目　录

写给同学们的话

亲爱的同学：

当你打开这本书时，你的眼前会为之一亮：呵，《资源型学案》，老朋友了！

它曾是你学习上的忠实助手，教你总览全章，掌握要领；帮你解疑答惑，顺利过关；助你曲径寻芳，扩大视野. 总之，它伴你走过了初中那紧张而愉快的三年岁月.

《资源型学案》是安徽教育出版社经过多年努力精心打造的一个成熟的知名教辅品牌，今天它又以一个老朋友的身份，将要伴你共度高中的美好时光，与你一同成长，它更期盼你的支持和帮助.

老朋友，新面貌；老朋友，新内涵. 让我们再重新认识一下这位新阶段的老朋友. 现在我们荣幸地为你介绍本册书的主要特色：

本书与人民教育出版社新课标版高中数学教材配套使用，力图贯彻《数学课程标准》精神，努力挖掘课程资源，提高学生的综合素质，体现"以学生为学习主体"的教学新理念. 因此，它会成为你的课外家教和自学的好帮手.

本书在编排上匠心独具，知识性强，趣味性强. 知识讲解上做到先总览各章的知识要点，再难点突破；题型安排上先基础，后综合，由易到难，循序渐进，力求让你做到对课本内容的融会贯通. 这套书的主要栏目如下：

【总览全章】 总体展现本章要学习的基本知识点.

【各个击破】 下设"教材详解"、"典例分析"和"双基训练"等内容.

"教材详解"主要针对课文中出现的重点、难点、高考常考热点进行讲解.

"典例分析"主要针对本节出现的重点知识进行演练，重点针对学生易错点，并把课本中零散出现的知识加以系统化、结构化、网络化.

"双基训练"通过综合训练，让学生巩固所学的课本知识，进一步提高运用数学的能力.

【融会贯通】 进一步拓展课本知识，扩充课程资源，从总体上掌握学习数学的方法和策略，增强文化意识，提高学习数学的自觉性.

总之，这套书一定会给你带来希望，带来成功. 祝你在知识的攀登中更上一层楼. 你若对《资源型学案》有什么意见、建议、需求和想法，请及时与我们联系. 我们的电话是 0551－2846172，电子信箱是 yibs@ahep. cn. 对于你的积极参与，我们将非常感谢.

编　者

《高中资源型学案》学生反馈卡

感谢您一如既往地支持《资源型学案》。新学期，我们将再接再厉，维护好该品牌，同时，我们仍需要您的配合。请认真填写下面的信息卡和调查问卷，寄回我社，我们和往常一样准备了精美的礼品赠送给摇奖产生的幸运读者。

一、《资源型学案》读者信息卡(回执)

<table>
<tr><td>我的姓名</td><td></td><td>性别</td><td colspan="2"></td><td>学校地址</td><td colspan="3"></td><td>我的年级</td><td></td></tr>
<tr><td>我的地址</td><td colspan="4"></td><td>电子信箱</td><td colspan="3"></td><td>我的班级</td><td></td></tr>
<tr><td>所购科目</td><td></td><td>版本</td><td colspan="2"></td><td>购书地点</td><td colspan="3"></td><td>该科老师</td><td></td></tr>
<tr><td colspan="2">你认为水平高的各科老师</td><td>语文</td><td>数学</td><td>英语</td><td>历史</td><td>地理</td><td>物理</td><td>化学</td><td>生物</td><td>政治</td></tr>
<tr><td colspan="2">他/她的姓名</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>

二、《资源型学案》调查问卷(若非特殊说明，只需在方格里打"√")

1. 我购买的本册书全称是资源型学案高中数学必修⑤(人教课标版)
2. 我购买本书的理由是：□老师介绍 □别人推荐 □同学都买 □价格便宜
   □体例很好 □内容很好 □答案详细 □其他原因
3. 我对本书总体印象是：□很好 □好 □一般 □差 □很差
4. 本书与我的学习：□同步 □基本同步 □不同步
5. 本书的习题量：□太多 □适中 □太少
6. 习题的难易程度：□太难 □较难 □适中 □简单 □太简单
7. 本书的封面设计：□很好 □好 □一般 □不好
8. 本书的价格：□很高 □偏高 □合理 □较低 □很低
9. 本书最好(打"√")与最差(打"×")的栏目：
   □总览全章 □各个击破 □融会贯通 □参考答案
   □教材详解 □典例分析 □双基训练 □单元测试
10. 本书需要改进的地方有(标出页码)：
    (1)__________(2)__________(3)__________(4)__________
    本书错误、欠妥的地方有(指出错误并标出页码)：
    (1)答案错误：__________(2)习题重复：__________(3)习题老化：__________
    (4)分析不到位：__________(5)点评不到位：__________
11. 我最喜欢的辅导书有：__________
12. 我希望你们出版这样的学习用书：__________

地址：安徽省合肥市回龙桥路新闻出版大厦安徽教育出版社第一学生读物编辑部　　**邮编**：230063

电子信箱：yibs@ahep.cn

咨询电话：0551－2846172

第一章
解三角形

总览全章

课标聚焦

1. **通过对任意三角形边长和角关系的探索,掌握正弦定理、余弦定理,并能解决一些简单的三角形度量问题.**
2. **能够熟练运用正弦定理、余弦定理等知识和方法解决一些与测量和几何计算有关的生活实际问题.**

知识网络

解三角形

正弦定理 ⟷ 余弦定理

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$$
$$S=\frac{1}{2}ab\sin C=\frac{1}{2}ac\sin B=\frac{1}{2}bc\sin A$$

$$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$$
$$b^2=a^2+c^2-2ac\cos B$$
$$c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$$

应用与举例

1.已知两角一边解三角形
2.已知两边和其中一边的对角解三角形

1.已知两边及夹角解三角形
2.已知三边解三角形

1.距离问题
2.高度问题
3.角度问题
4.几何计算问题

各个击破

§1.1 正弦定理和余弦定理

1.1.1 正弦定理

教材详解

●内容扫描

在$\triangle ABC$中,设a,b,c分别是$\angle A,\angle B,\angle C$的对边,$R$为$\triangle ABC$外接圆的半径.

1. **内角和定理**

$A+B+C=\pi$, $A=180^\circ-(B+C)$, $\frac{A}{2}=90^\circ-\frac{B+C}{2}$.

2. **正弦定理及三种变式**

$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R$.

变式: $a=2R\sin A$, $b=2R\sin B$, $c=2R\sin C$;

$\sin A=\frac{a}{2R},\sin B=\frac{b}{2R},\sin C=\frac{c}{2R}$;

$a:b:c=\sin A:\sin B:\sin C$.

3. 利用正弦定理可以解决如下有关解三角形的问题

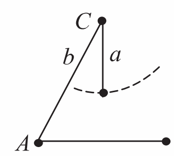
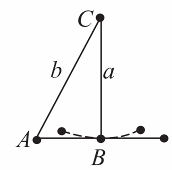
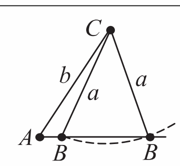
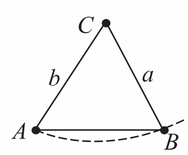
(1)若已知两角及一边,求三角形的其他边和角,此时三角形的解唯一.

(2)若已知两边及其中一边的对角,求三角形的其他边和角,此时三角形的解需要讨论.

