索,只是看到鲁柏手里紧捏着半块没有吃完的苹果馅饼,令人费解.她认为作案人可能就在公寓内,因为案发前后,她一直在传达室,没有看见有人进公寓来.可是这座四层楼的公寓,每层有15间房,住着100多人,情况比较复杂,这可能是警察到目前还未能破案的原因.数学家思索着.最后,请女看门人带他到三楼,在314号房门前停了下来,问道:“这房间是谁住的?”女看门人答道:“米塞尔.”“这人怎样?”“他爱赌钱,好喝酒,昨天已经搬走了.”“这个米塞尔就是杀人凶手!”数学家肯定地说.女看门人非常惊奇,忙问:“有什么根据?”



数学家分析说:“鲁柏手里的馅饼就是一条线索.馅饼英语叫 pie,而希腊语 pie 就是  $\pi$ ,即通常说的圆周率.人们在计算时,常取  $\pi$  的近似值为 3.14.鲁柏是一位喜欢数学且善于思考的人,临死时他终于想到用馅饼来暗示凶手所住的房间.”

根据数学家的推理分析,警方经过侦察,最后逮捕了米塞尔.经审讯,米塞尔承认因赌博输钱,看到鲁柏家里汇来巨款,遂生杀机.

### 👑 课标聚焦

1. 了解合情推理的含义和基本类型.
2. 结合已学过的数学实例和生活中的实例,了解合情推理的含义,能利用归纳和类比等进行简单的推理,体会并认识合情推理在数学发现中的作用.
3. 结合已学过的数学实例和生活中的实例,体会演绎推理的重要性,掌握演绎推理的基本模式,并能运用它们进行一些简单推理.
4. 通过具体实例,了解合情推理和演绎推理之间的联系和差异.
5. 了解间接证明的一种基本方法——反证法;了解反证法的思维过程、特点.

## 2.1 合情推理与演绎推理

### 2.1.1 合情推理

#### 自主预习

1. 由某些事物的部分对象具有某些特征, 推出该类事物的全部对象都具有这些特征的推理, 或者由个别事实概括出一般结论的推理, 称为\_\_\_\_\_。它是\_\_\_\_\_的推理。

2. 由两类对象具有某些类似特征和其中一类对象的某些已知特征, 推出另一类对象也具有这些特征的推理称为\_\_\_\_\_。它是\_\_\_\_\_的推理。

3. 类比推理和归纳推理都是根据已有的事实, 经过\_\_\_\_\_, 再进行归纳、类比, 然后提出猜想的推理, 我们把它们统称为\_\_\_\_\_。

#### 逐点扫描

##### 焦点一 用归纳推理猜测数列的通项公式

通过计算数列的前几项, 观察发现这几项所具有的规律, 以及项与项数之间的关系, 从而猜测第  $n$  项与  $n$  之间的关系式。

##### 例 1

在数列  $\{a_n\}$  中,  $a_1 = 1, a_{n+1} = \frac{2a_n}{2+a_n} (n \in \mathbf{N}^*)$ , 试猜想这个数列的通项公式。

**【解答】**  $\because a_1 = 1, a_{n+1} = \frac{2a_n}{2+a_n} (n \in \mathbf{N}^*)$ ,

$$\therefore a_1 = 1 = \frac{2}{1+1}, a_2 = \frac{2a_1}{2+a_1} = \frac{2}{2+1}, a_3 = \frac{2a_2}{2+a_2} =$$

$$\frac{2}{3+1}, a_4 = \frac{2a_3}{2+a_3} = \frac{2}{4+1}, a_5 = \frac{2a_4}{2+a_4} = \frac{2}{5+1}, \dots$$

$\therefore$  可以猜想这个数列的通项公式是  $a_n = \frac{2}{n+1}$ 。

**【点评】** 归纳是依据若干已知的、没有穷尽的现象推断尚属未知的现象, 因而结论具有猜测性。

##### 变式题

1. 已知数列的前四项为  $\frac{3}{2}, 1, \frac{5}{8}, \frac{3}{8}, \dots$ , 归纳出通项公式  $a_n =$ \_\_\_\_\_。

2. 数列  $\{a_n\}$  中,  $a_1 = \frac{1}{2}, a_{n+1} - 3a_n = 0$ , 则  $a_n$  的通项公式为\_\_\_\_\_。

3. 设正数数列  $\{a_n\}$  的前  $n$  项和为  $S_n$ , 且存在正数  $t$ , 使得对所有正整数  $n$  有  $\sqrt{tS_n} = \frac{t+a_n}{2}$ , 则通过归纳猜测可得到  $S_n =$ \_\_\_\_\_。

