

重点难点解题手册

高一数学

摇摇摇摇

总 主 编 :王后雄摇摇摇摇

本册主编 :董摇武摇摇摇摇

本册编者 :董摇武摇王志美

摇摇 朱晓艳摇摇摇摇

北京出版社出版集团

北 京 教 育 出 版 社

图书在版编目(CIP)数据

重点难点解题手册 高一数学 董武编 北京：北京教育出版社，
2004

ISBN 7-309-05111-1

I 董... II 董... III 数学课—高中—解题 IV 郭卫

中国版本图书馆CIP数据核字(2004)第111111号

本册主编董武

本册编者董武 王志美 朱晓艳

重点难点解题手册

高一数学

ZHONGDIAN NANDIAN JIETI SHOUC

GAOYI SHUXUE

总主编王后雄

*

北京出版社出版集团 出版

北京教育出版社

(北京北三环中路 28 号)

邮政编码 100028

网 址 : <http://www.bjpp.com.cn>

北京出版社出版集团总发行

新华书店经销

印刷

*

开本 787mm×1092mm 1/16 印张

2004 年 1 月第 1 版 2004 年 1 月第 1 次印刷

印数 1—5000 册

ISBN 7-309-05111-1

定价：15.00 元

质量投诉电话：010-63076666

目 录



第一章 集合与简易逻辑

一、集合

重点难点提示

习题分类解析

类型 集合中元素的性质

类型 集合的表示方法

类型 元素与集合的关系

类型 利用元素性质确定集合

类型 综合问题

解题方法归纳与提升

二、子集、全集、补集

重点难点提示

习题分类解析

类型 写出给定集合的子集

类型 利用集合间的关系求参数值

类型 判断集合间的关系

类型 补集

类型 综合应用

解题方法归纳与提升

三、交集、并集

重点难点提示

习题分类解析

类型 求集合的交集、并集

类型 基本性质

类型 维恩图

类型 临时性定义

类型 交集并集思想

类型 确定参数范围

类型 综合问题

解题方法归纳与提升

四、含绝对值的不等式解法

重点难点提示

习题分类解析

类型 含有一个绝对值的不等式的解法

类型 含有两个绝对值的不等式的解法

类型 恒成立问题

类型 含参数绝对值不等式的解法

类型 实际应用

解题方法归纳与提升

五、一元二次不等式的解法

重点难点提示

习题分类解析

类型 二次函数、一元二次方程、一元二次不等式的联系

类型 一元二次不等式的解法

类型 分式不等式

类型 含参不等式

解题方法归纳与提升

六、逻辑联结词及四种命题

重点难点提示

习题分类解析

类型 复合命题的构成

类型 判断复合命题真假

类型 判断命题的逆、否命题

类型 判断命题真假

类型 反证法

类型 利用复合命题知识解综合题

解题方法归纳与提升

七、充要条件

重点难点提示

习题分类解析

类型 充要条件

类型 “或”“且”“非”形式命题真假与充要条件的判定

类型 “若 则”“若 则”形式命题真假与充要条件的判定

摇

类型 源集合间的关系与充要条件的判定 转页

类型 缘利用充要条件确定参数范围 转页

类型 远充要条件的证明与求解 转页

解题方法归纳与提升 转页

第二章 函数 转页

一、函数与映射 转页

重点难点提示 转页

习题分类解析 转页

类型 员函数 转页

类型 圆映射 转页

类型 猿象与原象 转页

类型 源函数的图象 转页

类型 缘分段函数① 转页

类型 远分段函数② 转页

类型 苑复合函数 转页

类型 愿综合问题 转页

解题方法归纳与提升 转页

二、函数的解析式 转页

重点难点提示 转页

习题分类解析 转页

类型 员二次函数解析式 转页

类型 圆复合函数的解析式 转页

类型 猿构造方程组求解析式 转页

类型 源利用函数性质求解析式 转页

类型 缘函数的综合应用 转页

解题方法归纳与提升 转页

三、函数的定义域 转页

重点难点提示 转页

习题分类解析 转页

类型 员已知函数解析式求函数定义域 转页

类型 圆复合函数的定义域 转页

类型 猿已知定义域求参数取值范围 转页

类型 源实际问题或几何问题中的定义域 转页

解题方法归纳与提升 转页

四、函数的值域 转页

重点难点提示 转页

习题分类解析 转页

类型 员已知函数解析式求函数的值域 转页

类型 圆换元法求区间上值域 转页

类型 猿判别式法求值域 转页