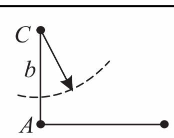
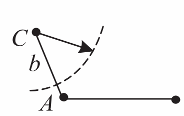
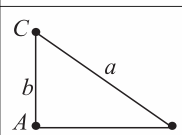
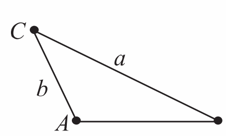
4. 三角形解的个数判断

在△ABC中,已知a,b和A解三角形有如下几种情况:

(1) A为锐角:

$a<b\sin A$	无解	
$a=b\sin A$	一解	
$b\sin A<a<b$	二解	
$a\geq b$	一解	

(2) A为直角或钝角:

$a\leq b$	无解		
$a>b$	一解		

●思想方法提炼

1. 正弦定理的推导从思想方法上来讲,采取了从特殊到一般的归纳思想,这是我们处理问题的常用方法之一.

2. 向量法是一种重要的数学方法,要认真领会、掌握并有意识地运用.

3. 利用向量的射影概念也可证明正弦定理.

4. 在讨论解的个数时要注意数形结合.

典例分析

例1 在△ABC中,已知$a=2$,$c=\sqrt{6}$,$A=45°$,求b及B,C.

分析 已知三角形两边和其中一边的对角解三角形的问题,可运用正弦定理求解,首先求得这两边中的另一边对角的正弦值;其次根据该正弦值求角时,需要对解的情况加以讨论.

解答 由正弦定理$\frac{a}{\sin A}=\frac{c}{\sin C}$,

得$\sin C=\frac{c\sin A}{a}=\frac{\sqrt{6}\times\sin 45°}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

$\because c\sin A<a<c$,$\therefore C=60°$或$120°$.

$\therefore$当$C=60°$时,$B=75°$,

$b=\frac{c\sin B}{\sin C}=\frac{\sqrt{6}\sin 75°}{\sin 60°}=\sqrt{3}+1$;

当$C=120°$时,$B=15°$,

$b=\frac{c\sin B}{\sin C}=\frac{\sqrt{6}\sin 15°}{\sin 60°}=\sqrt{3}-1$.

综上所述,$b=\sqrt{3}+1$,$B=75°$,$C=60°$或$b=\sqrt{3}-1$,$B=15°$,$C=120°$.

点评 对求出的结果要简答.

变式一 在△ABC中,已知$c=\sqrt{6}$,$A=45°$.

当________时,三角形有一解;

当________时,三角形有两解;

当________时,三角形无解.

(填边a应满足的条件)

变式二 在△ABC中,已知$a=2$,$c=\sqrt{6}$.

当________时,三角形有一解;

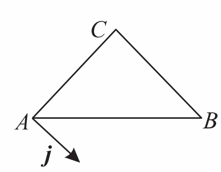
当________时,三角形有两解;

当________时,三角形无解.

(填角A应满足的条件)

例2 试用向量方法证明:当△ABC是锐角三角形时,$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$.

证明 过点A作$\boldsymbol{j}\perp\overrightarrow{AC}$,由向量的加法可得$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CB}$,



则$\boldsymbol{j}\cdot\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{j}\cdot(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CB})$,

$\therefore \boldsymbol{j}\cdot\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{j}\cdot\overrightarrow{AC}+\boldsymbol{j}\cdot\overrightarrow{CB}$,

$|\boldsymbol{j}||\overrightarrow{AB}|\cos(90°-A)=0+|\boldsymbol{j}||\overrightarrow{CB}|\cos(90°-C)$.

$\therefore c\sin A=a\sin C$,即$\frac{a}{\sin A}=\frac{c}{\sin C}$.

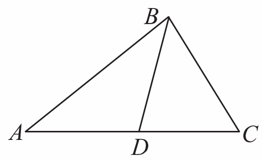
同理,过点C作$\boldsymbol{j}\perp\overrightarrow{BC}$,可得$\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$,

从而$\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}$.

点评 类似可推出，当$\triangle ABC$是钝角三角形时，以上关系式仍然成立.(同学们可以尝试推导过程)

这里用到的公式是：$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\theta$.

例3 已知$\triangle ABC$中，BD为角B的平分线，求证：$AB:BC=AD:DC$.



分析 角B的平分线BD将$\triangle ABC$分成了两个三角形：$\triangle ABD$与$\triangle CBD$，故要证结论成立，可证明它的等价形式：$AB:AD=BC:DC$，从而把问题转化到两个三角形内，故可利用正弦定理将所证继续转化为$\begin{cases}\dfrac{AB}{\sin\angle ADB}=\dfrac{AD}{\sin\angle ABD},\\ \dfrac{BC}{\sin\angle BDC}=\dfrac{DC}{\sin\angle DBC},\end{cases}$再根据相等角正弦值相等、互补角正弦值也相等即可证明结论.

证明 在$\triangle ABD$内，利用正弦定理得$\dfrac{AB}{\sin\angle ADB}=\dfrac{AD}{\sin\angle ABD}$，即$\dfrac{AB}{AD}=\dfrac{\sin\angle ADB}{\sin\angle ABD}$.

在$\triangle BCD$内，利用正弦定理得$\dfrac{BC}{\sin\angle BDC}=\dfrac{DC}{\sin\angle DBC}$，即$\dfrac{BC}{DC}=\dfrac{\sin\angle BDC}{\sin\angle DBC}$.

$\because BD$是角B的平分线，

$\therefore\angle ABD=\angle DBC$，

$\therefore\sin\angle ABD=\sin\angle DBC$.

$\because\angle ADB+\angle BDC=180°$，

$\therefore\sin\angle ADB=\sin(180°-\angle BDC)=\sin\angle BDC$.

$\therefore\dfrac{AB}{AD}=\dfrac{\sin\angle ADB}{\sin\angle ABD}=\dfrac{\sin\angle BDC}{\sin\angle DBC}=\dfrac{BC}{DC}$，

$\therefore\dfrac{AB}{BC}=\dfrac{AD}{DC}$.

点评 利用正弦定理将边的关系转化为角的关系，并且注意互补角的正弦值相等这一特殊关系式的应用.

链接 在$\triangle ABC$中，求证：$\dfrac{\cos 2A}{a^2}-\dfrac{\cos 2B}{b^2}=\dfrac{1}{a^2}-\dfrac{1}{b^2}$.

例4 在$\triangle ABC$中，若$C=3B$，求$\dfrac{c}{b}$的取值范围.

分析 由已知角求两边关系，可考虑利用正弦定理进行转化.

解答 由正弦定理可知：

$\dfrac{c}{b}=\dfrac{\sin C}{\sin B}=\dfrac{\sin 3B}{\sin B}=\dfrac{\sin(B+2B)}{\sin B}$

$=\dfrac{3\sin B-4\sin^3 B}{\sin B}$

$=3-4\sin^2 B$.

$\because A+B+C=180°$，$C=3B$，$A=180°-4B>0$，

$\therefore 0°<B<45°$，$\therefore 0<\sin^2 B<\dfrac{1}{2}$.

$\therefore 1<3-4\sin^2 B<3$，$\therefore 1<\dfrac{c}{b}<3$.

点评 (1)在解题过程中利用了三倍角公式：$\sin 3B=3\sin B-4\sin^3 B$.

(2)求解取值范围可以先建立一种函数关系式.函数思想是高中数学的核心思想.

双基训练

1. 在$\triangle ABC$中，$\sin^2 A=\sin^2 B+\sin^2 C$，则$\triangle ABC$为(　　).

A. 直角三角形　　B. 等腰直角三角形

C. 等边三角形　　D. 等腰三角形

2. 在$\triangle ABC$中，$\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}=k$，则$k$为($R$为$\triangle ABC$外接圆半径)(　　).

A. $2R$　　B. R　　C. $4R$　　D. $\dfrac{1}{2}R$

3. 在$\triangle ABC$中，若$a\cos A-b\cos B=0$，则此三角形是(　　).