4. 依次有下列等式:  $1 = 1^2, 2 + 3 + 4 = 3^2, 3 + 4 + 5 + 6 + 7 = 5^2$ , 按此规律下去, 第 8 个等式为\_\_\_\_\_。

##### 焦点二 从特殊到一般的猜想

1. 归纳是依据特殊现象推断一般现象, 因而由归纳所得的结论超越了前提所包容的范围。

2. 对有限的资料进行观察、分析、归纳、整理, 提出带有规律性的结论, 即猜想; 猜想需检验。

##### 例 2

已知下列等式:

$$\sin^2 30^\circ + \sin^2 90^\circ + \sin^2 150^\circ = \frac{3}{2};$$

$$\sin^2 5^\circ + \sin^2 65^\circ + \sin^2 125^\circ = \frac{3}{2}.$$

通过观察上述两等式的规律, 请你写出一般性的命题, 并给出证明。

**【分析】** 从上面两个式子中可发现角之间的关系:  $30^\circ = 90^\circ - 60^\circ, 150^\circ = 90^\circ + 60^\circ, 5^\circ = 65^\circ - 60^\circ, 125^\circ = 65^\circ$

+60°. 由此猜测一般规律:  $\alpha - 60^\circ, \alpha, \alpha + 60^\circ$  具有关系  $\sin^2(\alpha - 60^\circ) + \sin^2 \alpha + \sin^2(\alpha + 60^\circ) = \frac{3}{2}$ .

**【解答】** 一般性的命题为  $\sin^2(\alpha - 60^\circ) + \sin^2 \alpha + \sin^2(\alpha + 60^\circ) = \frac{3}{2}$ .

**证明:** 因为, 左边 =  $\frac{1 - \cos(2\alpha - 120^\circ)}{2} + \frac{1 - \cos 2\alpha}{2} + \frac{1 - \cos(2\alpha + 120^\circ)}{2}$

$$= \frac{3}{2} - \frac{1}{2} [\cos(2\alpha - 120^\circ) + \cos 2\alpha + \cos(2\alpha + 120^\circ)]$$

$$= \frac{3}{2},$$

所以, 左边等于右边.

**【点评】** 从特殊到一般的归纳, 是通过有限个资料的观察、分析、提炼发现其中某些规律, 从而猜想出一般性的结论, 结论的可靠性需要证明.

**变身题**

5. 观察下列两个式子:

$$\tan 10^\circ \tan 20^\circ + \tan 20^\circ \tan 60^\circ + \tan 60^\circ \tan 10^\circ = 1;$$

$$\tan 5^\circ \tan 10^\circ + \tan 10^\circ \tan 75^\circ + \tan 75^\circ \tan 5^\circ = 1.$$

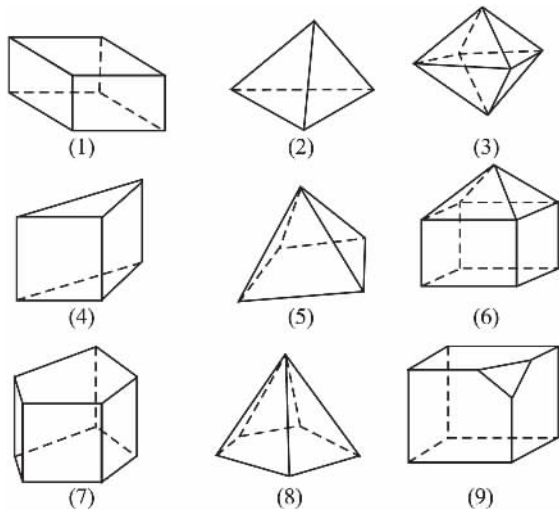
由以上两式成立, 推广到一般结论, 写出你的推断.

**焦点三 运用归纳推理发现几何图形的性质**

根据所给的有限个几何图形所具有的某些性质, 从而归纳出一类几何图形也具有这种性质.

**例 3**

数一数下图中 9 个凸多面体的面数  $F$ 、顶点数  $V$  和棱数  $E$ , 然后用归纳法推理得出它们之间的关系.