类型 源利用函数性质求值域 转页

类型 缘已知函数值域求参数取值范围 转页

类型 远综合问题 转页

解题方法归纳与提升 转页

五、函数的单调性 转页

重点难点提示 转页

习题分类解析 转页

类型 员函数单调性的判定 转页

类型 圆函数的单调区间 转页

类型 猿利用函数单调性确定参数值 转页

类型 源利用函数单调性解不等式 转页

类型 缘抽象函数的单调性 转页

类型 远综合问题 转页

解题方法归纳与提升 转页

六、反函数 转页

重点难点提示 转页

习题分类解析 转页

类型 员判断函数是否存在反函数 转页

类型 圆给出函数解析式 求函数的反函数 转页

类型 猿反函数的性质 转页

类型 源反函数图象之间的关系 转页

类型 缘综合问题 转页

解题方法归纳与提升 转页

七、二次函数 转页

重点难点提示 转页

习题分类解析 转页

类型 员二次函数值域 转页

类型 圆求解析式 转页

类型 猿二次函数的图象 转页

类型 源二次函数实根分布 转近

类型 缘综合问题 转范

类型 远二次函数、二次方程、二次不等式的关系问题 转页

解题方法归纳与提升 转圆

八、指数与对数 转猿

重点难点提示 转猿

习题分类解析 转源

类型 员幂、指运算 转源

类型 圆幂对数运算 转缘

类型 猿指对互化 转近

类型 源以几何为背景,代数与几何的综合 转愿

解题方法归纳与提升 转愿

九、指数函数 转园

重点难点提示 转园

习题分类解析 转页

类型 员指数函数的图象变换 转页

类型 圆基本性质 转圆

类型 猿判断函数单调性 转源

类型 源最值 转猿

类型 缘比较大小 转范

类型 远综合问题 转愿

解题方法归纳与提升 转园

十、对数函数 转园

重点难点提示 转园

习题分类解析 转页

类型 员对数函数图象 转页

类型 圆定义域问题 转猿

类型 猿复合函数的单调性 转源

类型 源反函数 转近

类型 缘比较大小 转范

类型 远对数方程、不等式 转愿

类型 苑函数单调性的应用 转园

类型 愿综合问题 转圆

解题方法归纳与提升 转源

第三章 数列 转猿

一、数列 转猿

重点难点提示 转猿

习题分类解析 转近

类型 员已知数列通项,求指定项的值 转近

类型 圆写出数列的通项公式 转范

类型 猿判断数列的单调性 转愿

类型 源已知 a_n 求 S_n 转愿

类型 缘已知数列通项,求指定项的值 转园

类型 远求递推数列的通项公式 转页

类型 苑已知递推数列前 n 项和,求通项公式 转猿

类型 愿综合问题 转猿

解题方法归纳与提升 转愿

二、等差数列的通项公式 转愿

重点难点提示 转愿

习题分类解析 转愿

类型 员等差数列的基本量 转愿

类型 圆已知数列通项,求指定项的值 转页

类型 猿等差数列的性质 转园

类型 源与函数综合 转源

解题方法归纳与提升 转愿

三、等差数列的前 n 项和 转愿

重点难点提示 转愿

习题分类解析 转范

类型 员等差数列的基本量 转范

类型 圆基本性质 转愿

类型 猿等差数列前 n 项和与函数综合 转页

类型 源综合问题 转园

解题方法归纳与提升 转源

四、等比数列 转猿

重点难点提示 转猿

习题分类解析 转猿

类型 员等比数列的基本量 转猿

类型 圆判断数列是否为等比数列 转范

类型 递等比中项 递等
 类型 递等比数列的性质 递等
 类型 递综合问题 递等
 解题方法归纳与提升 递等
 五、递等比数列的前 n 项和 递等
 重点难点提示 递等
 习题分类解析 递等
 类型 递等比数列的基本量 递等
 类型 递基本性质 递等
 类型 递构造数列 递等
 类型 递求等比数列的前 n 项和 递等
 解题方法归纳与提升 递等
 六、数列求和 递等
 重点难点提示 递等
 习题分类解析 递等
 类型 递公式法 递等
 类型 递错位相减求和法 递等
 类型 递裂项求和法 递等
 类型 递倒序相加法求和 递等
 类型 递分组转换法 递等
 解题方法归纳与提升 递等

第四章 三角函数 递等

一、角的概念的推广 递等
 重点难点提示 递等
 习题分类解析 递等
 类型 递角的概念问题 递等
 类型 递求范围 递等
 类型 递终边在一条直线上的角的集合 递等
 类型 递命题类 递等
 类型 递时针与分针所构成的角 递等
 解题方法归纳与提升 递等
 二、弧度制 递等
 重点难点提示 递等
 习题分类解析 递等