A. 等腰三角形

B. 等腰直角三角形

C. 直角三角形

D. 等腰三角形或直角三角形

4. 在$\triangle ABC$中，若$A:B:C=4:1:1$，则三边之比为(　　).

A. $3:1:1$　　B. $2:1:1$

C. $\sqrt{2}:1:1$　　D. $\sqrt{3}:1:1$

5. 在$\triangle ABC$中，如果$A=30°$，$a=2$，则$\dfrac{a+b+c}{\sin A+\sin B+\sin C}=$________.

6. 在$\triangle ABC$中，若$a=1$，$A=30°$，$c=2$，则此三角形的形状为________.

7. 在$\triangle ABC$中，若$\sin A:\sin B:\sin C=3:4:5$，周长是24，则$ac=$________.

8. 三角形三个内角之比为 $1:2:3$，最长边是 12，它的面积是__________.

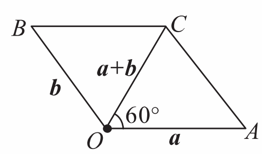
9. 在 $\triangle ABC$ 中，$b=\sqrt{3}$，$B=60^\circ$，$c=1$，求 a 和 A，C.

10. 在 $\triangle ABC$ 中，已知 a,b,A（A 为钝角），讨论三角形解的情况.

11. 已知 $|\boldsymbol{a}|=8$，$|\boldsymbol{b}|=7$，$\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 形成的夹角为 60°. 求：

（1）$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 的夹角 θ；

（2）$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$.



（第 11 题图）

12. 在 $\triangle ABC$ 中，已知 $\dfrac{\sin A}{\sin C}=\dfrac{\sin(A-B)}{\sin(B-C)}$，求证：$2b^2=a^2+c^2$.

1.1.2　余弦定理

教材详解

●内容扫描

设 $\triangle ABC$ 中，a,b,c 分别是 $\angle A,\angle B,\angle C$ 的对边，R 为 $\triangle ABC$ 外接圆的半径.

1. 余弦定理及其变形形式

$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$，

$b^2=a^2+c^2-2ac\cos B$，

$c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$.

变形：$\cos A=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$，$\cos B=\dfrac{a^2+c^2-b^2}{2ac}$，$\cos C=\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$.

2. 余弦定理的适用题型

余弦定理的每一个等式中都包含四个不同的量，它们分别是三角形的三个边和一个角，因此，运用余弦定理可以解决以下两类问题：

（1）已知三边，求三个角；

（2）已知两边和它们的夹角，求第三边和其他两个角.

●思想方法提炼

1. 余弦定理中 $bc\cdot\cos A$ 在形式上与向量的数量积形式类似，从而联想到用向量法来证明余弦定理，这种结构分析法是一种常见的数学思维方式.

2. 在余弦定理中，每个等式均有四个量，知其三必可求解三角形，这是方程思想的体现.

3. 余弦定理是勾股定理的推广，勾股定理是余弦定理的特例.

典例分析

例 1　在 $\triangle ABC$ 中，已知 $a=1$，$b=\sqrt{3}$，$c=2$，解三角形.

分析　已知三角形三边求角的问题，可以利用余弦定理，意在使同学们熟悉余弦定理的形式.

解答　由余弦定理的推论得：

$\cos A=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\dfrac{(\sqrt{3})^2+2^2-1^2}{2\times\sqrt{3}\times 2}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，

$A=30^\circ$；

$\cos B=\dfrac{c^2+a^2-b^2}{2ca}=\dfrac{2^2+1^2-(\sqrt{3})^2}{2\times 2\times 1}=\dfrac{1}{2}$，

$B=60^\circ$；

$C=180^\circ-(A+B)=180^\circ-(30^\circ+60^\circ)=90^\circ$.

点评　（1）为保证求解结果符合三角形内角和定

理，可用余弦定理求出两角，第三角用三角形内角和定理去求.

(2)对于较复杂的运算，可以利用计算器.

(3)对于特殊数，可先算出最大角，例如 $C=90°$，然后用三角函数定义来解.

变式一　已知$\triangle ABC$的三边之比是 $3:4:5$，求这个三角形的最大角.

变式二　在$\triangle ABC$中，$\sin A:\sin B:\sin C=1:\sqrt{3}:2$，则 $\cos B$ 的值为(　　).

A. $-\frac{1}{4}$　　B. $\frac{1}{4}$　　C. $\frac{1}{2}$　　D. $\frac{\sqrt{3}}{2}$

例 2　在$\triangle ABC$中，已知 $a=2\sqrt{3}$，$c=\sqrt{6}+\sqrt{2}$，$B=45°$，求 b 及 A.

分析　已知三角形两边及夹角，求第三边的问题，要利用余弦定理来解答. 求 A 可以利用余弦定理，也可以利用正弦定理.

解答　$\because b^2=a^2+c^2-2ac\cos B$

$=(2\sqrt{3})^2+(\sqrt{6}+\sqrt{2})^2-2\times2\sqrt{3}\times(\sqrt{6}+\sqrt{2})\times\cos45°$

$=12+(\sqrt{6}+\sqrt{2})^2-4\sqrt{3}(\sqrt{3}+1)=8$，

$\therefore b=2\sqrt{2}$.

下面求 A.

方法 1：$\because \cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$

$=\frac{(2\sqrt{2})^2+(\sqrt{6}+\sqrt{2})^2-(2\sqrt{3})^2}{2\times2\sqrt{2}\times(\sqrt{6}+\sqrt{2})}=\frac{1}{2}$，

$\therefore A=60°$.

方法 2：$\because \sin A=\frac{a}{b}\sin B=\frac{2\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}\cdot\sin45°$，

又$\because \sqrt{6}+\sqrt{2}>2.4+1.4=3.8$，

$2\sqrt{3}<2\times1.8=3.6$，

$\therefore a<c$，即 $0°<A<90°$，

$\therefore A=60°$.

点评　方法 2 应注意确定角 A 的取值范围.

例 3　用余弦定理证明三角形中的射影定理：

(1)$a=b\cos C+c\cos B$；

(2)$b=c\cos A+a\cos C$；

(3)$c=a\cos B+b\cos A$.

分析　用正弦定理证明如下：$a=b\cos C+c\cos B\Leftrightarrow \frac{b\cos C+c\cos B}{a}=1\Leftrightarrow \sin B\cos C+\sin C\cos B=\sin A\Leftrightarrow \sin(B+C)=\sin A$.

证明　在$\triangle ABC$中，由余弦定理得：

$b\cos C+c\cos B=b\cdot\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}+c\cdot\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}$

$=\frac{2a^2}{2a}=a$.

同理可证(2)、(3).

链接　已知方程 $x^2-(b\cos A)x+a\cos B=0$ 的两根之和等于两根之积，且 a,b 分别是$\triangle ABC$内角 A,B 所对边的边长，试判断这个三角形的形状.

例 4　在钝角$\triangle ABC$中，$\angle B>90°$，$a=2k-5$，$b=k+1$，$c=4$，求 k 的取值范围.

分析　由三角形的边角关系判定三角形的形状，基本思路是根据正弦定理和余弦定理进行边角变换，或全化为边的关系或全化为角的关系，然后利用简单的平面几何知识，即可判定.

解答　在钝角$\triangle ABC$中，$\because \angle B>90°$，

$\therefore A,C$ 都是锐角，且有：

$$\begin{cases}b>a,\\b>c,\\a+c>b,\\\cos B<0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}k+1>2k-5,\\k+1>4,\\2k-5+4>k+1,\\(2k-5)^2+4^2-(k+1)^2<0\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}k<6,\\k>3,\\k>2,\\3k^2-22k+40<0\end{cases}\Rightarrow\frac{10}{3}<k<4,$$

$\therefore \frac{10}{3}<k<4$.