**【分析】** 分别计算出以上各多面体的面数  $F$ 、顶点数  $V$  和棱数  $E$ , 根据数字之间的规律进行猜测.

**【解答】** 列表如下:

多面体	面数( $F$ )	顶点数( $V$ )	棱数( $E$ )
(1)	6	8	12
(2)	4	4	6
(3)	8	6	12
(4)	5	6	9
(5)	5	5	8
(6)	9	9	16
(7)	7	10	15
(8)	6	6	10
(9)	7	10	15

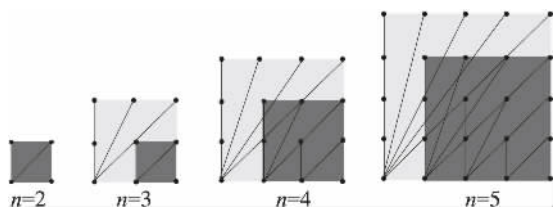
猜想:  $F + V - E = 2$ .

**【点评】** 归纳是立足于观察、经验、实验和对有限资料分析的基础上提出带有规律性的结论, 未必可靠, 需要证明.

**变身题**

6. 探索  $n \times n$  的正方形钉子上 ( $n$  是钉子板每边上的钉子数), 连接任意两个钉子所得到的不同长度值

的线段种数：



当  $n=2$  时，钉子上所连不同线段的长度值有  $1$  与  $\sqrt{2}$ ，所以不同长度值的线段只有  $2$  种，若用  $S$  表示不同长度值的线段种数，则  $S=2$ ；

当  $n=3$  时，钉子上所连不同线段的长度值只有  $1, \sqrt{2}, 2, \sqrt{5}, 2\sqrt{2}$ ，所以不同长度值的线段有  $5$  种，比  $n=2$  时增加了  $3$  种，即  $S=2+3=5$ 。

(1) 观察图形，填写下表：

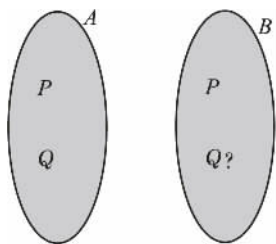
钉子数 ( $n \times n$ )	S 值
$2 \times 2$	2
$3 \times 3$	2+3
$4 \times 4$	2+3+( )
$5 \times 5$	( )

(2) 写出  $(n-1) \times (n-1)$  和  $n \times n$  的两个钉子上，不同长度值的线段种数之间的关系(用式子或语言表述均可)；

(3) 对  $n \times n$  的钉子板，写出用  $n$  表示  $S$  的代数式。

#### 焦点四 类比推理

类比推理针对的是两类事物，如下图所示：



在  $A$  和  $B$  两类事物中， $A$  类中有性质  $P$  成立， $B$  类中也有性质  $P$  成立， $A$  类中还有性质  $Q$  成立，那么  $B$  类中是否也具有性质  $Q$  成立呢？通过两类事物的类比可以对事物的性质有更深刻的理解，并且可以帮助我们进行逻辑推理。

#### 例 4

在  $\triangle DEF$  中有余弦定理：

$$DE^2 = DF^2 + EF^2 - 2DF \cdot EF \cos \angle DFE.$$

拓展到空间，类比三角形的余弦定理，写出斜三棱柱  $ABC-A_1B_1C_1$  的 3 个侧面面积与其中两个侧面所成二面角之间的关系式，并予以证明。

【分析】 平面与空间类比元素之间对应关系：点  $\leftrightarrow$  直线，直线  $\leftrightarrow$  平面，角  $\leftrightarrow$  二面角，长  $\leftrightarrow$  面积，面积  $\leftrightarrow$  体积。

【解答】 根据类比猜想得出结论：

$$S_{AA_1C_1C}^2 = S_{ABB_1A_1}^2 + S_{BCC_1B_1}^2 - 2S_{ABB_1A_1} \cdot S_{BCC_1B_1} \cos \theta.$$

其中  $\theta$  为侧面  $ABB_1A_1$  与  $BCC_1B_1$  所成的二面角的平面角。

理由如下：作斜三棱柱  $ABC-A_1B_1C_1$  的直截面  $DEF$ ，则  $\angle DFE$  为面  $ABB_1A_1$  与面  $BCC_1B_1$  所成的平面角，在  $\triangle DEF$  中有余弦定理：

$$DE^2 = DF^2 + EF^2 - 2DF \cdot EF \cos \theta,$$

左右同乘以  $AA_1^2$ ，得：

$$DE^2 \cdot AA_1^2 = DF^2 \cdot AA_1^2 + EF^2 \cdot AA_1^2 - 2DF \cdot AA_1 \cdot EF \cdot AA_1 \cos \theta,$$

$$\text{即 } S_{AA_1C_1C}^2 = S_{ABB_1A_1}^2 + S_{BCC_1B_1}^2 - 2S_{ABB_1A_1} \cdot S_{BCC_1B_1} \cos \theta.$$