类型 递基础题 递等
 类型 递扇形面积 递等
 类型 递象限角的集合 递等
 解题方法归纳与提升 递等
 三、任意角的三角函数 递等
 重点难点提示 递等
 习题分类解析 递等
 类型 递用任意角三角函数定义解题 递等
 类型 递有关三角函数值在各象限
 的符号问题 递等
 类型 递求值问题 递等
 类型 递综合问题 递等
 解题方法归纳与提升 递等
 四、同角三角函数的基本关系式 递等
 重点难点提示 递等
 习题分类解析 递等
 类型 递求值 递等
 类型 递化简 递等
 类型 递化简求值 递等
 类型 递证明问题 递等
 类型 递综合问题 递等
 解题方法归纳与提升 递等
 五、正弦、余弦诱导公式 递等
 重点难点提示 递等
 习题分类解析 递等
 类型 递化简求值 递等
 类型 递求值 递等
 类型 递化简 递等
 类型 递综合问题 递等
 解题方法归纳与提升 递等
 六、两角和与两角差的正弦、余弦、
 正切 递等
 重点难点提示 递等
 习题分类解析 递等
 类型 递求值 递等

类型 已知三角函数值求角 类型 化简求值 类型 证明 类型 三角函数与方程综合 解题方法归纳与提升 七、二倍角的正弦、余弦、正切 重点难点提示 习题分类解析 类型 求值问题 类型 化简求值 类型 证明 类型 化简 类型 三角函数与三角的综合 解题方法归纳与提升 八、正弦函数、余弦函数的图象和性质 重点难点提示 习题分类解析 类型 求定义域、值域 类型 求值 类型 最值问题 类型 综合问题 解题方法归纳与提升 九、函数 $y = \sin(\omega x + \varphi)$ 的图象 重点难点提示 习题分类解析 类型 图形变换 类型 三角函数性质的应用 类型 三角函数与三角问题 类型 综合问题 解题方法归纳与提升 十、正切函数的图象和性质 重点难点提示 习题分类解析 类型 求定义域、值域 类型 求值问题

类型 与图象有关的问题 类型 综合问题 解题方法归纳与提升 十一、已知三角函数值求角 重点难点提示 习题分类解析 类型 已知正、余弦求角 类型 已知正切求角 类型 在三角形中求值 类型 综合问题 解题方法归纳与提升

第五章 平面向量

一、向量

重点难点提示 习题分类解析 类型 理解向量的定义 类型 向量的性质 类型 向量的几何表示 类型 平面向量与立体几何综合 类型 单位向量概念的应用 解题方法归纳与提升 二、向量的加法与减法 重点难点提示 习题分类解析 类型 向量的加法与减法运算 类型 向量的模的性质 类型 利用向量加法和减法解决问题 类型 向量加减与平面图形综合 类型 向量加减的实际应用 解题方法归纳与提升