点评　在$\triangle ABC$中，$\cos A<0$(或 $\cos B<0$ 或 $\cos C<0$)是确定$\angle A$(或$\angle B$或$\angle C$)是钝角的主要依据.

双基训练

1. 若三条线段长分别为 2，3，4，则用这三条线段(　　).

A. 能组成直角三角形

B. 能组成锐角三角形

C. 能组成钝角三角形

D. 不能组成三角形

2. 在$\triangle ABC$中，下列三式：$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}\leqslant 0$，$\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}\leqslant 0$，$\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}\leqslant 0$，可以成立的(　　).

A. 至少有一个

B. 至多有一个

C. 一个也没有

D. 三式可以同时成立

3. 在$\triangle ABC$中，$2b=a+c$，则$\angle B$的取值范围应是(　　).

A. $\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$　　B. $\left(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right)$

C. $\left(\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{2}\right)$　　D. $\left(0,\frac{\pi}{3}\right)$

4. 在钝角三角形ABC中，三边长是连续的自然数，则这样的三角形(　　).

A. 一个也没有　　B. 有无数多个

C. 仅有一个　　D. 仅有两个

5. 在$\triangle ABC$中，若$a^2=b^2+c^2+bc$，则角A的度数为__________.

6. 在$\triangle ABC$中，已知$a=1$，$b=2$，$\cos C=\frac{1}{2}$，则最大角的正弦值为__________.

7. 在$\triangle ABC$中，若$a\cos A=b\cos B$，则此三角形的形状是__________.

8. 已知$\triangle ABC$的三边长分别是x，3，4，若三角形是钝角三角形，则x的取值范围是__________.

9. 在$\triangle ABC$中，已知$a=7$，$b=5$，$c=3$，试判断$\triangle ABC$的形状.

10. 在$\triangle ABC$中，已知$\sin A=\frac{3}{5}$，$\sin A\cdot\cos A<0$，$a=3\sqrt{5}$，$b=5$，求c.

11. 在$\triangle ABC$中，点D在边BC上，且$BD=2$，$DC=1$，$\angle B=60°$，$\angle ADC=150°$，求AC的长.

12. 已知钝角三角形的三边长分别是a，$a+1$，$a+2$，其最大角不超过$120°$，求a的取值范围.

§1.2　应用举例

1.2.1　应用举例——测量距离

教材详解

●内容扫描

1. 解斜三角形的意义

遥不可及的月亮离我们地球究竟有多远呢？在古代，天文学家没有先进的仪器就已经估算出了两者的距离，是什么神奇的方法探索到这个奥秘的呢？我们知道，对于未知的距离、高度等，存在着许多可供选择的测量方案，比如可以应用全等三角形、相似三角形的方法，或借助解直角三角形等不同的方法. 但由于在实际测量问题的真实背景下，某些方法会不能实施，如因为没有足够的空间，不能用全等三角形的方法来测量，所以，有些方法有局限性. 正弦定理、余弦定理在科学实践中的

重要应用,有效地解决了测量距离的问题.

2.解斜三角形的方法

解决实际测量问题的过程一般要充分认真理解题意,正确作出图形,把实际问题里的条件和所求转换成三角形中的已知和未知的边、角,通过建立数学模型来求解.

3.解斜三角形应用题的一般步骤

(1)分析:理解题意,分清已知与未知,画出示意图.

(2)建模:根据已知条件与求解目标,把已知量与求解量尽量集中在有关的三角形中,建立一个解斜三角形的数学模型.

(3)求解:利用正弦定理或余弦定理有序地解出三角形,求得数学模型的解.

(4)检验:检验上述所求的解是否符合实际意义,从而得出实际问题的解.

4.正弦定理和余弦定理

在$\triangle ABC$中,

正弦定理:$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$.

余弦定理:

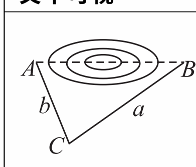
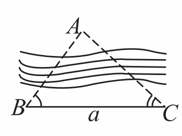
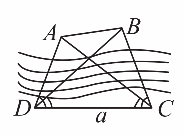
$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$,

$b^2=a^2+c^2-2ac\cos B$,

$c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$.

5.路程公式:$s=vt$.

6.测量距离的类型的判断

	两点间不可通又不可视	两点间可视但不可达	两点都不可达
求距离			

●思想方法提炼

1.我们可以通过类比解决实际问题,这样的开放性题目通过讨论,开放多种思路,从而发现问题并进行矫正.

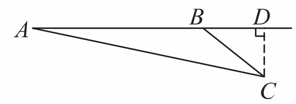
2.运用图形、数学符号表达题意和应用转化思想解决数学问题.

3.应用题常利用数学建模思想,结合正弦定理、余弦定理和解任意三角形的知识解决测量距离的问题.

4.在研究三角形时,灵活根据两个定理可以寻找到多种解决问题的方案.但有些过程较复杂,如何找到最优的方法,最主要的还是分析两个定理的特点,结合题目条件来选择最佳的计算方式.

典例分析

例1　航空测量组的飞机航线和山顶在同一铅直平面内,已知飞机的速度为180 km/h,飞机先看到山顶的俯角为15°,经过420 s后又看到山顶的俯角为45°,求航线上的飞机与山顶的最短距离.(取$\sqrt{2}=1.4$,$\sqrt{3}=1.7$)



分析　作图,要求CD,必须先求CB,根据题设条件,在$\triangle ACB$中由正弦定理便可算得.

解答　如图,$\because \angle A=15°,\angle DBC=45°$,

$\therefore \angle ACB=30°$,

$AB=180\text{ km/h}\times 420\text{ s}=21000\text{ m}$.

在$\triangle ABC$中,$\frac{BC}{\sin A}=\frac{AB}{\sin\angle ACB}$,

$\therefore BC=\frac{21000}{\frac{1}{2}}\cdot\sin 15°=10500(\sqrt{6}-\sqrt{2})$.

$\because CD\perp AD$,

$\therefore CD=BC\sin\angle CBD=BC\times\sin 45°$

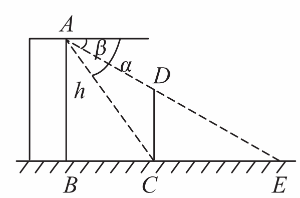
$=10500(\sqrt{6}-\sqrt{2})\times\frac{\sqrt{2}}{2}$

$=10500(\sqrt{3}-1)=10500(1.7-1)$

$=7350(\text{m})$.

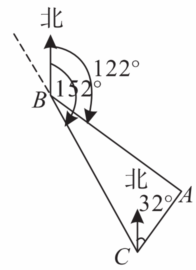
所以航线上的飞机与山顶的最短距离为7350 m.

变式一　如图所示,一建筑物AB高为h,从顶端A测得前方的围墙CD的C,D点的俯角分别为α,β,求盲区CE的长.

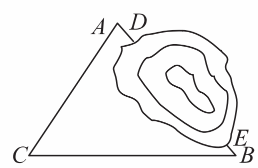


变式二　如图所示,货轮在海上以35海里/时的速度沿方位角(从正北方向顺时针转到目标方向线的水平角)为152°的方向航行.在B点处观测到灯塔A

的方位角为 122°. 半小时后，货轮到达 C 点处，观测到灯塔 A 的方位角为 32°. 求此时货轮与灯塔之间的距离.



