

## 第一章 集合与函数概念

集合	圆
集合的含义与表示	圆
集合间的基本关系	源
集合的基本运算	远
函数及其表示	园
函数的概念	园
函数的表示法	猿
函数的基本性质	愿
单调性与最大(小)值	愿
奇偶性	园

## 第二章 基本初等函数(I)

指数函数	猿
指数与指数幂的运算	猿
指数函数及其性质	猿
对数函数	猿
对数与对数运算	猿
对数函数及其性质	源
幂函数	源

## 第三章 函数的应用

函数与方程	缘
方程的根与函数的零点	缘
用二分法求方程的近似解	缘

函数模型及其应用	缘
几类不同增长的函数模型	缘
函数模型的应用实例	园

## 第一章 集合与函数概念

小节验收卷(一)	猿
小节验收卷(二)	猿
小节验收卷(三)	猿
单元验收卷(粤)	苑
单元验收卷(月)	苑

## 第二章 基本初等函数(I)

小节验收卷(一)	愿
小节验收卷(二)	愿
单元验收卷(粤)	愿
单元验收卷(月)	愿

## 第三章 函数的应用

小节验收卷	愿
单元验收卷(粤)	愿
单元验收卷(月)	愿
模块综合验收卷(粤)	愿
模块综合验收卷(月)	愿

## 参考答案与简析

## 第一章 集合与函数概念

## 导学诱思

## 👑 焦点导入



魔术师手里持有  $n$  张扑克牌(不含王牌和牌号相同的牌), 叫  $n$  位观众每人从他手里任摸一张, 并嘱咐摸牌时看清和记住自己的牌号. 牌号是这样规定的: 牌号为  $1$  为  $A$ , 牌号为  $2$  为  $2$ , 牌号为  $3$  为  $3$ , 牌号为  $4$  为  $4$ , 牌号为  $5$  为  $5$ , 牌号为  $6$  为  $6$ , 牌号为  $7$  为  $7$ , 牌号为  $8$  为  $8$ , 牌号为  $9$  为  $9$ , 牌号为  $10$  为  $10$ , 牌号为  $11$  为  $J$ , 牌号为  $12$  为  $Q$ , 牌号为  $13$  为  $K$ . 其余的以牌上的数值为准. 然后魔术师叫他们按如下的方法进行计算: 将自己的牌号乘  $2$  加  $3$  乘  $3$  再减去  $3$ , 把结果告诉魔术师. 魔术师便能准确地猜出你拿的是什么牌. 其原因我们可以借助函数来破解. 设牌号为自变量  $x$ , 计算结果为  $y$ , 则  $y = 2x + 3 \times 3 - 3 = 2x + 6$ . 即  $y = 2x + 6$ . 此函数的定义域为  $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13\}$ , 值域为  $\{8, 10, 12, 14, 16, 18, 20, 22, 24, 26, 28, 30, 32\}$ . 当你把数值  $y$  告诉魔术师后, 魔术师根据  $y = 2x + 6$  很快求出与  $y$  对应的  $x$  值, 从而判断出牌号.

## 👑 课标聚焦

能用基本的集合语言表示有关的数学对象, 能正确地区分一些简单集合之间的关系, 并能进行集合的运算.

理解函数的概念, 会用集合与对应的语言刻画函数. 了解构成函数的要素, 会求一些简单函数的定义域和值域. 了解分段函数及其简单应用, 理解函数的单调性、最大(小)值及其几何意义, 了解函数奇偶性的含义, 具有奇偶性的函数图象具有的性质. 能判断一些简单函数的单调性和函数的奇偶性.

能画出一些简单函数图象, 并能用图象理解和研究函数性质; 会根据不同的需要选择恰当的方法来表示函数. 体会函数与方程、数形结合等数学思想.



时,要对计算结果进行检验,符合集合中元素互不相同的特性援

☺ 变身题

已知集合  $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - 2x + 1 = 0\}$ ,  $B = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - 3x + 2 = 0\}$ , 则  $A \cap B =$  \_\_\_\_\_ 援

焦点二 集合的表示方法——列举法与描述法

若集合中的元素是有限的,可用列举法表示;若集合中元素是无限的,一般用描述法表示;

用描述法表示集合的方法是:在大括号内先写上表示这个集合元素的一般符号及取值(或变化)范围,再画一条竖线,在竖线后写出这个集合中元素所具有的共同特征援如  $\{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$ , 其中  $x \in \mathbb{R}$  表示元素具有的共同特征援

✦ 例猿

用适当的方法表示下列集合(可用列举法、描述法两种方法的用两种方法表示):

(员)方程  $x^2 - 2x + 1 = 0$  所有实数解组成的集合;

(圆)绝对值小于 2 的整数组成的集合;

(猿)函数  $y = \frac{1}{x}$  的自变量取值的集合;

(源)函数  $y = x^2$  的函数值组成的集合援

【分析】援(员)(圆)两小题是有限集,可以求出集合中各个的元素,因此可用列举法、描述法表示;(猿)(源)两小题是无限集,不能将集合中元素一一求出,但能求出集合中的元素满足的条件,一般不能用列举法表示,用描述法表示援

【解答】援(员)设方程  $x^2 - 2x + 1 = 0$  的实数根为  $x$  并且满足  $x^2 - 2x + 1 = 0$ , 因此,用描述法表示为  $\{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - 2x + 1 = 0\}$ ;

方程  $x^2 - 2x + 1 = 0$  有两个实数根 1, 1, 因此,用列举法表示为  $\{1, 1\}$  援

(圆)绝对值小于 2 的整数组成的集合,用描述法表示为  $\{x \in \mathbb{Z} \mid -2 < x < 2\}$ ;

用列举法表示为  $\{-1, 0, 1\}$  援

(猿)函数  $y = \frac{1}{x}$  的自变量取值就是使  $\frac{1}{x}$  有意义,于是  $x \neq 0$ , 所以  $x \in \mathbb{R}$ , 用描述法表示为  $\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 0\}$  援

员, 员, 员, 援

(源)函数  $y = x^2$  的最小值为 0, 亦即  $y \geq 0$ , 亦用描述法表示为  $\{y \in \mathbb{R} \mid y \geq 0\}$  援