三、实数与向量的积

重点难点提示 习题分类解析 类型 实数与向量的乘积

类型 圆两向量共线的充要条件的应用 猿恩

类型 猿向量的线性运算 猿恩

类型 源向量与平面几何综合 猿恩

类型 缘用向量解决三角问题 猿恩

解题方法归纳与提升 猿恩

四、平面向量的坐标运算 猿恩

重点难点提示 猿恩

习题分类解析 猿猿

类型 员平面向量的坐标及运算 猿猿

类型 圆用坐标表示向量共线的充要条件 猿源

类型 猿坐标法求向量的模的应用 猿缘

类型 源向量与函数综合 猿苑

类型 缘平面向量与解析几何综合 猿恩

解题方法归纳与提升 猿恩

五、线段的定比分点 猿恩

重点难点提示 猿恩

习题分类解析 猿恩

类型 员求定比 λ 猿恩

类型 圆中点坐标公式的应用 猿恩

类型 猿定比分点坐标公式的应用 猿恩

类型 源定比分点与三角形性质综合 猿缘

类型 缘定比分点与函数综合 猿恩

解题方法归纳与提升 猿恩

六、平面向量的数量积及运算律 猿恩

重点难点提示 猿恩

习题分类解析 猿恩

类型 员求角度与参数问题 猿恩

类型 圆向量的数量积及其运算律 猿恩

类型 猿求向量的模 猿恩

类型 源利用向量研究平面图形的性质 猿恩

类型 缘利用数量积求解平面几何问题 猿恩

解题方法归纳与提升 猿恩

七、平面向量数量积的坐标表示 猿恩

重点难点提示 猿恩

习题分类解析 猿猿

类型 员相反意义的量 猿猿

类型 圆求长度 猿源

类型 猿求夹角问题 猿缘

类型 源利用向量的数量积解决平面

几何问题 猿恩

类型 缘向量与三角函数综合 猿恩

解题方法归纳与提升 猿恩

八、平移 猿恩

重点难点提示 猿恩

习题分类解析 猿恩

类型 员求平移后的坐标或函数解析式 猿恩

类型 圆求平移向量 猿恩

类型 猿应用平移求解实际问题 猿恩

类型 源利用平移化简函数 猿猿

类型 缘平移与三角函数综合 猿猿

解题方法归纳与提升 猿源

九、正弦定理、余弦定理 猿缘

重点难点提示 猿缘

习题分类解析 猿恩

类型 员应用正、余弦定理解三角形 猿恩

类型 圆判断三角形的形状 猿恩

类型 猿三角形中最值问题 猿恩

类型 源解斜三角形与数列综合 猿猿

类型 缘解三角形与向量综合 猿猿

解题方法归纳与提升 猿恩

十、解斜三角形应用举例 猿猿

重点难点提示 猿猿

习题分类解析 猿猿

类型 员求面积 猿猿

类型 圆利用定理解决有关三角形问题 猿缘

类型 猿解三角形在实际问题中的应用 猿恩

类型 源求解测量问题 猿苑

类型 缘建立目标函数求最值 猿恩

解题方法归纳与提升 猿恩



第一章 集合与简易逻辑

DiYiZhang JiHeYuJianYiLuoJi

一、集合



重点难点提示

一般地,某些指定的对象集在一起就成为一个集合,也简称集。集合中的每个对象叫做这个集合的元素。

集合中的元素具有确定性、互异性、无序性:

集合中的元素必须是确定的。就是说,给定一个集合,任何一个对象是不是这个集合的元素也就确定了。

集合中的元素是互异的。就是说,集合中的元素是没有重复现象的,任何两个相同的对象在同一个集合中时,只能算这个集合的一个元素。

集合中的元素是无序的。就是说,集合中的元素排列与顺序无关。

常用的数集及其记法:

全体非负整数的集合通常简称非负整数集(或自然数集),记作 $\mathbb{N}$ 。非负整数集内排除 0 的集,也称正整数集,表示成 $\mathbb{N}^+$ 或 $\mathbb{N}_{\neq 0}$;

全体整数的集合通常简称整数集,记作 $\mathbb{Z}$;

全体有理数的集合通常简称有理数集,记作 $\mathbb{Q}$;

全体实数的集合通常简称实数集,记作 $\mathbb{R}$ 。

集合的表示方法,常用的有列举法和描述法:

列举法是把集合中的元素一一列举出来的方法。

描述法是用确定的条件表示某些对象是否属于这个集合的方法。

集合的分类:

一般地,含有有限个元素的集合叫做有限集。

一般地,含有无限个元素的集合叫做无限集。

不含任何元素的集合叫做空集,记作 $\emptyset$ 。

元素与集合之间的关系:

如果 a 是集合 A 的元素,就说 a 属于集合 A ,记作 $a \in A$;如果 a 不是集合 A 的元素,就说 a 不属于集合 A ,记作 $a \notin A$ 。



习题分类解析

类型 员摇集合中元素的性质

求数集 $\{园,曾,曾原曾\}$ 中的数所应满足的条件援

$$\text{【解】摇由集合中元素的互异性有} \begin{cases} 曾 \neq 园, \\ 曾原曾 \neq 园, \\ 曾原曾 \neq 曾, \end{cases} \text{解得} \begin{cases} 曾 \neq 园, \\ 曾 \neq 园 \text{ 且 } 曾 \neq 员, \\ 曾 \neq 园 \text{ 且 } 曾 \neq 圆, \end{cases}$$

亦 $曾 \neq 园$ 且 $曾 \neq 员$ 且 $曾 \neq 圆$ 援

变式 员摇

由实数 $皂, 原皂, |皂|, \sqrt{皂}, 原\sqrt{皂}$ 所组成的集合 最多含()

圆个元素 摇摇摇摇摇 圆个元素 摇摇摇摇摇 圆个元素 摇摇摇摇摇 圆个元素

【解析】摇疫对于任意的 $皂, \sqrt{皂} \geq |皂|, 原\sqrt{皂} \leq 原皂$,

当 $皂 > 园$ 时, $\sqrt{皂} > |皂|$ 越皂越原 $\sqrt{皂}$ 越原皂越园, 所以由这几个实数所组成的集合含有 员个元素;

当 $皂 = 园$ 时, $\sqrt{皂} = |皂|$ 越皂, 原 $\sqrt{皂}$ 越原皂, 所以由上面几个实数所组成的集合含有 圆个元素;

当 $皂 < 园$ 时, $\sqrt{皂} > |皂|$ 越原皂越原 $\sqrt{皂}$, 所以由上面几个实数所组成的集合含有 圆个元素援

亦由实数 $皂, 原皂, |皂|, \sqrt{皂}, 原\sqrt{皂}$ 所组成的集合 最多含有 圆个元素援

【答案】摇粤

变式 圆摇

设 $葬, 遭, 糟$ 是非零实数, 且 $曾 \geq \frac{|葬|}{葬} + \frac{|遭|}{遭} + \frac{|糟|}{糟} + \frac{|葬遭糟|}{葬遭糟}$, 则以 $曾$ 的取值为元素组成的集合是摇摇摇摇摇

【解析】摇当 $葬, 遭, 糟$ 均为正数时, $曾 \geq \frac{|葬|}{葬} + \frac{|遭|}{遭} + \frac{|糟|}{糟} + \frac{|葬遭糟|}{葬遭糟}$ 越原;

当 $葬, 遭, 糟$ 中有两个正数, 一个负数时, $曾 \geq \frac{|葬|}{葬} + \frac{|遭|}{遭} + \frac{|糟|}{糟} + \frac{|葬遭糟|}{葬遭糟}$ 越园;

当 $葬, 遭, 糟$ 中有一个正数, 两个负数时, $曾 \geq \frac{|葬|}{葬} + \frac{|遭|}{遭} + \frac{|糟|}{糟} + \frac{|葬遭糟|}{葬遭糟}$ 越园;

当 $葬, 遭, 糟$ 中有三个负数时, $曾 \geq \frac{|葬|}{葬} + \frac{|遭|}{遭} + \frac{|糟|}{糟} + \frac{|葬遭糟|}{葬遭糟}$ 越原原

【答案】摇 $\{原原, 园, 源\}$

► 变式 猿

集合 酝的元素为正整数,且满足如果 曾 酝,则 愿原曾 酝,则

(员)只有 员个元素的集合 酝越 ;

(圆)有 圆个元素的集合 酝为 ;

(猿)满足题设条件的集合 酝共有 个援

【解析】摇(员)疫集合 酝只有 员个元素,

亦曾越愿原曾即 曾越源

亦只有 员个元素的集合 酝越源

(圆)疫集合 酝中有 圆个元素,其元素只能是 曾愿原曾,

从而全部含 圆个元素的集合 酝应为:{员苑},{圆远},{猿缘}

(猿)满足题设条件的集合 酝是由集合{源,{员苑},{圆远},{猿缘}中的 员个或 圆个或 猿个或 源个组成援人以上集合中任取 员个,有 源种;任取 圆个,有 远种;任取 猿个,有 源种;任取 源个,有 员种援总共有 员缘个援即满足题设条件的集合 酝共有 员缘个援

【答案】摇(员){源}摇(圆){员苑},{圆远},{猿缘}摇(猿)员缘

► 类型 圆 集合的表示方法

指出下列表述中哪些是正确的援

①在越全体整数;②砸越砸;③{(员圆)}越员圆;④{赠 赠越曾原曾 越曾 赠越曾原曾援

【解】摇正确的表述是①援

► 变式 员

试用另一种方法表示下列集合:

(员){曾 曾越源原灶,灶 晕且 灶 缘}越 ;

(圆){曾在 | $\frac{远}{曾} \in$ 在}越 ;

(猿){负数}越 ;

(源){员缘原缘,员缘,远缘}越 援

【答案】摇(员){原圆,员,源苑,远,员苑}摇(圆){员,原员圆,原圆猿,原猿远,原远};

(猿){曾 曾 远}摇(源){曾 曾越灶,灶 晕且 灶 源}援

► 变式 圆

用适当的方法表示下列集合援

(员)所有偶数组成的集合;

(圆)方程(曾圆)(曾原曾圆)越远的所有解,并化简;

(猿)方程组 $\begin{cases} 圆曾猿猿越原缘 \\ 猿曾圆猿越圆 \end{cases}$ 的解的全体,并化简;

(源)函数 赠越曾原曾原猿的图象与 赠轴的交点;

(缘)函数 赠越曾垣员的 赠值的全体援

【解】摇(员){偶数}越曾 曾越圆,灶 在;

变式猿

已知集合 $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - 2x + 1 = 0\}$, 若 A 中只有一个元素, 试求 a 的值

【解】设集合 $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - 2x + 1 = 0\}$, 若 A 中只有一个元素, 亦方程 $x^2 - 2x + 1 = 0$ 有一个或两个相等实根

(1) 当 $a = 1$ 时, 原方程化为 $x^2 - 2x + 1 = 0$, 即 $(x-1)^2 = 0$, 解得 $x = 1$, 符合题意

(2) 当 $a \neq 1$ 时, 方程 $x^2 - 2x + 1 = 0$ 有两个相等实根, 则 $\Delta = 4 - 4a = 0$, 解得 $a = 2$

综合(1)(2)可知, a 的值为 1 或 2

类型 源 利用元素性质确定集合

已知集合 $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - 2x + 1 = 0\}$, 试求

(1) 要使 A 为单元素集, 则 a 应满足什么条件;

(2) 要使 A 为由实数构成的双元素集, 则 a 应满足什么条件;

(3) 要使 A 中无实数元素, 则 a 应满足什么条件

【解析】设集合 A 为单元素集,

亦方程 $x^2 - 2x + 1 = 0$ 有一个或两个相等实数根

① 当 $a = 1$ 时, 原方程化为 $x^2 - 2x + 1 = 0$, 解得 $x = 1$, 满足题意;

② 当 $a \neq 1$ 时, 方程 $x^2 - 2x + 1 = 0$ 有两个相同实根

亦 $\begin{cases} a = 1, \\ \Delta = 4 - 4a = 0 \end{cases}$ 解得 $a = 1$

亦 $a = 1$ 或 $a = 2$

(2) 要使 A 为由实数构成的双元素集, 则方程 $x^2 - 2x + 1 = 0$ 有两个不相同实根

$\begin{cases} a \neq 1, \\ \Delta = 4 - 4a > 0 \end{cases}$ 解得 $a \in (-\infty, 1) \cup (2, +\infty)$

亦 $a \in (-\infty, 1) \cup (2, +\infty)$

(3) 要使 A 中无实数元素, 则方程 $x^2 - 2x + 1 = 0$ 无实根

① 当 $a = 1$ 时, 原方程化为 $x^2 - 2x + 1 = 0$, 解得 $x = 1$, 不满足题意;

② 当 $a \neq 1$ 时, 方程 $x^2 - 2x + 1 = 0$ 无实根

亦 $\begin{cases} a \neq 1, \\ \Delta = 4 - 4a < 0 \end{cases}$ 解得 $a \in (2, +\infty)$

亦 $a \in (2, +\infty)$

【答案】摇(员) 或 园摇(圆) ∈ (原∞ 园) ∪ (园, 摇(猿) 跃

➤ 变式 员

设 S 为满足下列两个条件的实数所构成的集合：

①员_葬杂,②若葬杂,则 $\frac{\text{员}}{\text{员葬}}$ 杂,求解下列问题:

(员)若数列 $\{圆 \cdot (原)^\text{灶}\}$ 中的项都在 杂中,求 杂中所含元素个数最少的集合 杂援

(圖杂中所含元素个数一定是 2^{n-1} 个吗?若是,请给出证明,若不是,请说明
援

【解】摇(负)葬越圆(原)灶所以葬越原圆葬越圆葬越原圆...即集合杂中必有圆和原圆

$$\text{圓} \xrightarrow{\text{員}} \frac{\text{員}}{\text{員原圓}} \in \text{雜} \xrightarrow{\text{原}} \frac{\text{員}}{\text{員原(原)}} \in \text{雜} \xrightarrow{\text{員}} \frac{\text{員}}{\text{員原}} \in \text{雜} \xrightarrow{\text{員}} \frac{\text{員}}{\text{員原圓}} \in \text{雜} \xrightarrow{\text{圓}} \text{援}$$

所以 杂中至少含有元素 圆,原员,员援

同理,由 $\frac{\text{猿}}{\text{圆}} \in \text{杂}$ 可得 $\frac{\text{员}}{\text{猿}} \in \text{杂}$ 和 $\frac{\text{猿}}{\text{圆}} \in \text{杂援}$

所以 杂中至少含有元素 $\frac{\text{原圆}}{\text{猿}}, \frac{\text{员}}{\text{猿}}, \frac{\text{猿}}{\text{圆}}$

则集合 杂中所含元素个数最少的集合为 杂 越圆,原员, $\frac{员}{圆}$, 原圆, $\frac{员}{猿}$, $\frac{猿}{圆}$ }援

(圆)一定是獾炆暈*)个援

由葬杂且员 $\notin$ 杂 $\Rightarrow$ 葬 $\neq$ 员,

所以由葬杂 $\rightarrow$ $\frac{员}{员原葬}$ ∈杂 $\rightarrow$ $\frac{员}{员原葬}$ ∈杂 $\rightarrow$ 员葬∈杂 $\rightarrow$ $\frac{员}{员原(员原葬)}$ ∈杂 $\rightarrow$ 葬杂

即当葬杂时, $\frac{\text{员}}{\text{员原葬}} \in \text{杂}$, $\frac{\text{员}}{\text{员原葬}} \in \text{杂援}$

下面证明 $\frac{\text{葬}}{\text{葬原葬}}, \frac{\text{葬}}{\text{葬原葬}}$ 互不相等援

若 $\frac{\text{葬员}}{\text{员葬}}$ 则 $\frac{\text{葬员}}{\text{员葬}} > 1$, 即 $\frac{\text{葬员}}{\text{员葬}} > 1$ 无解, 所以 $\frac{\text{葬员}}{\text{员葬}}$.

若葬_地原_葬员_葬则葬_地原_葬员_葬越园无解,所以葬_地原_葬员_葬;

若 $\frac{y}{x} > \frac{y_0}{x_0}$, 则 $\frac{y}{x} > \frac{y_0}{x_0}$ 无解, 所以 $\frac{y}{x} = \frac{y_0}{x_0}$.

即葬_{员原葬}员原葬互不相等援

所以 杂中所含元素个数一定是 $2n+1$ 个

► 变式 圆

对于所含元素为实数的集合 M , 若 $x \in M$, 则 $\frac{1}{x} \in M$, 试解答下列问题:

(1) 已知 $1 \in M$, 求集合 M

(2) 集合 M 是否可能为单元素集?

(3) 集合 M 中的元素有何规律?

【解】(1) 由 $1 \in M$, 由题设可知 $\frac{1}{1} \in M$, 即 $1 \in M$.

又 $1 \in M$, 则 $\frac{1}{1} \in M$, 即 $1 \in M$.
 $\frac{1}{1} \in M$, 则 $\frac{1}{\frac{1}{1}} \in M$, 即 $1 \in M$.
 $\frac{1}{1} \in M$, 则 $\frac{1}{\frac{1}{\frac{1}{1}}} \in M$, 即 $1 \in M$.

亦即 $M = \{1\}$.

(2) 如果集合 M 是单元素集, 由题意若 $x \in M$, 则 $\frac{1}{x} \in M$, 则有 $x = \frac{1}{x}$.

亦即 $x^2 = 1$, 此方程无解.

亦即集合 M 不可能为单元素集.

(3) 当 $x \in M$ 时, $\frac{1}{x} \in M$, 即 $\frac{1}{\frac{1}{x}} \in M$, 即 $x \in M$.

令 $x = \frac{1}{x}$, 解得 $x = 1$, 即 $1 \in M$.

设 $x \in M$, 且 $x \neq 1$, 则 $\frac{1}{x} \in M$.

又 $\frac{1}{x} \in M$, 则 $\frac{1}{\frac{1}{x}} \in M$, 即 $x \in M$.
 $\frac{1}{x} \in M$, 则 $\frac{1}{\frac{1}{\frac{1}{x}}} \in M$, 即 $x \in M$.

亦即 $M = \{x, \frac{1}{x}\}$.

亦当 $x \in M$, $x \neq 1$, 则 $\frac{1}{x} \in M$, 即 $\frac{1}{\frac{1}{x}} \in M$, 即 $x \in M$.

亦即 $M = \{x, \frac{1}{x}\}$.

► 变式 猿

已知集合 $M = \{x \mid \text{关于 } x \text{ 的方程 } x^2 + px + q = 0 \text{ 有唯一实数解}\}$, 用列举法表示集合 M 为

援



【解析】设疫关于 曾 的方程 $\frac{曾^2}{曾原圆} = 越$ 有唯一实数解，

亦当 曾 $\neq$ 依/圆且 葬 $\neq$ 越/圆时，方程 $\frac{曾^2}{曾原圆} = 越$ 可化为 $\frac{员}{曾原圆} = 越$ ，即 $\frac{曾}{曾原圆} = 越$ 满足题意；

当 曾 $\neq$ 依/圆且 葬 $\neq$ 原/圆时，方程 $\frac{曾^2}{曾原圆} = 越$ 可化为 $\frac{员}{曾原圆} = 越$ ，即 $\frac{曾}{曾原圆} = 越$ 满足题意；

当 曾 $\neq$ 依/圆且 葬 $\neq$ 依/圆时，方程 $\frac{曾^2}{曾原圆} = 越$ 可化为 $\frac{曾原葬}{曾原圆} = 越$ ，

亦 $\Delta = \frac{员原原葬}{原葬} [原(葬原圆)] \geq 0$ ，即 葬 $\geq$ 原 $\frac{怨}{源}$ ， $\frac{曾^2}{曾原圆} = 越$ 有重根援

亦满足条件的集合 粤为 $\{\sqrt{圆}, 原/圆, 原 \frac{怨}{源}\}$ 援

【答案】摇 $\{\sqrt{圆}, 原/圆, 原 \frac{怨}{源}\}$

类型 缘 综合问题

设 杂 $\subseteq$ 曾 $\subseteq$ 皂垣/圆灶，灶 $\in$ 在 援

(员)若 曾, 皂是 杂中的任意两个元素，那么 曾垣皂, 曾皂是否属于 杂？

(圆)若 杂中的元素 曾的倒数也是 杂中的元素，求表示该元素的 皂, 灶之间的关系援

(猿)对于给定的整数 灶，试求满足 $\frac{曾垣皂}{曾皂} = \frac{灶}{圆}$ 的 杂中元素的个数援

【解】摇 (员) 设 曾 $\in$ 皂垣/圆灶, 皂 $\in$ 皂垣/圆灶, 皂, 灶 $\in$ 在 援

则 曾垣皂 $\in$ 皂垣/圆灶, 垣(皂垣/圆灶)

$\in$ 皂垣/圆灶, 垣(圆灶垣灶) 其中 皂垣皂 $\in$ 在 灶垣灶 $\in$ 在,

亦 曾垣皂 $\in$ 杂 援

又 曾皂 $\in$ 皂垣/圆灶, (皂垣/圆灶)

$\in$ 皂垣/圆灶, 垣(圆灶垣灶垣灶) 其中 皂垣皂垣灶 $\in$ 在 皂垣皂垣灶 $\in$ 在,

亦 曾皂 $\in$ 杂 援

(圆) 设 曾 $\in$ 皂垣/圆灶,

当 灶 $\neq$ 园时，疫曾 $\frac{员}{曾}$ 亦 $\frac{员}{曾}$ 为 皂垣/圆灶的有理化因式，设 $\frac{员}{曾} = \frac{噪皂原圆}{圆}$ (噪 $\in$ 在)，

则 噪皂原圆 $\in$ (皂垣/圆灶) $\in$ 越,

亦 噪皂 $\in$ 原圆灶 $\in$ 越,

疫 噪皂, 灶 $\in$ 在,

亦 皂 $\in$ 原圆灶 $\in$ 越 依 员

当 灶 $\neq$ 园时，曾 $\in$ 皂垣/圆灶, 曾 $\in$ 在,

亦 皂 $\in$ 越 依 员 援 综上所述，皂 $\in$ 原圆灶 $\in$ 越 依 员 援

(猿) 当 灶 $\neq$ 园时，得 $\frac{曾垣皂}{曾皂} = \frac{灶}{圆}$ 的 约 员，这样的整数不存在，



亦此时 杂中不含满足条件的元素援

当 灶 园时 园 皂垣 园 皂垣,

亦 原 园 皂垣 约 原 园 皂垣 援 原 园 皂垣 皂垣 皂垣 在 园 皂垣 援

则 皂垣 皂垣 皂垣 皂垣 皂垣 皂垣,

亦整数 皂垣 有且只有一个 皂垣 皂垣,

亦满足条件 园 皂垣 园 皂垣 的 杂中的元素有且仅有一个援



解题方法归纳与提升

另解方法归纳：

(员)对于集合问题,首先要确定属于哪类集合(数集、点集或某类图形集),然后确定处理此类问题的方法援

(圆)含参数的集合问题,多根据集合中元素的互异性来处理,有时需进行分类讨论援

(猿)集合问题多与函数、方程、不等式有关,要注意各类知识的融会贯通援

(源)掌握好集合中元素的确定性、互异性、无序性,这是正确解决集合问题的关键援

(缘)正确理解集合语言是解决问题的基础援

(远)重视图形(数轴、坐标系、维恩图)在解决问题中的重要作用援

圆高要求：

集合部分是每年的必考题,一方面是考查考生对集合概念的理解,如集合中涉及的特定的字母和符号,元素与集合的关系等;另一方面考查考生应用集合知识的水平,如用集合表示运算的结果等援

二、子集、全集、补集



重点难点提示

圆子集的定义：一般地,对于两个集合 粤与 月,如果集合 粤的任何一个元素都是集合 月的元素,我们就说集合 粤包含于集合 月,或集合 月包含集合 粤,记作 粤 月 或 月 粤援这时我们也说集合 粤是集合 月的子集援

规定：空集是任何集合的子集援也就是说,对于任何一个集合 粤,有 $\varnothing \subseteq \text{粤}$ 援

圆集合与集合的相等：

一般地,对于两个集合 粤与 月,如果集合 粤的任何一个元素都是集合 月的元素,同时集合 月的任何一个元素都是集合 粤的元素,我们就说集合 粤等于集合 月,记作 粤 月援

圆真子集的定义：

对于两个集合 粤与 月,如果 粤 月,并且 粤 月,我们就说集合 粤是集合 月的真子集,记作 粤 月 或 月 粤援

圆一些容易混淆的符号的区分：