例 2　为开凿隧道，要测量隧道口 D,E 间的距离，为此在山的一侧选取适当的点 C（如图），测得 $CA=482.8$ m，$CB=631.5$ m，$\angle ACB=56°18'$，又测得 A,B 两点到隧道口的距离 $AD=80.12$ m，$BE=40.24$ m（A,D,E,B 在一条直线上），计算隧道 DE 的长（精确到 0.1 m）.



解答　$\because CA=482.8$ m，$CB=631.5$ m，$\angle ACB=56°18'$，由余弦定理可得：$AB^2=CA^2+CB^2-2\cdot CA\cdot CB\cdot\cos C=482.8^2+631.5^2-2\times482.8\times631.5\times\cos56°18'\approx293557.05$.

$\therefore AB\approx541.81$.

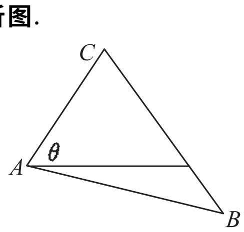
$\because AD=80.12$ m，$BE=40.24$ m，

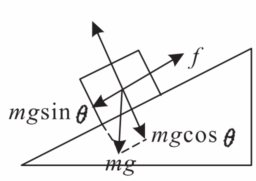
$\therefore DE=AB-AD-BE=541.81-80.12-40.24=421.45\ (\text{m})\approx421.5(\text{m})$，

即隧道 DE 的长为 421.5 m.

例 3　假定自动卸货汽车装有一车货物，货物与车厢底部的滑动摩擦系数为 0.3，油泵顶点 B 与车厢支点 A 之间的距离为 1.95 m，AB 与水平线之间的夹角为 $6°20'$，AC 长为 1.40 m，求货物开始下滑时 BC 的长.

分析　本题与物理学公式联系较多，要作出受力分析图.





解答　设车厢倾斜角为 θ，货物重量为 m kg.

$f=\mu N=\mu mg\cos\theta$.

当 $\mu mg\cos\theta\leqslant mg\sin\theta$，即 $\mu\leqslant\tan\theta$ 时货物下滑.

令 $\mu=\tan\theta$，得 $0.3=\tan\theta$，

$\therefore\theta=\arctan0.3\approx16°42'$.

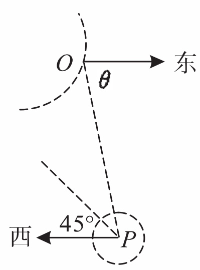
又$\because 16°42'+6°20'=23°02'$，

$\therefore$ 在 $\triangle ABC$ 中，$BC^2=AB^2+AC^2-2AB\cdot AC\cdot\cos\angle BAC=1.95^2+1.40^2-2\times1.95\times1.40\times\cos23°02'\approx0.7365$，

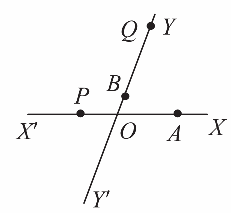
所以 $BC=0.858$(m)，

即货物开始下滑时 BC 的长为 0.858 m.

链接　在某海滨城市附近海面有一台风，据监测，当前台风中心位于城市 O（如图所示）的东偏南 θ $\left(\cos\theta=\frac{\sqrt{2}}{10}\right)$ 方向 300 km 的海面 P 处，并以 20 km/h 的速度向西偏北 45°方向移动，台风侵袭的范围为圆形区域，当前半径为 60 km，并以 10 km/h 的速度不断增大，几小时后该城市开始受到台风侵袭？受到台风侵袭的时间有多少小时？



例 4　如图，有两条相交成 60°角的直线 XX'，YY'，交点是 O，甲、乙分别在 OX，OY 上，起初甲离 O 点 3 km，乙离 O 点 1 km，后来两人同时用每小时 4 km 的速度，甲沿 XX' 方向，乙沿 $Y'Y$ 方向步行.



(1) 起初两人的距离是多少？

(2) 用含 t 的式子表示 t h 后两人的距离；

(3) 什么时候两人的距离最短？

解答　(1) 设甲、乙两人起初的位置分别是 A,B，则 $AB^2=OA^2+OB^2-2OA\cdot OB\cos60°$

$=3^2+1^2-2\times3\times1\times\frac{1}{2}=7$.

$\therefore$ 起初两人的距离是 $\sqrt{7}$ km.

(2) 设甲、乙两人 t h 后的位置分别是 P,Q，

则 $AP=4t$，$BQ=4t$.

当 $0\leqslant t\leqslant\frac{3}{4}$ 时，$PQ^2=(3-4t)^2+(1+4t)^2-2(3-4t)(1+4t)\cos60^\circ=48t^2-24t+7$.

当 $t>\frac{3}{4}$ 时，$PQ^2=(3-4t)^2+(1+4t)^2-2(3-4t)(1+4t)\cos120^\circ=16t^2-8t+13=16\left(t-\frac{1}{4}\right)^2+12\geqslant16\left(\frac{3}{4}-\frac{1}{4}\right)^2+12=16$.

所以，$PQ=\sqrt{48t^2-24t+7}$，$0\leqslant t\leqslant\frac{3}{4}$.

(3) $PQ^2=48t^2-24t+7=48\left(t-\frac{1}{4}\right)^2+4$，

∴当 $t=\frac{1}{4}$ 时，即在第 15 min 末，PQ 最短.

所以在第 15 min 末，两人的距离最短.

点评　本题结合物理速度公式，并利用二次函数求最值来解答，综合性较强；同时，对时间进行分类讨论.

双基训练

1. 若 $|\boldsymbol{a}|=1$，$|\boldsymbol{b}|=2$，$\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$，且 $\boldsymbol{c}\perp\boldsymbol{a}$，则向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角为(　　).

A. 30°　　B. 60°　　C. 120°　　D. 150°

2. 在圆 O 上取点 A,B，测得 AB 长为 2，在圆上另取一点 C，测得视角 $\angle ACB=30^\circ$，则圆 O 的半径为(　　).

A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 4

3. 在 $\triangle ABC$ 中，O 为中线 AM 上一个动点，若 $AM=2$，则 $\overrightarrow{OA}\cdot(\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC})$ 的最小值是(　　).

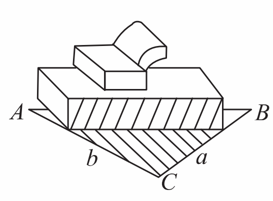
A. -1　　B. -2　　C. 1　　D. 2

4. 在直角坐标平面 xOy 中，若定点 $A(1,2)$ 与动点 $P(x,y)$ 满足 $\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OA}=4$，则点 P 的轨迹方程是(　　).

A. 直线 $x+y=1$　　B. 直线 $x+2y=4$

C. 圆 $x^2+y^2=\frac{16}{5}$ 内　　D. 圆 $x^2+y^2=\frac{16}{5}$ 外

5. 如图，为测量一雕塑的跨度 AB 长，可在 C 处先测得 A,B 的视角 $\angle ACB=\alpha$，并测量出 $CA=b$，$CB=a$，则 AB 长为________.

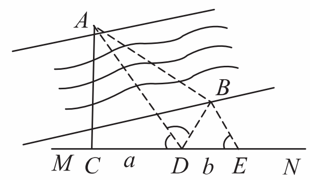


(第 5 题图)

6. 两灯塔 A,B 与海洋观察站 C 的距离都等于 a km，灯塔 A 在观察站 C 的北偏东 30°，灯塔 B 在观察站 C 的南偏东 60°，则 A,B 之间的距离为________.

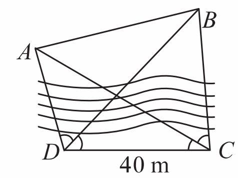
7. 在 $\triangle ABC$ 中，$BC=a$，$CA=b$，$AB=c$，则边 BC 上的中线为________.