【点评】 (1) 类比是从人们已经掌握了的事物的属性推测正在研究的事物的属性，是以旧有的认识为基础类比出新的结果。(2) 类比是从一种事物的特殊属性推测另一种事物的特殊属性。(3) 类比的结论是猜测性的，不一定可靠，但它却有发现的功能。

#### 变身题

7. 在平面几何里有射影定理：“设  $\triangle ABC$  的两边  $AB \perp AC$ ， $D$  是  $A$  点在  $BC$  边上的射影，则  $AB^2 = BD \cdot BC$ 。”拓展到空间，在四面体  $A-BCD$  中， $DA \perp$  面  $ABC$ ，点  $O$  是  $A$  在面  $BCD$  内的射影，且  $O$  在面  $BCD$  内，类比平面三角形的射影定理， $\triangle ABC$ ， $\triangle BOC$ ，

$\triangle BDC$  三者的面积关系为\_\_\_\_\_.

8. 三角形的面积为  $S = \frac{1}{2}(a+b+c)r$ , 其中  $a, b, c$  为三角形的边长,  $r$  为三角形内切圆的半径, 利用类比推理可以得出四面体的体积为( ).

A.  $V = \frac{1}{3}abc$

B.  $V = \frac{1}{3}Sh$

C.  $V = \frac{1}{3}(S_1 + S_2 + S_3 + S_4)r$  (其中  $S_1, S_2, S_3, S_4$  为四面体的四个面的面积,  $r$  为四面体内切球的半径)

D.  $V = \frac{1}{3}(ab+bc+ac)h$  (其中  $h$  为四面体的高)

### 焦点五 思维方法的类比

将解决一类问题的思路, 类比到解决另一类问题中来, 给我们解决新问题提供方法和思路.

#### ✿ 例 5

已知以下过程可以求  $1+2+\dots+n$  的和:

因为  $(n+1)^2 - n^2 = 2n+1$ ,

$n^2 - (n-1)^2 = 2(n-1)+1$ ,

.....

$2^2 - 1^2 = 2 \times 1 + 1$ ,

从而有  $(n+1)^2 - 1^2 = 2(1+2+\dots+n) + 2n$ ,

所以  $1+2+\dots+n = \frac{n(n+1)}{2}$ .

类比以上过程, 求  $1^2+2^2+\dots+n^2$  的和.

【解答】  $2^3 - 1^3 = 3 \times 1^2 + 3 \times 1 + 1$ ,

$3^3 - 2^3 = 3 \times 2^2 + 3 \times 2 + 1$ ,

$4^3 - 3^3 = 3 \times 3^2 + 3 \times 3 + 1$ ,

.....

$(n+1)^3 - n^3 = 3 \times n^2 + 3 \times n + 1$ .

将以上各式分别相加, 得:

$(n+1)^3 - 1^3 = 3 \times (1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2) + 3 \times (1 + 2 + 3 + \dots + n) + n$ ,

所以  $1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2$

$= \frac{1}{3} \left[ (n+1)^3 - 1 - n - 3 \times \frac{1+n}{2} \times n \right]$

$= \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1)$ .

### ☺ 变主题

9. 已知两个圆①  $x^2 + y^2 = 1$  与②  $x^2 + (x-3)^2 = 1$ , 则由①式减去②式可得上述两圆的对称轴方程. 将上述命题在曲线仍然为圆的情况下加以推广, 即可得到一个更一般的命题, 而己知命题应成为所推广命题的一个特例, 推广的命题为\_\_\_\_\_.

10. 设函数  $f(x) = \frac{1}{2^x + \sqrt{2}}$ , 利用推导等差数列前  $n$  项和公式的方法, 求出  $f(-5) + \dots + f(0) + \dots + f(5) + f(6)$  的值.

### 焦点六 归纳、类比的风险

运用归纳、类比推理得到的结论不一定可靠.

1. 从有限个元素中发现的规律, 不一定适合全体元素, 所以运用归纳推理的结论不一定可靠.

2. 有些问题看起来类似, 实质上存在着很大差异.

#### ✿ 例 6

已知数列  $\{a_n\}$  中,  $a_n = (n^2 - 5n + 5)^2$ .

由于  $a_1 = 1, a_2 = 1, a_3 = 1, a_4 = 1$ .

从而归纳得  $a_n = 1$ .

以上归纳结论对任意  $n \in \mathbb{N}^*$  都成立吗? 试说明理由.

【解答】 因为  $a_5 = 25 \neq 1$ , 所以以上归纳的结论对任意  $n \in \mathbb{N}^*$  不成立.