【点评】援一般地,有限集用列举法表示,无限集用描述法表示援用描述法表示集合时,要准确地求出集合中元素满足的条件,并进行化简,使条件尽可能简单明了援

☺ 变身题

用列举法表示下列集合:

(员)集合  $\{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - 1 = 0\}$ ;

(圆)集合  $\{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - 2x + 1 = 0\}$  援

用描述法表示所有奇数组成的集合 \_\_\_\_\_ 援

焦点三 平面直角坐标系内点集的表示

平面直角坐标系内点集中元素用有序实数对表示援平面直角坐标系内点集的一般表示形式为  $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \text{条件}\}$ , 其中  $(x, y)$  表示集合中元素点的坐标(条件所具备的条件)援

✦ 例源

已知  $f(x) = (x-1)^2 - 1$ ,  $g(x) = (x-2)^2 - 1$ , 求元素  $x$  援

【分析】援  $f(x) = (x-1)^2 - 1$  表示函数  $y = (x-1)^2 - 1$  图象上所有点组成的集合,  $g(x) = (x-2)^2 - 1$  表示函数  $y = (x-2)^2 - 1$  图象上所有点组成的集合, 因此,元素  $x$  表示函数  $y = (x-1)^2 - 1$  图象与函数  $y = (x-2)^2 - 1$  图象的交点援

【解答】援元素  $x$  是方程组  $\begin{cases} y = (x-1)^2 - 1 \\ y = (x-2)^2 - 1 \end{cases}$  的解, 于是  $x$  为点  $(x, y)$  援

【点评】援本题中集合元素的特征是有序实数对, 表示平面直角坐标系内的点援注意集合  $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = x\}$  与  $\{x \in \mathbb{R} \mid y = x\}$  的区别,  $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = x\}$  是平面直角坐标系内直线  $y = x$  上的点组成的集合,

而 是函数 的自变量取值的集合, 是点集, 是数集, 两者有本质的区别

变身题

设直线 上的点集为 , 则 援  
点( 与 的关系为: ( ) 援

焦点训练

基础夯实

下列各组对象能构成集合的是( ) 援

- (A) 某校高一(1)班全体学生
- (B) 某校高一(1)班成绩好的学生
- (C) 某校高一(1)班高个子的学生
- (D) 某校高一(1)班视力差的学生

下列表示正确的是( ) 援

- (A)  $0 \in \mathbb{N}$
- (B)  $1 \in \mathbb{N}$
- (C)  $0 \in \mathbb{Z}$
- (D)  $1 \in \mathbb{Z}$

设  $x \in \mathbb{R}$ , 则  $x^2 \geq 0$  援

方程组  $\begin{cases} x+y=2 \\ x-y=0 \end{cases}$  的解集是 \_\_\_\_\_ 援用

列举法表示)

用适当的方法表示下列集合:

- (1) 小于 10 的自然数;
- (2) 方程  $x^2 - 1 = 0$  的解组成的集合;
- (3) 不等式  $x > 1$  的解集;
- (4) 方程  $x^2 + 2x + 1 = 0$  的解集

已知集合  $A = \{x \mid x^2 - 2x + 1 = 0\}$ ,  $B = \{x \mid x^2 - 3x + 2 = 0\}$ , 求  $A \cap B$  的值

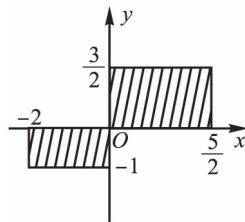
能力提升

若集合  $A = \{x \mid x^2 - 2x + 1 = 0\}$ ,  $B = \{x \mid x^2 - 3x + 2 = 0\}$ , 是单元素集, 则 \_\_\_\_\_ 援

已知  $x \in \mathbb{R}$ , 求  $x$  的值, 并用列举法表示集合 \_\_\_\_\_ 援

综合探究

用适当的方法表示下图中的阴影部分的点(含边界上的点)组成的集合 \_\_\_\_\_ 援



异课异构集合间的基本关系

自主预习

一般地, 对于两个集合  $A, B$ , 称集合  $A$  是集合  $B$  的子集, 记作  $A \subseteq B$  或  $B \supseteq A$ . 若  $A \subseteq B$  且  $A \neq B$ , 则称集合  $A$  是集合  $B$  的真子集. 若  $A \subseteq B$  且  $B \subseteq A$ , 则集合  $A$  与集合  $B$  相等. 不含任何元素的集合叫做 \_\_\_\_\_ 援

任何集合是它本身的 \_\_\_\_\_; 空集是任何集合的 \_\_\_\_\_. 对于集合  $A, B$ , 若  $A \subseteq B$  且  $B \subseteq A$ , 则 \_\_\_\_\_ 援

**逐点扫描**

**焦点一 子集与空集的概念**

空集是任何集合的子集,任何集合都是它本身的子集;

元素与集合,集合与集合之间关系的区别:元素与集合的关系是“属于”与“不属于”的关系,元素与集合之间分别用符号 $\in, \notin$ 连接,集合与集合的关系有“包含”、“包含于”、“不包含”、“不包含于”,分别用符号 $\subseteq, \supseteq, \not\subseteq, \not\supseteq$ 把两个集合连接起来

**例 1**

给出四个关系式: $\{0\} \in \emptyset; \{0\} \not\subseteq \emptyset; \{0\} \not\subseteq \{0\}; \emptyset \neq \{0\}$ 其中正确的个数是( )

【分析】摇“ $\emptyset$ ”表示不含任何元素的集合,“ $\{0\}$ ”含有元素 0

【解答】摇空集 $\emptyset$ 不含任何元素,亦( )不正确;集合 $\{0\}$ 含有元素 0,空集是任何非空集合的真子集,亦( )正确;

$\{0\}$ 是非空集合,亦( )不正确;选 ( )

【点评】摇符号“ $\in$ ”、“ $\notin$ ”都是表示元素与集合之间的关系,符号“ $\not\subseteq$ ”、“ $\not\supseteq$ ”、“ $\subseteq$ ”、“ $\supseteq$ ”都是表示集合与集合之间的关系

**变身题**

用适当的符号填空:  
 ( ) {菱形} \_\_\_\_\_ {平行四边形};  
 ( )  $\emptyset$  \_\_\_\_\_ {曾曾}; ( ) {猿} \_\_\_\_\_ {猿};  
 ( )  $\emptyset$  \_\_\_\_\_ {猿}; ( ) {猿} \_\_\_\_\_ {猿};  
 下列关系正确的是( )  
 ( ) {曾曾};  
 ( ) {曾曾};  
 ( ) {曾曾};  
 ( ) {曾曾};

**例 2**

若集合  $A = \{(x, y) | x + y = 1\}$ ,  $B = \{(x, y) | x - y = 1\}$ , 求实数  $m$  的值

【分析】摇集合  $A$  表示二元一次方程组的解集,是单元素集,元素是有序实数对,集合  $B$  是二元一次

方程的解集,是无限集,取出  $A$  中的元素,代入  $B$  中

【解答】摇  $A = \{(x, y) | x + y = 1\}$ ,  $B = \{(x, y) | x - y = 1\}$ , 把  $(x, y)$  代入  $B$  中

**变身题**

若  $A = \{(x, y) | x + y = 1\}$ ,  $B = \{(x, y) | x - y = 1\}$ , 则  $A \cap B =$  \_\_\_\_\_

**焦点二 运用集合之间关系分析问题**

运用集合之间关系求参数的值,实际上就是将集合之间的关系转化为求方程或方程组的解;

运用集合之间关系求参数的取值范围,实际上就是将集合之间的关系转化为求不等式或不等式组的解集,常要利用数轴进行分析

**例 3**

若  $A = \{x | x^2 - 2x + m = 0\}$ ,  $B = \{x | x^2 - 4x + 3 = 0\}$ , 求  $m$  的值;

【分析】摇  $A = \{x | x^2 - 2x + m = 0\}$ ,  $B = \{x | x^2 - 4x + 3 = 0\}$ , 求  $m$  的取值范围

【解答】摇  $A = \{x | x^2 - 2x + m = 0\}$ ,  $B = \{x | x^2 - 4x + 3 = 0\}$ , 若  $A$  是空集,则  $m > 1$ ; 若  $A$  是单元素集,则  $m = 1$ ;

若  $A$  不是空集,利用数轴分析,则  $m \leq 1$ ;

若  $A$  是空集,则  $m > 1$ ;

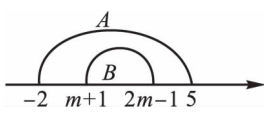
【解答】摇 ( ) 当  $m > 1$  时,  $A = \emptyset$ ,  $\emptyset \subseteq B$  成立;

当  $m = 1$  时,  $A = \{1\}$ , 由  $1 \in B$  得  $1 \in B$ ;

亦  $m$  的值为  $m \leq 1$  或  $m > 1$ ;

( ) 当  $m > 1$  时,即  $A = \emptyset$ ,  $\emptyset \subseteq B$  成立

当  $m \leq 1$  时,由题意得

$$\begin{cases} m+1 \leq 3 \\ 1 \leq m+1 \\ m+1 \leq 3 \end{cases}$$


得  $\{x \mid x \in A\}$  亦为  $\{x \mid x \in B\}$  或  $\{x \mid x \in A\}$  的  
 即  $\{x \mid x \in A\}$  为取值范围

【点评】 $\emptyset$  (空集) 特殊集合  $\emptyset$  是任何集合的子集，  
 在分析集合与集合之间关系时常易漏掉；

(掌握分类讨论、数形结合(运用数轴分析)的  
 数学思想在解题中的应用)

变身题

设集合  $A = \{x \mid x^2 - 2x - 3 < 0\}$ ,  $B = \{x \mid x^2 - 4x + 3 < 0\}$   
 若  $x \in A$  则  $x$  的取值范围为  $(-1, 3)$   
 $A \cap B = \{x \mid -1 < x < 3\}$      $A \cup B = \{x \mid -1 < x < 3\}$   
 $A \setminus B = \{x \mid -1 < x < 1\}$      $B \setminus A = \{x \mid 1 < x < 3\}$

焦点训练

基础夯实

已知集合  $A = \{x \mid x^2 - 2x - 3 < 0\}$ ,  $B = \{x \mid x^2 - 4x + 3 < 0\}$ , 则集合  $A$   
 与集合  $B$  的关系是  $A \subseteq B$

$A \cap B = \{x \mid -1 < x < 3\}$   
 $A \cup B = \{x \mid -1 < x < 3\}$

已知集合  $A = \{x \mid x^2 - 2x - 3 < 0\}$ ,  $B = \{x \mid x^2 - 4x + 3 < 0\}$ , 则集  
 合  $A$  与集合  $B$  的关系是  $A \subseteq B$

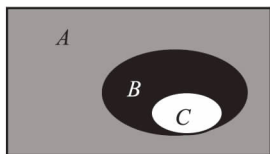
$A \cap B = \{x \mid -1 < x < 3\}$   
 $A \cup B = \{x \mid -1 < x < 3\}$

已知集合  $A = \{x \mid x^2 - 2x - 3 < 0\}$ , 且  $A$  中至多有一个奇  
 数, 则这样的集合有  $3$  个

$A \cap \{1\} = \{1\}$   
 $A \cap \{2\} = \{2\}$   
 $A \cap \{3\} = \{3\}$

满足  $\{1, 2\} \subseteq A \subseteq \{1, 2, 3, 4, 5\}$  的集合  $A$  的个  
 数为  $7$

下图中  $A, B, C$  三个集合之间的关系是  $A \supseteq B \supseteq C$



已知集合  $A = \{x \mid x^2 - 2x - 3 < 0\}$ ,  $B = \{x \mid x^2 - 4x + 3 < 0\}$ ,  
 $C = \{x \mid x^2 - 6x + 8 < 0\}$ , 且  $A \supseteq B \supseteq C$ , 求实数  $a$  的取值范围

能力提升

设  $A = \{x \mid x^2 - 2x - 3 < 0\}$ ,  $B = \{x \mid x^2 - 4x + 3 < 0\}$ ,  $C = \{x \mid x^2 - 6x + 8 < 0\}$   
 若  $x \in A$  则  $x$  的取值范围为  $(-1, 3)$

$A \cap B = \{x \mid -1 < x < 3\}$      $A \cup B = \{x \mid -1 < x < 3\}$   
 $A \setminus B = \{x \mid -1 < x < 1\}$      $B \setminus A = \{x \mid 1 < x < 3\}$

已知集合  $A = \{x \mid x^2 - 2x - 3 < 0\}$ ,  $B = \{x \mid x^2 - 4x + 3 < 0\}$ , 若集合  
 $A \cap B$  求实数  $a$  的值

综合探究

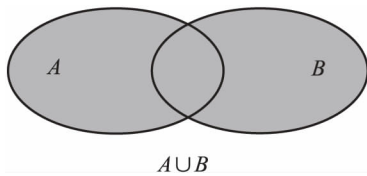
若集合  $A = \{x \mid x^2 - 2x - 3 < 0\}$ ,  $B = \{x \mid x^2 - 4x + 3 < 0\}$ ,  $C = \{x \mid x^2 - 6x + 8 < 0\}$ ,  
 $D = \{x \mid x^2 - 8x + 15 < 0\}$ , 试确定集合  $A$  与集合  $B$  的  
 关系

异或集的基本运算

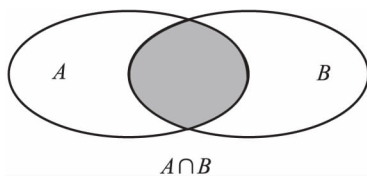
自主预习

由  $A \setminus B$  和  $B \setminus A$  组成的集合, 称为集合  $A$  与  $B$  的  
 对称差

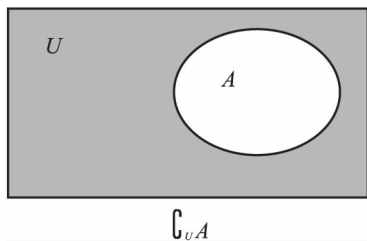
月的并集,记作  $A \cup B$ ,即  $A \cup B$



由  $A \cap B$  的集合,称为集合 A 与 B 的交集,记作  $A \cap B$ ,即  $A \cap B$



般地,如果一个集合含有我们所研究问题中所涉及的所有元素,那么就称这个集合为全集,通常用  $U$  表示.对于一个集合  $A$ ,由  $A$  称为集合  $A$  相对全集  $U$  的补集,记作  $\complement_U A$ ,即  $\complement_U A$



### 逐点扫描

焦点一 集合的交集与并集、补集的概念

两个集合的交集就是求两个集合公共元素组成的集合;求两个集合的并集就是将这两个集合中元素并在一起,但相同的元素只能出现一次.求一个集合的补集时,先确定全集,再将全集中属于这个集合的去掉,剩下的元素组成的集合就是这个集合在全集中的补集.

会用 Venn 图表达集合间的关系

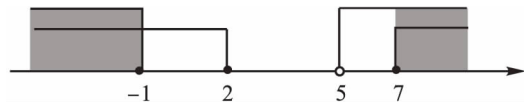
#### 例 1

已知全集  $U = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - 3x + 2 = 0\}$ ,  
 $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - 2x + 1 = 0\}$ ,  
 $B = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - 1 = 0\}$ ,  
 求  $A \cup B$ ,  $A \cap B$ ,  $\complement_U A$

【分析】先求出  $A \cup B$ ,  $A \cap B$ , 然后求出  $\complement_U A$

$\complement_U (A \cup B)$ ,  $\complement_U (A \cap B)$

【解答】由  $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - 2x + 1 = 0\}$ ,  
 亦即  $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x = 1\}$ ,  
 $B = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - 1 = 0\}$ ,  
 $\complement_U B = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq -1 \text{ 且 } x \neq 1\}$   
 亦即  $\complement_U B = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq -1 \text{ 且 } x \neq 1\}$



【点评】利用数轴来分析集合的交、并、补等运算是常用的方法.

#### 变式题

已知集合  $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - 3x + 2 = 0\}$ ,  
 $B = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - 2x + 1 = 0\}$ ,  
 求  $A \cup B$ ,  $A \cap B$

设全集  $U = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - 3x + 2 = 0\}$ , 集合  $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - 2x + 1 = 0\}$ ,  
 $B = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - 1 = 0\}$ , 则  $\complement_U (A \cup B)$

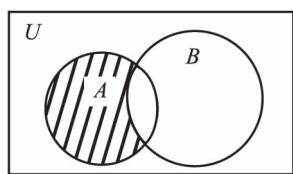
$\complement_U (A \cap B)$   $\complement_U (A \cup B)$   
 $\complement_U A$   $\complement_U (A \cap B)$   $\complement_U (A \cup B)$

已知全集  $U = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - 3x + 2 = 0\}$ ,  
 $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - 2x + 1 = 0\}$ ,  
 $B = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - 1 = 0\}$

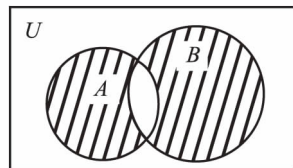
求  $A \cup B$ ,  $A \cap B$

#### 例 2

用集合的运算表示下列各图中阴影部分表示的集合



(1)



(2)

【分析】图(1)阴影部分表示的集合是由集合A的元素与B的补集的公共元素组成的集合；图(2)阴影部分表示的集合是由集合A与B的交集的补集与A与B的并集的公共元素组成的集合。

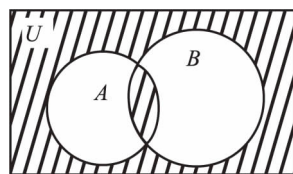
【解答】图(1)阴影部分表示的集合是  $A \cap \complement_U B$ ；

图(2)阴影部分表示的集合是  $\complement_U (A \cap B) \cap (A \cup B)$ 。

【点评】运用文氏图研究集合之间的关系时，从图形入手，先分析所研究的对象是由哪些集合中的元素组成，然后运用集合的运算表示。

☺ 变身题

运用集合的运算表示右图中阴影部分表示的集合。



焦点二 摇集合语言与符号语言的转化

两个集合有多种关系，将集合的运算符号转化为等量关系，求参数的值；将集合的运算符号转化为不等关系，求参数的取值范围，并利用数轴分析研究不等式组解集。

✦ 例猿

设  $A = \{x \mid -2 \leq x \leq 3\}$ ， $B = \{x \mid x < 3\}$ 。

若  $A \cup B = A$ ，求实数  $a$  的值。

【分析】摇用列举法表示集合A；集合B是单元素集或空集。由  $A \cup B = A$  知  $B \subseteq A$ 。

【解答】摇当  $a = 3$  时， $B = \emptyset$ ，显然有  $A \cup B = A$ ；

当  $a \neq 3$  时， $B = \{a\}$ ，

又  $A \cup B = A$ ， $A \cup B = A$ ，

所以  $a \in A$  或  $a \in \complement_U A$ ，因此  $a \in A$  或  $a \in \complement_U A$ 。

综上所述， $a = 3$  或  $a \in A$  或  $a \in \complement_U A$ 。

【点评】摇空集是任何集合的子集，任何集合与其子集的并集都等于其本身。若  $B \subseteq A$ ，则分两类讨论： $(1) B = \emptyset$ ； $(2) B \neq \emptyset$ 。

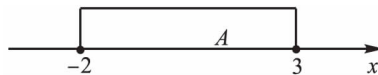
✦ 例源

已知集合  $A = \{x \mid -2 \leq x \leq 3\}$ ， $B = \{x \mid a \leq x \leq 4\}$ ， $A \cap B \neq \emptyset$ ，求  $a$  的取值范围。

(1)  $A \cap B \neq \emptyset$ ；(2)  $A \cap B = \emptyset$ 。

【分析】摇把集合A表示的数集在数轴上表示出来，根据实数a在数轴上对应的点的位置进行分类讨论。

【解答】摇  $A = \{x \mid -2 \leq x \leq 3\}$ ， $B = \{x \mid a \leq x \leq 4\}$ 。  
集合A在数轴上(如图)，



设实数a对应点a。

(1) 当点a在点-2左侧，即  $a < -2$  时， $A \cap B = \emptyset$ 。

(2) 当点a在点-2右侧，即  $a \geq -2$  时， $A \cap B \neq \emptyset$ 。

(3) 当点a在点3及右侧，即  $a \geq 3$  时， $A \cap B \neq \emptyset$ 。

【点评】摇注意何时取等号，要根据条件仔细分析。

☺ 变身题

已知集合  $A = \{x \mid -2 \leq x \leq 3\}$ ， $B = \{x \mid a \leq x \leq 4\}$ ，若  $A \cap B \neq \emptyset$ ，则a的取值范围是(摇摇)。

☺  $[-2, 4]$       ☺  $[-2, 3]$

☺  $[-2, 3]$       ☺  $[-2, 4]$

焦点三 摇运用集合的运算解决实际问题

运用集合的运算分析实际问题时，通常画出



已知集合  $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - 2x + 1 = 0\}$ ,  $B = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - 2x + 1 = 0\}$ , 求  $A \cap B$

### 综合探究

一般地, 中学在每年金秋时节都会举办运动会, 某校高一(1)班共有 50 名同学参加运动会, 其中有 15 人参加径赛, 10 人参加田赛, 10 人参加球类比赛, 同时参加田赛、径赛的有 5 人, 同时参加径赛、球赛的有 5 人, 没有同时参加三项比赛的同学, 请你统计出: 同时参加田赛、球赛的人数和只参加径赛的人数.

## 异题同构函数及其表示

### 异题同构函数的概念

### 自主预习

设  $A, B$  是非空的数集, 如果按照某种确定的对应关系  $f$ , 使对于集合  $A$  中的任意一个元素  $x$ , 在集合  $B$  中都有唯一的元素  $y$  与之对应, 记作  $y = f(x)$ , 其中  $x$  叫做自变量,  $y$  的取值范围  $B$  叫做函数的值域; 与  $x$  的值对应的  $y$  值叫做函数值, 函数值的集合  $B$  (或  $f(A)$ ) 叫做函数的值域.

设  $f, g$  是两个函数, 而且  $f, g$  规定:

(1) 满足不等式  $f(x) \leq g(x)$  的实数  $x$  的集合叫做闭区间, 表示为  $[a, b]$ ;

(2) 满足不等式  $f(x) < g(x)$  的实数  $x$  的集合叫做半开半闭区间, 表示为  $[a, b)$  或  $(a, b]$ ;

(3) 满足不等式  $f(x) < g(x)$  的实数  $x$  的集合分别表示为  $(a, b), (a, b), (a, b), (a, b)$ ;

一个函数构成的要素为: 定义域、对应关系、值域. 如果两个函数的定义域相同, 并且对应关系相同, 那么就称这两个函数相等.

### 逐点扫描

#### 焦点一 函数的概念

设  $A, B$  是两个非空数集,  $f: A \rightarrow B$  是  $A$  到  $B$  的对应关系, 如果对于  $A$  中的每一个元素  $x$ , 在  $B$  中都有唯一的元素  $y$  与之对应, 那么  $f$  叫做  $A$  到  $B$  的函数, 记作  $y = f(x)$ . 其中  $A$  叫做函数的定义域,  $B$  叫做函数的值域.

函数的定义域: 若两个非空数集  $A, B$  之间的对应关系  $f: A \rightarrow B$  是函数, 则集合  $A$  叫做函数的定义域. 一般地, 函数的定义域就是使函数式有意义时自变量  $x$  的取值范围, 如果是实际问题还应使实际问题有意义.

#### 例 1

2010 年西部赛区 NBA 赛季前八名:

球队	森林狼	马刺	湖人	国王	小牛	灰熊	火箭	掘金
胜场数	48	56	52	46	50	44	42	40
败场数	14	6	10	16	12	18	20	22
排名	8	1	2	7	3	4	5	6

摇摇①球队与排名; ②排名与胜场数; ③排名与败场数; ④胜场数与败场数.

上述关系中哪些是函数关系?

【分析】摇摇根据函数的定义判断即可.

【解答】摇摇①球队与排名的对应关系不是建立两个数集间的对应关系, 因此不是函数关系; ②③④中对应关系符合函数的定义, 因此是函数关系.

【点评】摇摇函数关系是一种对应关系, 但对对应

系不一定是函数关系若两个集合 A、B 间的对应关系 f: A → B 是函数关系必须具备条件:(1) A 是非空数集;(2) 对于集合 A 中的任意一个 x, 按照对应关系 f, x 在集合 B 中都有唯一确定的数 y 和它对应

☺ 变身题

- 下列说法不正确的是( )
  - 正方形的面积是它边长的函数
  - 某地区某天内 t 小时的气温是时间的函数
  - 某人学习成绩是他的学习时间的函数
  - 匀速运动的汽车的速度是时间的函数

✳ 例 1

求下列函数的定义域:

(1)  $y = \sqrt{\frac{x-1}{x}}$

(2)  $y = \sqrt{\frac{x-1}{x+1}}$

【解答】(1) 由题意得  $\begin{cases} x-1 \geq 0 \\ x \neq 0 \end{cases}$ , 即  $\begin{cases} x \geq 1 \\ x \neq 0 \end{cases}$

亦函数的定义域为  $[1, +\infty) \cup (0, 1)$

(2) 由题意得  $\begin{cases} x-1 \geq 0 \\ x+1 > 0 \end{cases}$ , 即  $\begin{cases} x \geq 1 \\ x > -1 \end{cases}$

亦  $x \geq 1$

亦函数的定义域为  $[1, +\infty)$

【点评】求函数定义域的步骤:(1)根据函数式列出不等式(组);(2)解不等式(组);(3)用集合表示或用区间表示不等式(组)的解集

☺ 变身题

函数  $y = \sqrt{x-1}$  的定义域为 \_\_\_\_\_

焦点二 符号“ $y=f(x)$ ”的含义、函数值域

符号“ $y=f(x)$ ”中 x 可以是具体实数, 可以是表示实数的字母、代数式等, 若 f(x) 中的 x 换成一个数、字母、代数式, 则解析式中的 x 也要做相应的替换如  $y = \sqrt{x-1}$ , 则  $y = \sqrt{a-1}$  或  $y = \sqrt{(x-1)-1}$

函数值域就是函数值的集合函数值域由定义域和对应关系决定因此求函数的值域, 要根据函数的定义域来求

✳ 例 2

已知函数  $y = \sqrt{x-1}$   
求:(1) x 的取值范围;(2) 函数的值域

【分析】求 x 的取值范围就是将  $y = \sqrt{x-1}$  中的 y 用 0 替代, 求 x 的取值范围, 就是将  $y = \sqrt{x-1}$  中的 y 用 1 替代

【解答】(1) 由  $y = \sqrt{x-1} \geq 0$  得  $x-1 \geq 0$ ,  
即  $x \geq 1$ , 因此, 函数的定义域为  $[1, +\infty)$

【点评】此题中函数的定义域是  $[1, +\infty)$ , 若函数的定义域不是  $[1, +\infty)$ , 则要根据二次函数性质求值域如:  $y = x^2 - 2x + 1$ , 此函数的图象是抛物线的一部分, 利用函数图象分析, 当  $x=1$  时函数取得最小值 0, 当  $x=2$  时函数取得最大值 1, 故函数的值域为  $[0, 1]$

☺ 变身题

函数  $y = \sqrt{x-1}$  的值域为 \_\_\_\_\_  
若函数  $y = \sqrt{x-1}$ , 则 x 的取值范围是 \_\_\_\_\_, 当  $x=1$  时, y 的值为 \_\_\_\_\_

焦点三 函数相等

由于函数的值域是由其定义域和对应关系决定的, 所以对应关系相同, 定义域相同的函数是相同的函数

✳ 例 3

下列每组中的函数 f(x) 与 g(x) 是否相等?

- (1)  $f(x) = \sqrt{x-1}$ ,  $g(x) = \sqrt{x-1}$
- (2)  $f(x) = \sqrt{x-1}$ ,  $g(x) = \sqrt{x-1}$
- (3)  $f(x) = \sqrt{x-1}$ ,  $g(x) = \sqrt{x-1}$
- (4)  $f(x) = \sqrt{x-1}$ ,  $g(x) = \sqrt{x-1}$

【分析】两个函数相等的条件是：(1)定义域相同；(2)对应关系相同。

【解答】由已知得，函数  $f(x) = \begin{cases} x^2 & x \in \mathbb{R} \\ x & x \in \mathbb{R} \end{cases}$  的定义域分别是  $\mathbb{R}$  和  $(-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$ ，亦函数  $f(x)$  与  $g(x)$  不相等。

(3)  $f(x) = \begin{cases} x^2 & x \in \mathbb{R} \\ x & x \in \mathbb{R} \end{cases}$ ，虽然定义域相同，但对应关系不同，亦函数  $f(x)$  与  $g(x)$  不相等。

(4)  $f(x) = \begin{cases} x^2 & x \in \mathbb{R} \\ x & x \in \mathbb{R} \end{cases}$ ， $g(x) = \begin{cases} x^2 & x \in \mathbb{R} \\ x & x \in \mathbb{R} \end{cases}$ ，定义域分别是  $\mathbb{R}$  和  $(-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$ ，亦函数  $f(x)$  与  $g(x)$  不相等。

(5)  $f(x) = \begin{cases} x^2 & x \in \mathbb{R} \\ x & x \in \mathbb{R} \end{cases}$ ， $g(x) = \begin{cases} x^2 & x \in \mathbb{R} \\ x & x \in \mathbb{R} \end{cases}$ ，定义域和对应关系都相同，亦函数  $f(x)$  与  $g(x)$  相等。

【点评】对函数式进行化简后，若化简前后的定义域没有改变，化简后的函数与原函数相等；若定义域改变，则化简前后的函数不相等。

变身题

下列每组中的函数  $f(x)$  与  $g(x)$  相等的是 ( )。

- (1)  $f(x) = \begin{cases} x^2 & x \in \mathbb{R} \\ x & x \in \mathbb{R} \end{cases}$ ,  $g(x) = \begin{cases} x^2 & x \in \mathbb{R} \\ x & x \in \mathbb{R} \end{cases}$
- (2)  $f(x) = \begin{cases} x^2 & x \in \mathbb{R} \\ x & x \in \mathbb{R} \end{cases}$ ,  $g(x) = \begin{cases} x^2 & x \in \mathbb{R} \\ x & x \in \mathbb{R} \end{cases}$
- (3)  $f(x) = \begin{cases} x^2 & x \in \mathbb{R} \\ x & x \in \mathbb{R} \end{cases}$ ,  $g(x) = \begin{cases} x^2 & x \in \mathbb{R} \\ x & x \in \mathbb{R} \end{cases}$
- (4)  $f(x) = \begin{cases} x^2 & x \in \mathbb{R} \\ x & x \in \mathbb{R} \end{cases}$ ,  $g(x) = \begin{cases} x^2 & x \in \mathbb{R} \\ x & x \in \mathbb{R} \end{cases}$

焦点四 分段函数

分段函数就是自变量在不同取值范围内，函数的解析式不同，应分段给出。研究分段函数时，一定要根据自变量  $x$  的取值范围，判断属于哪一段，并根据该段的解析式研究。

例 4

已知函数  $f(x) = \begin{cases} x^2 & x \in \mathbb{R} \\ x & x \in \mathbb{R} \end{cases}$ ，求  $f(1)$  的值。

【分析】当  $x \in \mathbb{R}$  时的函数解析式是未知的，要求当  $x \in \mathbb{R}$  时的函数值，根据条件将  $x \in \mathbb{R}$  的函数

数值转化为  $f(x)$  的某个函数值来计算。

【解答】由已知得， $f(x) = \begin{cases} x^2 & x \in \mathbb{R} \\ x & x \in \mathbb{R} \end{cases}$ 。

【点评】在数学中经常将未知的问题转化为已知问题来处理，逐步体会转化与化归的数学思想。

变身题

已知函数  $f(x) = \begin{cases} x^2 & x \in \mathbb{R} \\ x & x \in \mathbb{R} \end{cases}$ ，求  $f(1)$  的值。

焦点训练

下列关系不是函数的是 ( )。

- (1)  $f(x) = \begin{cases} x^2 & x \in \mathbb{R} \\ x & x \in \mathbb{R} \end{cases}$
- (2)  $f(x) = \begin{cases} x^2 & x \in \mathbb{R} \\ x & x \in \mathbb{R} \end{cases}$

下列对应不是从集合  $A$  到集合  $B$  的函数的是 ( )。

- (1)  $f(x) = \begin{cases} x^2 & x \in \mathbb{R} \\ x & x \in \mathbb{R} \end{cases}$
- (2)  $f(x) = \begin{cases} x^2 & x \in \mathbb{R} \\ x & x \in \mathbb{R} \end{cases}$

函数  $f(x) = \begin{cases} x^2 & x \in \mathbb{R} \\ x & x \in \mathbb{R} \end{cases}$  的定义域为 ( )。

- (1)  $(-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$
- (2)  $(-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$

已知  $f(x) = \begin{cases} x^2 & x \in \mathbb{R} \\ x & x \in \mathbb{R} \end{cases}$ ，则  $f(1) = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

$f(x) = \begin{cases} x^2 & x \in \mathbb{R} \\ x & x \in \mathbb{R} \end{cases}$ 。

函数  $f(x) = \begin{cases} x^2 & x \in \mathbb{R} \\ x & x \in \mathbb{R} \end{cases}$  的值域为 ( )。

- (1)  $(-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$
- (2)  $(-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$

求  $f(x) = \begin{cases} x^2 & x \in \mathbb{R} \\ x & x \in \mathbb{R} \end{cases}$  的值。

能力提升

函数  $y = \sqrt{x-1} + \sqrt{2-x}$  的定义域是

解 由  $\begin{cases} x-1 \geq 0 \\ 2-x \geq 0 \end{cases}$  得  $1 \leq x \leq 2$ , 故定义域为  $[1, 2]$ .

已知函数  $y = \sqrt{x-1} + \sqrt{2-x}$ , 求  $y$  的取值范围.

综合探究

已知函数  $y = \sqrt{x-1} + \sqrt{2-x}$ , 探究  $y$  与  $x$  的关系;  
 求  $y$  的取值范围.

解析法 设  $A, B$  是非空的集合, 那么就从集合  $A$  到集合  $B$  的一个映射

逐点扫描

焦点一 函数的三种表示方法

解析法 必须注明函数的定义域;  
 图象法 函数图象既可以是连续的曲线,也可以是直线、折线、离散的点等等.函数图象与垂直于  $x$  轴的直线至多有一个交点.  
 列表法 选取的自变量要有代表性,应能反映定义域的特征.  
 分段函数的解析式不能写成几个不同的方程,而是写成几种不同的表达式并用一个大括号括起来,并分别注明各部分的自变量的取值情况.

例 1

已知函数  $y = \sqrt{x-1} + \sqrt{2-x}$ , 求  $y$  的解析式;

解 由  $\begin{cases} x-1 \geq 0 \\ 2-x \geq 0 \end{cases}$  得  $1 \leq x \leq 2$ , 故  $y = \sqrt{x-1} + \sqrt{2-x}$ .

【分析】求  $y$  的解析式,实际上就是求函数解析式中参数  $a, b$  的值.根据  $x$  的解析式,进行分类讨论.当  $x \geq 1$ , 即  $x \in [1, 2]$  时,  $y = \sqrt{x-1} + \sqrt{2-x}$ .

【解答】由已知得  $\begin{cases} y = \sqrt{x-1} + \sqrt{2-x}, \\ y = \sqrt{x-1} + \sqrt{2-x} \end{cases}$

解得  $y = \sqrt{x-1} + \sqrt{2-x}$ .

当  $x \in [1, 2]$  时,  $y = \sqrt{x-1} + \sqrt{2-x}$ .

自主预习

(曾原) 越原曾援

亦溪曾 越早枣曾 ] 越  $\begin{cases} \text{曾原曾 (曾元)}, \\ \text{猿原曾 (曾元)} \end{cases}$  援

【点评】摇枣曾中的 曾可以是数、字母、代数式等,若将 枣曾中的 曾用  $\varphi$ (曾代换,则其表达式中 曾都要用  $\varphi$ (曾代换援

☺ 变身题

☺已知 枣曾 越曾原曾满足 枣圆 越圆枣原圆 越员, 则 枣源 越\_\_\_\_\_ 援

☺已知 枣曾 越原曾圆,求 早曾 越枣枣曾 ]的解析式援

焦点二 摇函数的三种表示方法之间的转化

☺函数的三种表示方法,在具体的实际问题中能够根据不同的需要选择恰当的方法表示函数援注意分段函数的表示方法及其图象的画法援

☺函数的三种表示法的优点:

解析法——(员)简明、全面地概括了变量间的关系;(圆)可以通过解析式求出任意一个自变量的值所对应的函数值援中学阶段研究的主要是能够用解析式表示的函数;

图象法——直观形象地表示自变量的变化,相应的函数值变化的趋势,有利于通过图象来研究函数的一些性质;

列表法——不需要计算就可以直接看出与自变量的值相对应的函数值援

✱ 例圆

商场经调查,销售某一品牌的羊毛衫,销售件数(赠件)与出售价格(曾元 辘)之间存在一定的关系,统计数据如下:

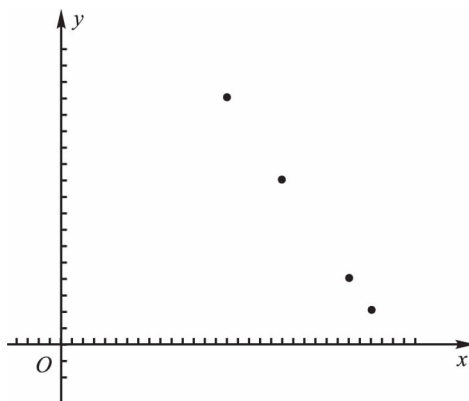
出售价格(曾元 辘)	圆园	圆园	圆园	员园	...
销售件数(赠件)	圆	源	员园	员缘	...

摇摇根据以上数据,在平面直角坐标系中描出实数对(曾赠)的对应点,利用我们所学的函数来刻画此种品牌的羊毛衫的销售件数(赠件)与出售价格(曾元 辘

件)之间的函数关系,求出函数解析式援

【分析】摇先在平面坐标系中描出点,再根据点在坐标系中分布的特征,选择符合特征的函数模型,然后代值计算求出函数解析式中的参数援

【解答】摇在直角坐标系中描出对应的点,如图所示,从点的分布特征知,此种品牌的羊毛衫的销售件数(赠件)与出售价格(曾元 辘)之间的函数关系比较符合一次函数援



因此可用函数 赠越原曾圆 刻画援

从而代点(圆园,圆),(圆园,源),计算得

赠越原曾圆 援

经验证知,(圆园,源),(员园,员缘)也适合解析式 赠越原曾圆 援

所以此种品牌的羊毛衫的销售件数(赠件)与出售价格(曾元 辘)之间的函数解析式为 赠越原曾圆 (猿曾\* 辘) 援

【点评】摇本题用列表法表示函数关系,通过图象,求出解析式援体现了数表语言、图形语言、符号语言之间的转化援

☺ 变身题

摇摇下表是某小卖部一周卖出热茶的杯数与当天气温的对比表:

气温 辘	员愿	员猿	员园	源	原员
杯数	圆原	猿源	猿怨	缘	远

摇摇若热茶杯数 赠与气温 曾近似地满足线性关系,则其关系式最接近的是(摇摇)援

粤 赠越曾圆

月 赠越原曾圆

悦 赠越原曾圆

阅 赠越原曾圆

例猿

画出下列函数的简图:

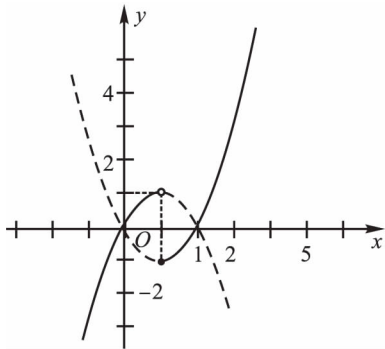
$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 2x, & x \geq 0 \\ \frac{1}{x}, & x < 0 \end{cases}$$

【分析】将函数解析式中绝对值符号去掉,根据解析式画出各个部分的图象.函数图象一部分是抛物线对称轴右边部分,一部分是双曲线的一支.

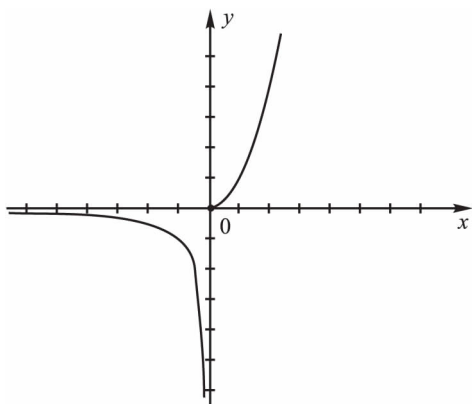
【解答】

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 2x, & x \geq 0 \\ \frac{1}{x}, & x < 0 \end{cases}$$

图象如下图所示:



的图象如下图所示:



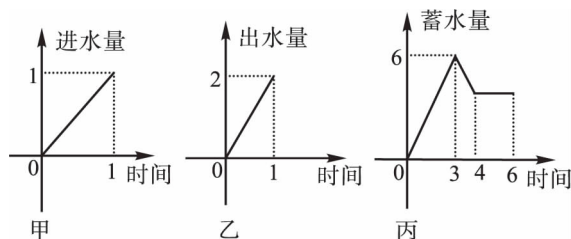
【点评】画函数图象的一般步骤:列表;描点;连线.画简图只要反映出函数的特征即可,不必按画图象的三步来画,可根据已知函数图象来画.图象的渐近线、对称轴、与坐标轴交点等关键点、线一定要画出来.

变身题

画出下列函数的图象:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 2x, & x \geq 0 \\ \frac{1}{x}, & x < 0 \end{cases}$$

水池有 2 个进水口, 1 个出水口, 进、出水的速度如图甲、乙所示, 某天 0 点到 6 点, 该水池的蓄水量如图丙所示(至少打开一个水口).



给出以下三个论断:

① 0 点到 1 点只进水不出水; ② 1 点到 3 点只出水不进水; ③ 3 点到 6 点不进水不出水. 则一定能确定正确的论断是( )

- 甲 ①
- 乙 ②
- 丙 ③
- 丁 ②③

例源

判断下列两个对应是否是集合 A 到集合 B 的映射? 为什么?

(1) 设 A = {1, 2, 3}, B = {1, 2, 3, 4}, 对应法则 f: A → B, f(x) = x + 1;

(2) 设 A = {1, 2, 3}, B = {1, 2, 3, 4}, 对应法则 f: A → B, f(x) = x 除以 2 得到的余数;

(3) 设 A = {1, 2, 3}, B = {1, 2, 3, 4}, 月越 {1, 2, 3, 4}.