8. 如图，为测量河岸两侧 A,B 两点之间的距离，在直道 MN 上取点 C，测得 $\angle ACN=90^\circ$，行走 a m 到 D 处，测得 $\angle CDA=\angle ADB=60^\circ$，继续向前行走 b m 到 E 处，测得 $\angle DEB=60^\circ$，则 A,B 两点之间的距离为________.



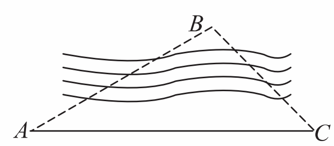
(第 8 题图)

9. 如图，A,B 两点都在河的对岸(不可到达)，若在河岸选取相距 40 m 的 C,D 两点，测得 $\angle BCA=60^\circ$，$\angle ACD=30^\circ$，$\angle CDB=45^\circ$，$\angle BDA=60^\circ$，试计算 A,B 两点间的距离.



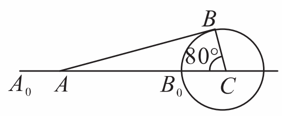
(第 9 题图)

10. 如图，设 A,B 两点在河的两岸，要测量两点之间的距离，测量者在 A 的同侧，在河岸边选定一点 C，测出 AC 的距离是 50 m，$\angle BAC=30^\circ$，$\angle ACB=45^\circ$. 求 A,B 两点的距离(精确到 0.1 m).



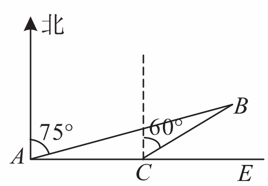
(第 10 题图)

11. 如图所示是曲柄连杆机构的示意图．当曲柄CB绕C点旋转时，通过连杆AB的传递，活塞做直线往复运动．当曲柄在CB_0位置时，曲柄和连杆成一条直线，连杆的端点A在A_0处．设连杆AB长为340 mm，曲柄CB长为85 mm，曲柄自CB_0按顺时针方向旋转$80°$，求活塞移动的距离(即连杆的端点A移动的距离A_0A，精确到1 mm)．



(第11题图)

12. 如图，海中有一小岛，周围3．8海里内有暗礁．一军舰从A地出发由西向东航行，望见小岛B在北偏东$75°$，航行8海里到达C处，望见小岛B在北偏东$60°$．若此军舰不改变航行的方向继续前进，则此舰有没有触礁的危险？



(第12题图)

1.2.2　应用举例——测量高度及角度

教材详解

●内容扫描

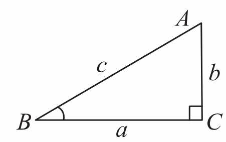
1．测量高度及角度的一般方法

运用正弦定理、余弦定理等知识和方法解决一些有关底部不可达的物体高度测量的问题，要学会正确识图、画图、想图，逐步构建知识框架．以此巩固与深化解三角形实际问题的一般方法．

测量高度，实际上都可转化成已知三角形的一些边和角求其余边的问题．然而在实际的航海生活中，人们又会遇到新的问题，在浩瀚无垠的海面上如何确保轮船不迷失方向，保持一定的航速和航向呢？同样，这类问题也可运用正弦定理、余弦定理等知识和方法来解决．

利用正弦定理和余弦定理来解题时，要学会审题及根据题意画方位图，要懂得从所给的背景资料中加工抽取主要因素，进行适当的简化．

2．解直角三角形



在$\mathrm{Rt}\triangle ABC$中，$AB=c$，$BC=a$，$CA=b$，

$a^2+b^2=c^2$，

$\sin A=\dfrac{a}{c}$，$\sin B=\dfrac{b}{c}$，

$a=b\cot B$．

3．正弦定理和余弦定理

在$\triangle ABC$中，

正弦定理：$\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}$．

余弦定理：

$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$，

$b^2=a^2+c^2-2ac\cos B$，

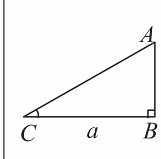
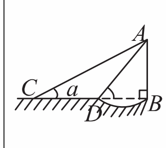
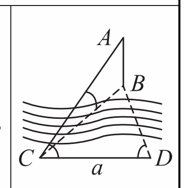
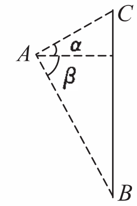
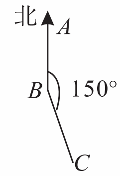
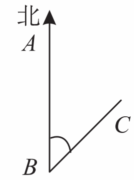
$c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$．

4．和角公式

$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$．

5．路程公式：$s=vt$．

6．测量高度与角度的类型的判断

	底部可达	底部不可达	
求高度			
	仰角、俯角	方位角	方向角
求角度			

●思想方法提炼

1．解三角形应用题时，通常会遇到两种情况：

(1)已知量与未知量全部集中在一个三角形中,依次利用正弦定理或余弦定理解之.

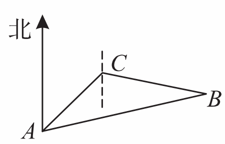
(2)已知量与未知量涉及两个或两个以上三角形,这时需要选择条件足够的三角形优先研究,再逐步在其余的三角形中求出问题的解.

2. 利用数学建模思想,结合正弦定理、余弦定理和解任意三角形的知识解决实践中的有关问题.

典例分析

例 1　某巡逻艇在 A 处发现北偏东 $45°$ 相距 9 海里的 C 处有一艘走私船,正沿南偏东 $75°$ 的方向以 10 海里/时的速度向我海岸行驶,巡逻艇立即以 14 海里/时的速度沿着直线方向追去. 巡逻艇应该沿什么方向去追? 需要多长时间才能追赶上该走私船?

分析　根据题意画出方位图,建立数学模型. 这道题的关键是计算出三角形的各边,即需要引入时间这个参变量.



解答　如右图,设该巡逻艇沿 AB 方向经过 x 小时后在 B 处追上走私船,则 $CB=10x$, $AB=14x$, $AC=9$, $\angle ACB=75°+45°=120°$.

$\therefore (14x)^2=9^2+(10x)^2-2\times9\times10x\cos120°$.

化简得 $32x^2-30x-27=0$,

解得 $x=\dfrac{3}{2}$,或 $x=-\dfrac{9}{16}$(舍去).

$\therefore BC=10x=15$, $AB=14x=21$.

又$\because \sin\angle BAC=\dfrac{BC\sin120°}{AB}=\dfrac{15}{21}\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\dfrac{5\sqrt{3}}{14}$,

$\therefore \angle BAC=38°13'$或$\angle BAC=141°47'$(钝角不合题意,舍去), $38°13'+45°=83°13'$,

即巡逻艇应该沿北偏东 $83°13'$ 方向去追,经过 1.4 小时才能追赶上该走私船.

另解:同上解得 $BC=15$, $AB=21$.

在$\triangle ABC$ 中,由余弦定理得

$\cos\angle CAB=\dfrac{AC^2+AB^2-BC^2}{2AC\cdot AB}$

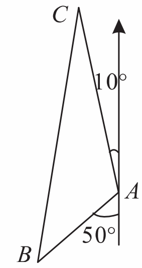
$=\dfrac{81+441-225}{2\times20\times21}=\dfrac{11}{14}\approx0.7857$,

$\therefore \angle CAB\approx38°13'$, $38°13'+45°=83°13'$.

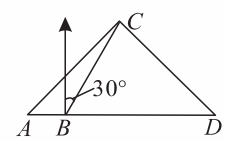
$\therefore$巡逻艇应沿北偏东 $83°13'$ 的方向追赶,经过 1.5 小时追赶上该走私船.