#### ✿ 例 7

已知  $a, b, c$  是实数, 则:

(1)  $a(b+c) = ab+ac$ ; (2)  $a(bc) = (ab)c$ .

我们可以将上面的实数运算律推广到向量加法与数量积的运算中.

设向量  $a, b, c$ , 类比实数的运算律的结论为:

(1)  $a \cdot (b+c) = a \cdot b + a \cdot c$ ;

(2)  $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$ .

以上类比的结论正确吗?

【解答】 (1) 正确; (2) 错误. 从方向看,  $a \cdot (b \cdot c)$  与  $a$  共线,  $(a \cdot b) \cdot c$  与  $c$  共线.

**变身题**

11. 已知  $f(n) = -n^2 + 5n - 3$ , 下面的证明过程正确吗? 为什么?

证明:  $f(1) = 1 > 0, f(2) = 3 > 0, f(3) = 3 > 0, f(4) = 1 > 0$ , 所以对  $n \in \mathbf{N}^*$ ,  $f(n) > 0$ .

12. 对于平面几何中的命题:“如果两个角的两边分别对应垂直, 那么这两个角相等或互补.” 在立体几何中, 类比上述命题, 可以得到命题:“\_\_\_\_\_.” 这个类比命题的真假性是\_\_\_\_\_.

**焦点训练**

1. 在数列 1, 1, 2, 3, 5, 8,  $x$ , 21, 34, 55 中,  $x$  的值等于( ).

- A. 11      B. 12      C. 13      D. 14

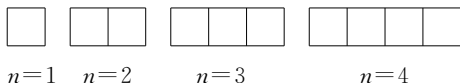
2. 数列 2, -4, 6, -8, ... 的一个通项公式为( ).

- A.  $a_n = 2^n$                       B.  $a_n = (-1)^n \cdot 2^n$   
C.  $a_n = (-1)^{n+1} \cdot 2n$       D.  $a_n = (-1)^n \cdot 2n$

3. 数列 3, 5, 9, 17, 33, ... 的一个通项公式  $a_n$  等于( ).

- A.  $2^n$       B.  $2^n + 1$       C.  $2^n - 1$       D.  $2^{n+1}$

4. 下图中由火柴杆拼成的一系列图形中, 第  $n$  个图形由  $n$  个正方形组成:



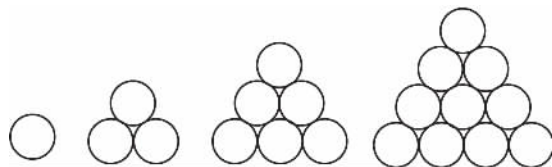
通过观察可以发现:

第四个图形中, 火柴杆有 \_\_\_\_\_ 根;  
第  $n$  个图形中, 火柴杆有 \_\_\_\_\_ 根.

5. 如果数列  $\{a_n\} (n \in \mathbf{N}^*)$  是等差数列, 那么数列  $b_n = \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} (n \in \mathbf{N}^*)$  也是等差数列. 类比上述性质,

相应地: 若数列  $\{c_n\}$  是等比数列, 且  $c_n > 0 (n \in \mathbf{N}^*)$ , 则有  $d_n = \frac{c_1 c_2 \dots c_n}{n} (n \in \mathbf{N}^*)$  也是等比数列.

6. 在德国不来梅举行的第 48 届世乒赛期间, 某商场橱窗里用同样的乒乓球堆成若干堆“正三棱锥”形的展品, 其中第一堆只有一层, 就一个乒乓球; 第二、三、四、... 堆最底层(第一层)分别按下图所示方式固定摆放. 从第一层开始, 每层的小球自然垒放在下一层之上, 第  $n$  堆第  $n$  层就放一个乒乓球, 以  $f(n)$  表示第  $n$  堆的乒乓球总数, 由  $f(1), f(2), f(3)$  的值猜测  $f(n)$  的表达式(答案用  $n$  表示).



7. 已知数列  $\{a_n\}$  的通项公式为  $a_n = \frac{1}{(n+1)^2} (n \in \mathbf{N}^*)$ ,

$f(n) = (1-a_1)(1-a_2)\dots(1-a_n)$ , 试计算  $f(1), f(2), f(3)$  的值, 由此推测出  $f(n)$  的值.

8. 观察以下各等式:

$$\sin^2 30^\circ + \cos^2 60^\circ + \sin 30^\circ \cos 60^\circ = \frac{3}{4},$$

$$\sin^2 20^\circ + \cos^2 50^\circ + \sin 20^\circ \cos 50^\circ = \frac{3}{4},$$