点评　在求解三角形中,我们可以根据正弦函数的定义得到两个解,但作为有关现实生活的应用题,必须检验上述所求的解是否符合实际意义,从而得出实际问题的解.

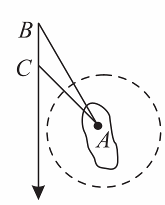
变式一　如右图,我舰在敌岛 A 南偏西 $50°$ 相距 12 海里的 B 处,发现敌舰正由岛沿北偏西 $10°$ 的方向以 10 海里/时的速度航行. 我舰需要以多大速度,沿什么方向航行才能用 2 小时追上敌舰?



变式二　如右图,一渔船在海上由西向东航行,在 A 处望见灯塔 C 在船的东北方向,半小时后在 B 处望见灯塔在船的北偏东 $30°$. 若船速每小时为 30 海里,当船行至 D 处望见灯塔 C 在船的西北方向时,求 A, D 两点的距离.(精确到 0.1,提供数据 $\sqrt{2}=1.414$, $\sqrt{3}=1.732$)



例 2　如右图,海中小岛 A 周围 38 海里内有暗礁,船正向南航行,在 B 处测得小岛 A 在船的南偏东 $30°$,航行 30 海里后,在 C 处测得小岛 A 在船的南偏东 $45°$. 如果此船不改变航向,继续向南航行,有无触礁危险?



解答　在$\triangle ABC$ 中, $BC=30$, $B=30°$,

$\angle ACB=180°-45°=135°$, $\angle BAC=180°-135°-45°=15°$.

由正弦定理知$\frac{BC}{\sin A}=\frac{AC}{\sin B}$，

$\therefore \frac{30}{\sin 15^\circ}=\frac{AC}{\sin 30^\circ}$，

$\therefore AC=\frac{30\sin 30^\circ}{\sin 15^\circ}=60\cos 15^\circ=15\sqrt{6}+15\sqrt{2}$，

$\therefore A$ 到 BC 所在直线的距离为

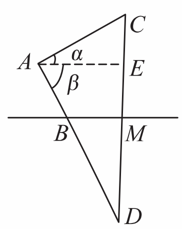
$AC\cdot\sin 45^\circ=(15\sqrt{6}+15\sqrt{2})\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}$

$=15(\sqrt{3}+1)\approx 40.98>38$.

∴此船不改变航向，继续向南航行，无触礁危险.

例 3 在湖面上高 h 处，测得云的仰角为 α，而湖中云之影（即云在湖中的像）的俯角为 β. 求证：云高为 $h\cdot\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\sin(\beta-\alpha)}$.

分析 因湖面相当于一个平面镜，故云 C 与它在湖中之影关于湖面对称. 解答本题的关键是如何运用 h 这个条件，设云高 $CM=x$，则从$\triangle ACE$ 与$\triangle ADE$ 中可建立含 x 的方程，解出 x 即可证得.



证明 设湖面上高 h 处为 A，测得云 C 仰角为 α，而 C 在湖中像 D 的俯角为 β. CD 与湖面交于 M，过 A 的水平线交 CD 于 E，令云高 $CM=x$，则 $CE=x-h$，$DE=x+h$，$AE=(x-h)\cot\alpha$.

又 $AE=(x+h)\cot\beta$，

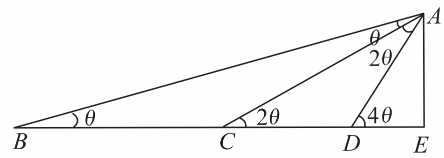
$\therefore (x-h)\cot\alpha=(x+h)\cot\beta$.

解得 $x=h\cdot\frac{\cot\alpha+\cot\beta}{\cot\alpha-\cot\beta}=h\cdot\frac{\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}+\frac{\cos\beta}{\sin\beta}}{\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}-\frac{\cos\beta}{\sin\beta}}=h\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\sin(\beta-\alpha)}$.

点评 理解仰角、俯角的含义，画出示意图，分析与解决问题.

链接 为测某塔 AB 的高度，在一幢与塔 AB 相距 20 m 的楼的楼顶处测得塔顶 A 的仰角为 30°，测得塔基 B 的俯角为 45°，则塔 AB 的高度为多少米？

例 4 在某点 B 处测得建筑物 AE 的顶端 A 的仰角为 θ；沿 BE 方向前进 30 m 至 C 点，测得顶端 A 的仰角为 2θ；再继续前进 $10\sqrt{3}$ m 至 D 点，测得顶端 A 的仰角为 4θ. 求 θ 的大小和建筑物 AE 的高.



解答 方法 1（用正弦定理求解）：

由已知可得，在$\triangle ACD$ 中，$AC=BC=30$ m，$AD=DC=10\sqrt{3}$ m，$\angle ADC=180^\circ-4\theta$，

$\therefore \frac{10\sqrt{3}}{\sin 2\theta}=\frac{30}{\sin(180^\circ-4\theta)}$.

$\because \sin 4\theta=2\sin 2\theta\cos 2\theta$，

$\therefore \cos 2\theta=\frac{\sqrt{3}}{2}$，得 $2\theta=30^\circ$，$\theta=15^\circ$.

∴在 $\mathrm{Rt}\triangle ADE$ 中，$AE=AD\sin 60^\circ=15$.

即所求角 θ 为 15°，建筑物高度为 15 m.

方法 2（设方程来求解）：

设 $DE=x$，$AE=h$.

在 $\mathrm{Rt}\triangle ACE$ 中，$(10\sqrt{3}+x)^2+h^2=30^2$，

在 $\mathrm{Rt}\triangle ADE$ 中，$x^2+h^2=(10\sqrt{3})^2$.

两式相减，解方程得 $x=5\sqrt{3}$，$h=15$.

∴在 $\mathrm{Rt}\triangle ACE$ 中，$\tan 2\theta=\frac{h}{10\sqrt{3}+x}=\frac{\sqrt{3}}{3}$，

$\therefore 2\theta=30^\circ$，$\theta=15^\circ$.

即所求角 θ 为 15°，建筑物高度为 15 m.

方法 3（用倍角公式求解）：

设建筑物高 $AE=x$.

由题意得$\angle BAC=\theta$，$\angle CAD=2\theta$，

$AC=BC=30$ m，$AD=CD=10\sqrt{3}$ m，

在 $\mathrm{Rt}\triangle ACE$ 中，$\sin 2\theta=\frac{x}{30}$. ①

在 $\mathrm{Rt}\triangle ADE$ 中，$\sin 4\theta=\frac{x}{10\sqrt{3}}$. ②

②÷①得 $\cos 2\theta=\frac{\sqrt{3}}{2}$，$2\theta=30^\circ$，

$\theta=15^\circ$，$AE=AD\sin 60^\circ=15$.

即所求角 θ 为 15°，建筑物高度为 15 m.

双基训练

1. 在$\triangle ABC$ 中，由下列条件解三角形有两个解的是（　　）.

A. $b=10$，$A=45^\circ$，$C=75^\circ$

B. $a=60$，$b=48$，$C=60^\circ$

C. $a=7,b=5,A=80^\circ$

D. $a=14,b=16,A=45^\circ$

2. 在$\triangle ABC$中，$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}>0$，$\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}>0$，$\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}>0$中能够成立的个数是（　　）.

A. 至多 1 个

B. 有且仅有 1 个

C. 至多 2 个

D. 至少 2 个

3. 在高 200 m 的山顶上，测得山下一塔顶和塔底的俯角分别为 30°，60°，则塔高为（　　）.

A. $\frac{200}{3}$ m　　B. $\frac{200}{3}\sqrt{3}$ m

C. $\frac{400}{3}\sqrt{3}$ m　　D. $\frac{400}{3}$ m

4. 在$\triangle ABC$中，一定成立的等式是（　　）.

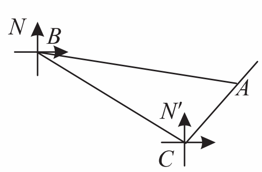
A. $a\sin A=b\sin B$

B. $a\cos A=b\cos B$

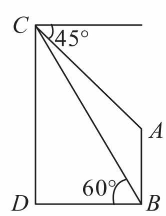
C. $a\sin B=b\sin A$

D. $a\cos B=b\cos A$

5. 如图，货轮在海上以 40 km/h 的速度由 B 向 C 航行，航行的方位角$\angle NBC=140^\circ$，A 处有一灯塔，其方位角$\angle NBA=110^\circ$，在 C 处观察灯塔 A 的方位角$\angle N'CA=35^\circ$，由 B 到 C 需航行半小时，则 C 到灯塔 A 的距离为________.



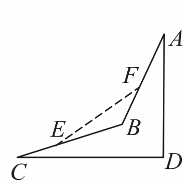
（第 5 题图）



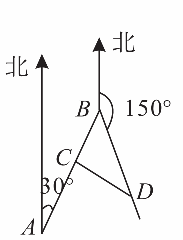
（第 6 题图）

6. 如图，在塔底 B 处测得山顶 C 的仰角为 60°，在山顶 C 测得塔顶 A 的俯角为 45°，已知塔高 $AB=20$ m，则山高 DC 为________.（精确到 0.1 m）

7. 如图，要测量某工件的角度，现用皮尺测得 $BE=2$ m，$BF=1$ m. 当 $EF=2.65$ m 时，便可算出$\angle ABC$的大小为________.



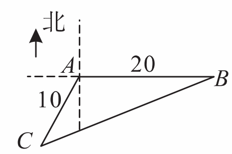
（第 7 题图）



（第 8 题图）

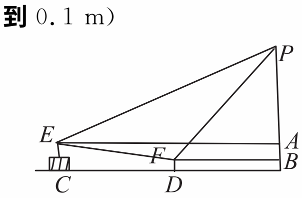
8. 如图，已知 A,B 两点的距离为 100 海里，B 在 A 的北偏东 30°，甲船自 A 以 50 海里/时的速度向 B 航行，同时乙船自 B 以 30 海里/时的速度沿方位角 150° 方向航行，则航行________小时，两船之间的距离最小.

9. 如图，当甲船位于 A 处时获悉，在其正东方向相距 20 海里的 B 处有一艘渔船遇险等待营救. 甲船立即前往救援，同时把消息告知在甲船的南偏西 30°，相距 10 海里 C 处的乙船，乙船应朝北偏东多少度的方向沿直线前往 B 处救援？（精确到 1°）



（第 9 题图）

10. 如图，广场上有一个充满氢气的气球 P 被广告条拽着悬在空中，甲、乙两人分别站在 E,F 处，他们看气球的仰角分别是 30°，45°，E 点与 F 点的高度差 AB 为 1 m，水平距离 CD 为 5 m，FD 的高度为 0.5 m，请问此气球有多高.（结果保留到 0.1 m）

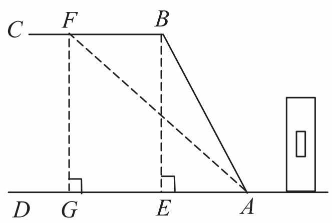


（第 10 题图）

11. 某房屋的后面紧邻着一个土坡，坡上面是一块平地，如图所示，$BC\parallel AD$，斜坡 AB 长 22 m，坡角$\angle BAD=68^\circ$，为防止山体滑坡，保障安全，现对土坡进行改造，经地质人员勘测，当坡角不超过 50°时，可确保山体不滑坡.

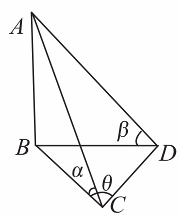
（1）求改造后山顶 F 与地面的距离 FG；

(2)为确保安全,坡脚 A 不动,坡顶 B 沿 BC 削到 F 点处,BF 至少是多少米?(精确到 0.1 m)



(第 11 题图)

12. 某人要测量底部不能到达的电视塔 AB 的高度,他在 C 点测得塔顶 A 的仰角是 α,在 D 点测得塔顶 A 的仰角是 β,并测得水平面上的角 $\angle BCD=\theta$,θ 为钝角,$CD=m$ m,求电视塔 AB 的高度 x.



(第 12 题图)

1.2.3　应用举例——几何计算

教材详解

●内容扫描

一个三角形的三条边和三个角通常叫做它的六个元素,由三角形的已知元素求未知元素叫做解三角形.一般来说,解三角形是由已知的三个元素(其中至少有一个元素是边)求未知的三个元素.

1. 内角和定理及其常见结论

$A+B+C=\pi$;

$\sin(A+B)=\sin C$;

$\sin(B+C)=\sin A$;

$\sin(C+A)=\sin B$;

$\sin\dfrac{A+B}{2}=\cos\dfrac{C}{2}$;

$\cos\dfrac{A+B}{2}=\sin\dfrac{C}{2}$.

2. 三角形中的边角关系

(1)三角形中任意两边之和大于第三边,任意两边之差小于第三边.

(2)三角形中小边对小角,大边对大角;小角对小边,大角对大边.

(3)正弦定理:在三角形中,各边和它所对角的正弦的比相等,并且都等于这个三角形外接圆的直径.

(4)余弦定理:三角形任何一边的平方都等于其他两边的平方和减去这两边与它们夹角余弦积的两倍.

(5)射影定理:

$a=b\cos C+c\cos B$;

$b=c\cos A+a\cos C$;

$c=a\cos B+b\cos A$.

3. 常见的三角形面积公式

设 $\triangle ABC$ 中,a,b,c 分别是 $\angle A,\angle B,\angle C$ 的对边,R 为 $\triangle ABC$ 外接圆的半径,r 是其内切圆半径,p 是其周长的一半,边 BC,CA,AB 上的高分别记为 h_a,h_b,h_c.

(1) $h_a=b\sin C=c\sin B$, $h_b=c\sin A=a\sin C$, $h_c=a\sin B=b\sin A$.

(2) $S=\dfrac{1}{2}ah_a=\dfrac{1}{2}bh_b=\dfrac{1}{2}ch_c$.

(3) $S_{\triangle ABC}=\dfrac{1}{2}ab\sin C=\dfrac{1}{2}bc\sin A=\dfrac{1}{2}ac\sin B$.

(4) $S_{\triangle ABC}=\dfrac{abc}{4R}$.

(5) $S_{\triangle ABC}=pr$.

(6)在 $\triangle ABC$ 中,若 $\overrightarrow{AB}=(x,y)$,$\overrightarrow{AC}=(u,v)$,则 $S=\dfrac{1}{2}|xv-yu|$.

(7)在 $\triangle ABC$ 中,设 $A(x_1,y_1)$,$B(x_2,y_2)$,$C(x_3,y_3)$,则 $\triangle ABC$ 的面积为:

$S=\dfrac{1}{2}(x_1y_2+x_2y_3+x_3y_1-y_1x_2-y_2x_3-y_3x_1)$.

4^*. 海伦和秦九韶公式

在阅读材料中,书本为了体现数学的人文价值,给出了海伦和秦九韶所发现的三角形面积公式. 古希腊数学家海伦给出的是:

$S_{\triangle ABC}=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$,其中 p 是三角形周长的一半.

而我国南宋时期的数学家秦九韶发现的"三斜求积"公式是: