
电子图书
信息技术的结晶
人类文明的载体
网络的基本资源

序　言

有幸捷足先登，阅读了本书的部分内容后，不禁使我回想起在清华读书时聆听吴有训先生讲课的情景。吴先生那一次讲的是“振动和共振”。他在大课堂里拉了一根很长的绳子，在绳上等距离地垂下 8 根短线，每根短线都一样长且在绳下端各系着一个用过的大号干电池。他讲了一段课后，即作表演。首先在横线垂直方向推动第一节干电池，让第一节干电池作单摆运动；不一会儿这个摆动逐渐减弱下来，而第二节干电池却开始摆动起来，以后第三、四节干电池也随之先后摆动起来。这个实验用的是最普通的器材，它却非常生动地显示了简谐振动和共振现象。它形象地给同学们留下了一个清晰明了的印象。这虽是六十多年前的事了，但我至今仍记忆犹新。

近些年来，我们国家的基础教育有了不少进步，各地也都在搞教育改革。但相对而言，中学理科教学中的实验仍然是个比较薄弱的环节。我国中学生代表队近几年参加国际奥林匹克物理竞赛，取得了很好的成绩。但有部分学生的实验考试成绩相对理论考试成绩来说比较低，这也说明我们中学物理课中的实验训练还有待加强。

作为一个物理教师，应该经常自己动手制作实验器材。我们当年在清华读书的同学，常常看见一位老师，身穿粗布工作服，时而用锯子、斧头加工器材，时而用氢、氧吹管拉制玻璃器材和石英丝等。他就是上面提到的国内外有名的吴有训教授。历来成功的科学巨匠，都是亲自制作实验仪器的。吴先生经常告诫我们，要锻炼自己动手的本领，他说：“实验物理的学习，要从使用螺丝刀开始。”他为物理系开设了“实验技术”选修课，还要求物理系的学生读一些工学院的课程，如制图、车、钳工工艺等。这些课程对我们以后的学习和工作，起了很大、很好的作用。1937 年，我的同学钱三强到法国巴黎大学居里实验室，跟约里奥·居里夫妇共作原子核物理研究。约里奥的动手能力很强，自己会上车床。有一天，约里奥问钱三强：“你会不会金工？”钱三强毫不犹豫地回答道：“会一点。”钱的这一本领还是在清华大学金工学习课上学到的，这一下正好用上了。1948 年钱三强回国后，也同样鼓励年轻人要勤于动手，能自己制作仪器设备。

这本《中学物理实验大全》共收集了近四百个实验，每一个实验中还汇集了好几种方法。作者都是长年工作在中学教育第一线的有经验的老师。他们总结了自己在日常教学中的经验，将自己平时点点滴滴积累起来的实验成果拿出来与大家交流，应该是一件很有益的工作。希望这本书的出版能对提高中学物理实验教学的水平起一点作用，对我国的基础教育作出一点贡献。

王淦昌

编者的话

物理学是一门实验科学。要想成为一个优秀的物理工作者，要想在物理学的领域中有所收获，没有良好的实验基础是难以想象的。近年来，这个观念已被广大中学教师所接受，并逐步付之于行动。但毋庸讳言，实验教学仍然是我国中学物理教学中的一个薄弱环节，实验教学的现状与它在物理教学中应有的地位仍然是很不相称的。造成这种现状的原因很多，除了考试制度的局限和不少地区的学校实验设备严重不足等客观原因外，尚有不少中学物理教师和实验员还不能适应实验教学的要求。不论在实验素养、动手能力诸方面都有待进一步提高。从我国中学物理教学这一基本现状出发，为了尽快地提高我国中学物理实验教学的水平，我们编写了这本《中学物理实验大全》。编写此书的主要目的有两上：一、提高教师的实验素养。本书较详细地介绍了有关实验误差理论的基础知识及其在中学物理实验中的应用。用误差理论来指导实验的每一个环节，通过实践逐步提高教师实验素质。二、增强教师指导学生实验的能力。本书对一系列重要的学生实验进行了深入的讨论，以求确定最优的实验方案，改进操作方法，并对实验结果作出合理的评价。

本书还集思广益，最大限度地将广大中学教师中的优秀实验发掘出来，推广应用。为了做到这一点，我们在写作前期进行了广泛的征集优秀实验方案的工作。最后被录用稿件的作者多达三百名，作品由上海、福建、江苏、浙江、四川、湖北等省市的大中院校教师撰写。

为了确保实验原理的正确无误和操作方法的切实可行，本书所有实验都经过严格的审查。由编委和上海市物理实验开展得较好的南洋模范中学、控江中学、市北中学、金山县中等学校物理教研室的老师分块分段进行初审，主编复审，最后由上述各校对部分实验进行验证。

本书主编：杨介信、张大同。

本书编委：杨介信、张大同、唐一鸣、贾克钧。

本书基础篇作者：杨介信、张大同、杨大光、陈永春。

本书实验篇中的内容除了征集的优秀稿件外，其余的由张大同、唐一鸣、贾克钧分工撰写，并由他们三人对全篇分段进行统稿。本篇作者姓名的排列是按文章出现的先后为依据的，参加本篇编写的作者有：张大同、刘孝铨、冷跃翔、龚惠谟、庄起黎、何祥水、倪福海、张溶菁、虞关忠、杨介信、吴景辉、王树、刘炳昇、杨士凤、贺承德、唐一鸣、朱佩明、忻贤光、华德尧、陈适、朱寿泉、盛焕芳、徐自尧、张大有、高国强、张静可、袁哲诚、潘志钧、吴家伟、戴振邦、曹栽源、陈光明、张善贤、吴兆铨、顾维聪、张学诚、朱炳连、朱德宝、丁忠孚、刘通、郑上殷、薛云翔、王忠芳、胡关荣、曹磊、方剑荣、夏兆燊、傅爱菊、唐永康、徐国清、谌麟南、贺圣平、姜立中、刘钊培、郑海平、瞿德林、贾克钧、施孟嘉、施文祥、郑安澜、汤跃基、秦泽良、刘凤英、顾仲茂、曹慧、毛同彬、刘鸿骥、刘志勇、刘永熙、吴永熙、王仁镔、李渭源、鲁向东、张越、傅祥文、赵金国、周瑞杰、瞿俊杰、尹达新、杨岳根、姜邦富、陈立新、向大国、范镃明、陈汉凯、戴保熹、闵杰、屈国荣、许治平、宋克之、金国桢、陈春山、俞伟铭、曹文绮、顾光旭、丁德音、陈方新、何晓华、瞿淳、阮美华、冯容士、姜文龙、华敦远、宋宁生、

周熊、朱金春、顾毓鹏、陈心田、陆起英、陈斐辉、严振道、高国治、王泰俊、朱以卓、孟展、严洪、刘伟源、陆仲贤、胡艇安、刘明、杨文超、项志良、陈松年、沈明祥、夏宗农、张兴法、郝芫、李新祥、周耀琴、白日豪、黄俊才、谢步时、张金华、陈承恩、黄森、周箴行、何绪伦、华玉琴、朱梧凤、方海根、王溢然、缪一明、汪琰、成海钧、许小明、徐晓雷、钱大威、彭桂芳、茅孝先、欧阳治中、顾惠民、郭成宝、刘敬德、周茂林、张海祥、吴志炜、张民强、陈申堂、巫朝荣、蔡华麒、吴志荣、朱国贤、李景松、朱励新、王世谊、周志钾、王素红、陈作勤、林绍伦、鲍凯歌、许新根、朱炳连、倪天龙、钱壮、蔡忠志、陈兆荣、林应基、王振文、张宇良、赵志和、曹永奎、张静甫、沈信武、缪智铭、马在轸、奚天敬、柯永晶、陆敏慧、应福廷、陈申、徐有樊、郭子正、黄之璋、朱家宝、索锡华、忻元祺、王大愚、王海泉、李家鹏、夏月明、蔡明德、王嘉昌、顾奎华、江小明、杨凤兴、杨宏道、张志刚、郭英伟、金宗儒、徐冠军、王为骥、林宝山、孟晓瑜、徐利伟、张泉庚、程红才、黄善新。

部分力学实验由上海市南洋模范中学白日豪，王嘉昌，宋宁生，张志锋，施钧，夏宗农，刘伟源验证。

部分热学、光学实验由上海市金山县中张大有，范铦明验证。

部分电学实验由上海市市北中学王泰俊，张静可，朱金春验证。

在编写本书过程中，得到上海市教育局教研室、上海教育学院、上海市仪器公司、上海市少科站、福建省教育学院、上海市向明中学、上海市南洋模范中学、上海市市西中学等有关领导和教师的大力支持。著名的老一辈科学家王淦昌先生在百忙中抽空为本书写了序言，他们的无私帮助给了全体编者极大的鼓舞，在此一并表示衷心的感谢。

《中学物理实验大全》编写组

基 础 篇
JICHUPIAN

·中学物理实验大全·ZHONGXUEWULISHIYANDAQUAN·

需要全本请访问 www.ertongbook.com

实验误差

1

物理学是一门实验科学，物理实验离不开测量。著名物理学家开尔文曾经说过：“如果你能够测量你所谈的东西，并能用数量表示它，你对它就有所了解了；假如你不能测量它，你对它的知识就是贫乏而不能令人满意的。”由此可见，测量是实验科学最本质的东西。

任何物质都有自身的各种各样的特性，反映这些特性的量所具有的客观的真实数值，称为真值。测量的目的就是力图得到真值。但是由于测量的方法、仪器、环境和测量者自身素质都会存在某些不理想的情况，因此测量不可能是完全精确的。在绝大多数情况下，测量结果(x)与客观存在的真值(A)之间总有一定的差异，这个差异就是测量误差(△x)。可以用数学式表示为

$$\triangle x = |x - A|$$

因为△x 是用测量值和真值之差的绝对值来表示,所以把它叫做绝对误差。误差在测量过程中是必然存在且不可避免的。误差的大小是反映测量结果偏离客观真实的程度，反映测量结果的可信程度。

应该怎样来评价一个测量结果呢？下面以打靶为例来说明。如果有一个射击者瞄准靶心进行射击，由于枪（不可能十全十美）、环境（包括射击时的风向、气温、光照）以及射击者本身的因素（包括他射击的技术水平以及射击的竞技状态）等诸多原因，子弹不可能每发都击中靶心，例举图中(a)、(b)、(c)三种情况。从图中可以看出，三次射击的结果都有一定的离散性。其中，(c)的弹着点最集中，重复性最好。(b)的弹着点的平均位置离靶心最近，正确性最高。



(a)　(b)　(c)

在物理实验的测量结果中，同样存在着重复性和正确性的问题。为了定量地描述这两种性质不同的问题，物理学中引入了偶然误差和系统误差两个概念。本章将分别讨论这两种误差。

一　估算直接测量中的偶然误差

在实验时所得的测量结果，因受被测对象、所用仪器、周围环境以及实验者本身情况的影响，会偏离真值而产生误差。由于影响结果的因素很多，它们又各自以不同的方式变动，所以对某一次具体的测量来讲，很难确定测量结果相对真值的偏离究竟有多大及到底是偏大还是偏小，这就使得每一次测量结果的误差都带有一定的偶然性（或称随机性）。这一类误差叫做偶然误差（或随机误差）。

在某一次测量时偶然误差是无法控制的，但在多次测量中，偶然误差的出现却服从一定的统计规律。统计理论和实验事实都证明了偶然误差服从正态分布。正态分布的特征是：大于真值和小于真值的测量值出现的机会相等，偏离真值很大的测量值出现的机会趋于零。而且误差较

小的测量值比误差较大的测量值出现的机会多。

为了简化问题起见，下面的讨论中暂时假设这些实验没有系统误差。

所谓直接测量，就是直接用测量仪器进行测量得到结果。比如用米尺测量长度，用温度计测量温度，用伏特表测量电压等都是直接测量。根据测量次数的不同，直接测量又可以分成多次测量和单次测量两种，下面分别讨论怎样估算这两种测量的偶然误差。

（一）估算多次测量中的误差

研究实验误差是一门较专门的科学，深入讨论它，需要有丰富的实验经验和较多的数学知识。但在中学物理实验中讨论误差完全可以用一套简化的公式来计算偶然误差。

根据误差的定义，误差等于测量值与真值之差。但真值是无法得到的，因此要计算误差，首先必须确定一个代替真值的最佳值。根据统计理论可知，如果进行了 n 次测量，得到 n 个测量值

$$x_1，x_2，x_3，\cdots\cdots，x_n$$

那么它们的平均值是最接近真值，即可用公式

$$\bar{x}=\frac{x_1+x_2+\cdots\cdots+x_n}{n}$$

作为最佳值来代替真值。当式中 n 趋向无穷大，而系统误差又可以忽略时，平均值就趋向真值。

测量值和平均值的差叫做残差，当 n 趋向无穷大时，残差趋向误差，在中学物理实验中，可用残差代替误差。

测量的偶然误差，可用公式

$$\triangle x=\frac{\sum_{i=1}^{n}|x_i-\bar{x}|}{n}$$

求得。

例　对某一长度测量 6 次，结果如下

x_1=3.41cm，x_2=3.43cm，x_3=3.45cm，

x_4=3.44cm，x_5=3.42cm，x_6=3.44cm。

那么，这组数据的平均值为

$$\bar{x}=\frac{\sum_{i=1}^{6}x_i}{6}=\frac{1}{6}(3.41+3.43+3.45+3.44+3.42+3.44)\text{cm}=3.43\text{cm}。$$

每次测量的绝对误差

$\triangle x_1$=｜3.41cm－3.43cm｜=0.02cm，

$\triangle x_2$=｜3.43cm－3.43cm｜=0.00cm，

$\triangle x_3$=｜3.45cm－3.43cm｜=0.02cm，

$\triangle x_4$=｜3.44cm－3.43cm｜=0.01cm，

$\triangle x_5$=｜3.42cm－3.43cm｜=0.01cm，

$\triangle x_6$=｜3.44cm－3.43cm｜=0.01cm。

误差的平均值

$$\triangle x = \frac{1}{6}(\triangle x_1 + \triangle x_2 + \triangle x_3 + \triangle x_4 + \triangle x_5 + \triangle x_6)$$

$$= \frac{1}{6}(0.02 + 0.00 + 0.02 + 0.01 + 0.01 + 0.01)\text{cm}$$

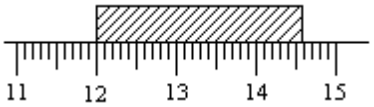
=0.02cm。

（二）估算单次测量中的误差

在物理实验中，有时被测的物理量是随时间变化的，无法进行多次测量。例如测量自由下落物体某时刻的高度；用混合法测固体比热时某时刻的温度等都不可能重复测量，只能对被测量物体进行单次测量。还有些测量精密度要求不高，没有必要进行重复测量。以上两种情况，一般只要进行单次测量，并且根据仪器的精度、测量者的估读能力以及测量时的具体环境等因素来对单次测量可能发生的误差作适当的估计。下面选几种常用的测量为例，来说明单次测量最大误差的估读方法。

1．用刻度尺测量长度

用一把最小刻度为毫米的刻度尺测量一块木块的长度。假如没有其他误差因素（例如视差等）存在，则误差的大小主要根据估读能力来确定。如果测量者能估读到最小分度的 1/5，则图中左端读数为(12.00±0.02)cm，右端读数为(14.57±0.02)cm。实验者的估读能力是有差异的。估读到的最小分度有的可读到 1/10 而有的只能读到 1/2。



大多数 10 分度的测量仪器的单次测量估读都可参照上述方法进行。

2．用游标卡尺测量长度

游标卡尺的游标可帮助测量者估读出较准确的数据。在使用游标卡尺进行测量时，如果游标尺上的某一根刻度线正好跟主尺上的某一刻度线对齐，那么读数是较容易读得准确的；如果游标尺上有两根刻度线跟主尺上的两条刻度线距离基本相等，这时可能出现的误差应该是游标精度的一半。由此可见，用游标卡尺单次测量长度的误差可定为游标精度的一半。例如用游标精度为 0.02mm（即游标副尺上有 50 格）的游标卡尺测量长度 x，可认为$\triangle x$=0.01mm。

3．用秒表测量时间

一般说来在使用秒表测量时间时，启动和制动秒表时所造成的误差比读数误差要大，因此应以前者为主确定单次测量的误差。实验工作者应通过自我训练使启动和制动时间各只有 0.1 秒的误差，使时间单次测量结果的误差控制在 0.2 秒之内。对初学者来说，则可将启动和制动的误差各定为 0.2 秒。

4．用指零仪表测量

用天平、电桥、电位差计等指零仪表进行单次测量时，可根据天平的灵敏度和测量者对指零器的分辨能力来确定其误差。下面以天平为

例，说明确定误差的具体方法。天平的感量为 C，用公式表示

$$C = \frac{m_2 - m_1}{\theta_2 - \theta_1}。$$

式中 $\theta_2 - \theta_1$ 为天平平衡时砝码质量由 m_1 变为 m_2 时天平指针偏转的格数。当测量者对指针偏转的分辨能力为△θ时，单次测量的误差可定为 C·△θ。例如某一架物理天平的感量为 0.02g（即砝码质量变化 0.02g 时，天平指针偏转一格），测量者对指针的分辨能力为 0.5 格，则单次测量误差可定为 0.01g。

（三）测量结果的表示及其含义

测量结果应该包含数值、误差和单位三个部分。通常将测量结果写成 $\bar{x} \pm \triangle x$ 的形式，其中 $\bar{x}$ 是测量值（可以是多次测量的平均值，也可以是单次测量的结果），△x 是测量误差。如上例的结果可写为 x=(3.43±0.02)cm。

在表述测量结果时，要注意以下几点：

(1)△x 的值一般都只取一位，而且应该跟测量值 x 的最后一位对齐。为了确保误差范围的有效性，△x 的值一般只进不舍。

(2)长度测量结果为 x=(3.43±0.02)cm，并不表示 x 等于 3.45cm 或 3.41cm 两个值，而是表示 x 一般在 3.41cm 到 3.45cm 这个范围之内。

(3)用关面所述的方法计算出来的△x 是欠完善的，因为在计算中没有反映出多次测量的效益和各独立偶然误差之间的抵偿作用。但是在直接测量次数不多的情况下，可粗略地把△x 作为 $\bar{x}$ 的最大误差。当测量次数 n=8 时，被测量值的真值有 p=95%的可能落在 $\bar{x} \pm \triangle x$ 的范围之内。其他测量次数的 p 值如下表所列。由表中可见，测量次数越多，被测量值的真值落在误差范围内的可能性越大。

n	3	4	5	6	7	8	9	10	14	15	20
p	*~0.7	~0.8	0.8^+*	~0.9	0.9^+	~0.95	~0.95	0.95^+	~0.99	0.99^+	0.9973^+

* ~表示接近，+表示略大。

测量误差的另一种表达形式是用相对误差来表示，相对误差 $E = \frac{\triangle x}{x} \times 100\%$，它与绝对误差比较，更能说明测量结果的好坏。

如甲测量一本书的宽度是 0.127±0.001m，乙测量百米赛跑跑道的长度是 100.04±0.05m。比较他俩测量的绝对误差，甲要比乙小得多，但比较他俩测量的相对误差是

$$E_{甲} = \frac{0.001}{0.127} = 0.8\%，$$

$$E_{乙} = \frac{0.05}{100.04} = 0.05\%。$$

从比较他俩的相对误差，可看出乙的测量结果优于甲的测量结果。

需要全本请访问 www.ertongbook.com

二　估算间接测量中的偶然误差

上节讨论了各种直接测量的方法及其误差的估算，但不是所有物理量都能直接测量的。例如要测量一块长方体金属块的密度ρ，一般是先用测量长度的工具，测量出它的长 a、宽 b 和高 c，然后再用测量质量的工具测量出它的质量 m，最后用公式 ρ=m/(a·b·c)计算出该金属的密度。因此，物理量的测量可分为两大类：一类是直接用测量工具进行测量得到结果，叫做直接测量；另一类是利用直接测量得到的值经过计算得到结果，叫做间接测量。因为间接测量的计算中所用的直接测量的值都是有误差的，因此通过计算得到的间接测量的结果，不可避免也有一定的误差。本节主要讨论怎样由直接测量的值及其误差估算出间接测量的值及其误差。

（一）有效数字的意义及其运算法则

在测量和数字计算中，究竟应用几位数字来表示测量或计算的结果，是一件很重要的事情。初学者可能认为在计算的结果中，保留的位数越多，精密度便越高。有的学生在使用计算器计算时，甚至会把计算结果的八、九位小数一起记下来，这样想或这样做都是错误的。事实上由于仪器的限制和人们感官的缺陷，测量得到的结果都是含有一定误差的近似数，由这些近似数计算得到的结果当然也是近似的。为了使间接测量的结果更合理，物理学中引进了“有效数字”的概念。

1．有效数字的意义

在科学实验中，数的用途有两类。一类是用来数“数目”。例如点小球的个数，无论谁来数，用什么方法数，在什么时候数或者在怎样的环境中数，都会得到同一个数目。对于这类数来说，我们均可认为其有效数字的位数为无限多。另一类数则是用来表示测量结果的。这类数的最末一位数往往是估计得来的，它们或多或少存在着误差。例如米尺的最小刻度是毫米（0.001 米），那么用米尺测量长度可以读到十分之一毫米（0.0001 米）。0.001 米这一位可以从米尺上读出来，是可靠的。因此说在 0.001 米位前面的数都是可靠数，而 0.0001 米这一位则是测量者估读出来的（称为存疑数）。所有可靠数加上最后一位存疑数，统称为有效数字。例如用米尺测量某一长度的结果是 0.2946 米，那么这个测量结果中 2、9、4 三位是可靠数，6 是存疑数，共有四位有效数字。

在应用有效数字时，应注意以下几点：

(1)自然数 1，2，3，4，5，6，7，8，9 如果出现在测量结果中，均为有效数字。而自然数“0”如出现在其他数字之后或之间也为有效数字，但如出现在其他数字之前就不是有效数字，这时的“0”只起定位作用。例如数 0.08020。其前面两个零不是有效数字，后面四个数都是有效数字，因此它有四位有效数字。

(2)读数时，必须按照仪器的精密度读出测量值。即使末位是“0”，也不能任意舍去。在数学中可以认为 2.10 厘米，2.100 厘米，2.1000 厘米是相同的，而在物理学中它们却表示了用三种不同的测量工具所测量的结果，其估读的存疑数分别在 0.01 厘米，0.001 厘米，0.0001 厘米这

些位上。所以决不能在测量结果后面任意加上或丢掉“0”这个数。

(3)有效数字是由测量对象和测量仪器所决定的，单位的换算不会改变有效数字的位数,因而必须注意单位换算时的正确表示法。例如将 3.70 米化成用毫米作单位，不能写成 3700 毫米，而应该用科学计数法写成 3.70×10^3 毫米，这样的写法仍保持了原来的三位有效数字。如写成 3700 毫米，则有效数字变成了四位。又如将 280 厘米化成用米作单位，不能写成 2.8 米，而应写成 2.80 米。

2．有效数字的运算法则

在有效数字运算过程中，应遵循两条原则：

(1)凡是有存疑数字参与运算的结果，都是不可靠的。

(2)运算结果中的存疑数字只保留最高的一位，其他存疑数字一律舍弃。

舍弃的方法：如果最高位舍弃数大于 5，则在其前一位数上增加 1；最高位舍弃数小于 5，则其前一位数不变；如果最高位舍弃数等于 5，那么要看其前一位数的奇偶性——如果前一位是奇数，则增加 1，如果前一位是偶数，则不变。例如，对 27.0249 取四位有效数字，结果为 27.02，取五位有效数字，结果为 27.025。又如将 27.025 跟 27.035 两个数，都取四位有效数字的话，则其结果分别为 27.02 与 27.04。

有效数字的运算法则

(1)加减法

下面通过两个例子介绍在加减法运算的结果中对有效位数的取法。

$$\begin{array}{r} 32.1 \\ +\ 3.274 \\ \hline 35.374 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 26.65 \\ -\ 3.926 \\ \hline 22.724 \end{array}$$

计算时，在存疑数字下面加一条横线，以便与可靠数字相区别。在加法运算的结果 35.374 中，由于第三位数“3”已经是存疑数，后面两们“7”和“4”应该舍弃。但因为“7”大于“5”，因此最后的结果是 35.4。由此可见，运算结果的末位数和两数中末位数位数高的一个数对齐。同理，上例中减法运算的结果 22.724 中的“4”应该舍弃。因为“4”小于“5”，因此它前面一位“2”不变。最后的结果是 22.72。

在上面的例子中，如果事先以存疑数字中位数较大的一个量为基准，将其他量中多余的数舍弃，取齐诸量的最末一位数，则可以简化运算过程，其结果和上面算法相同。仍然用上面两个算式为例，其具体算法如下：

$$\begin{array}{r} 32.1 \\ +\ 3.3 \\ \hline 35.4 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 26.65 \\ -\ 3.93 \\ \hline 22.72 \end{array}$$

以上结论可以推广到多个量相加或相减的运算中去。

(2)乘除法

下面通过两个例子介绍对乘除法运算中有效位数的取法。

```
   5.34 8                    173.4
 × 20.5                  217)37643
 2674 0                    -217
 0000                      1594
+1069 6                   -1519
 109.6340                   753
                           -651
                            1020
```

在乘法运算的结果中，由于第三位“9”已经是存疑数，因此后面四个数字全部舍弃，结果是 110。在除法运算的结果中，由于第三位“3”已经是存疑数，因此第四位“4”以后的数没有必要再算下去，但存疑数后的一位数“4”必须算出，因为它要确定存疑数“3”是否要加 1。从以上两个例子中可以看到，两个量相乘（或除）的积（或商），其有效位数和诸因子中有效位数最少的那个数相同。这个结论可以推广到多个量相乘或相除的运算中去。

在做乘法运算时，如果某个因子的最高位有效数字等于 8 或 9，则这个因子的有效位数常可以多记一位。请看下例

```
    9.13
 ×23.14
   3652
   913
  2739
+1826
  211.26822
```

从计算的竖式中可以看出，乘法的结果应该有四位有效数字，因此可以认为“9.13”是四位有效数字。

以上这些结论，在一般情况下是成立的，但也有例外。读者只要掌握了有效数字的意义和存疑数字取舍的原则，是不难处理的。

(3)其他初等函数

在乘方、开方、对数、三角函数等初等函数的运算中，其运算结果的有效位数要通过误差计算来确定，因此这部分内容放在下一节中介绍。

（二）误差传递公式

在间接测量中，可以用误差传递公式由直接测量的值及其误差求出间接测量的值及其误差。

1．四则运算中的误差传递

设有 $A=\overline{A}\pm\triangle A$、$B=\overline{B}\pm\triangle B$、$C=\overline{C}\pm\triangle C$、……等直接测得量。又设 x 为间接测得量，那么它们之间满足一定的函数关系，即 $x=f(A，B，C，\cdots\cdots)$。将各直接测得量代入 $f(A，B，C，\cdots\cdots)$中，便可以求得$\overline{x}\pm\triangle x=f(\overline{A}\pm\triangle A，\overline{B}\pm\triangle B，\overline{C}\pm\triangle C，\cdots\cdots)$。

其中$\overline{x}=f(\overline{A}，\overline{B}，\overline{C}，\cdots\cdots)$是间接测得量的最佳值，$\triangle x$ 是间接测得量的误差。下面介绍在四则运算中怎样由$\overline{A}$、$\triangle A$、$\overline{B}$、$\triangle B$、$\overline{C}$、$\triangle C$、……

计算出△x。

(1)加法运算中的误差（和的误差）

设 x=A+B+C+……，

设$\bar{x}$±△x=($\bar{A}$±△A)+($\bar{B}$±△B)+($\bar{C}$±△C)+……

=$\bar{A}$+$\bar{B}$+$\bar{C}$+…±△A±△B±△C±……。

其中间接测得量的最佳值为$\bar{x}$=$\bar{A}$+$\bar{B}$+$\bar{C}$+……，绝对误差为△x=±△A±△B±△C±……。

由于 A、B、C、……各量都是互相独立的，它们的误差可能为正，也可能为负。在最不利的情况下（即所有误差项全都同号），可能出现的最大误差是△x=△A+△B+△C+……。我们规定这个可能的最大误差为间接测量的误差。

(2)减法运算中的误差（差的误差）

设 x=A－B－C－……，

则$\bar{x}$±△x=($\bar{A}$±△A)－($\bar{B}$±△B)－($\bar{C}$±△C)－……

=$\bar{A}$－$\bar{B}$－$\bar{C}$－……±△A±△B±△C±……。

其中间接测得量的最佳值为$\bar{x}$=$\bar{A}$－$\bar{B}$－$\bar{C}$－……，绝对误差为△x=±△A±△B±△C±……。按前面所讲，在最不利情况下，可能出现的最大误差是△x=△A+△B+△C+……。

由此可见，和、差运算结果的绝对误差等于各直接测得量的绝对误差之和。

(3)乘法运算中的误差（积的误差）

设 x=A×B，

则$\bar{x}$±△x=($\bar{A}$±△A)·($\bar{B}$±△B)·=$\bar{x}$·$\bar{B}$±$\bar{A}$·(±△B)+$\bar{B}$·(±△A)+(±△A)·(±△B)。

其中间接测得量的最佳值为$\bar{x}$=$\bar{A}$·$\bar{B}$，绝对误差为△x=$\bar{A}$·(±△B)+$\bar{B}$·(±△A)+(±△A)·(±△B)。

由于(±△A)·(±△B)为二级小量，可以忽略不计，因此△x=$\bar{A}$·(±△B)+$\bar{B}$·(±△A)。在最不利的情况下，可能出现的最大误差是△x=$\bar{A}$·△B+$\bar{B}$·△A。于是，间接测得量的相对误差为

$$E_x=\frac{\triangle x}{\bar{x}}=\frac{\bar{A}\cdot\triangle B+\bar{B}\cdot\triangle A}{\bar{A}\cdot\bar{B}}=\frac{\triangle A}{\bar{A}}+\frac{\triangle B}{\bar{B}}=E_A+E_B。$$

(4)除法运算中的误差（商的误差）

设$x=\frac{A}{B}$，则

$$\bar{x}\pm\triangle x=\frac{\bar{A}\pm\triangle A}{\bar{B}\pm\triangle B}=\frac{(\bar{A}\pm\triangle A)\cdot(\bar{B}\pm\triangle B)}{(\bar{B}\pm\triangle B)\cdot(\bar{B}\pm\triangle B)}$$

$$=\frac{\bar{A}\cdot\bar{B}\pm\bar{B}\cdot\triangle A\pm\bar{A}\cdot\triangle B\pm\triangle B\cdot\triangle A}{(\bar{B})^2-(\triangle B)^2}$$

$$=\frac{\bar{A}\cdot\bar{B}\pm\bar{B}\cdot\triangle A\pm\bar{A}\cdot\triangle B}{(\bar{B})^2}$$（忽略二级小量）

$$=\frac{\bar{A}}{\bar{B}}+\frac{\pm\bar{B}\cdot\triangle A\pm\bar{A}\cdot\triangle B}{(\bar{B})^2}。$$

其中间接测得量的最佳值为$\bar{x}=\frac{\bar{A}}{\bar{B}}$，绝对误差为$\triangle x=\frac{\pm\bar{B}\cdot\triangle A\pm\bar{A}\cdot\triangle B}{(\bar{B})^2}$。在最不利的情况下，可能出现的最大误差是$\triangle x=\frac{\bar{B}\cdot\triangle A+\bar{A}\cdot\triangle B}{(\bar{B})^2}$。于是，间接测量的相对误差为

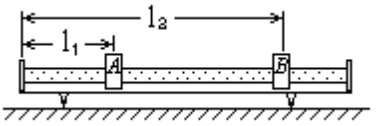
$$E_x=\frac{\triangle x}{\bar{x}}=\frac{\bar{B}\cdot\triangle A+\bar{A}\cdot\triangle B}{(\bar{B})^2}\cdot\frac{\bar{A}}{\bar{A}}=\frac{\triangle A}{\bar{A}}+\frac{\triangle B}{\bar{B}}=E_A+E_B。$$

由此可见，乘、除法运算结果的相对误差等于各直接测得量的相对误差之和。这个结论虽然是从两个因子乘除的运算中推导出来的，但可以推广到任意多个因子乘除的运算中去。

如果在各类运算中有的量是公认的理论值或测量值，那么可以不考虑它们的误差。

从上面推导的误差传递公式中可以看到：当间接测量的计算公式中只含有加减运算时，可直接计算间接测得量的绝对误差$\triangle x$；当间接测量的计算公式中只含乘除运算时，应先计算间接测得量的相对误差 E_x，然后再用$\triangle x=E_x\times\bar{x}$计算它的绝对误差比较方便。

例 1　图中 A、B 为气垫导轨上的两个光电门。它们的位置分别为$l_1=25.50\pm0.05$ 厘米，$l_2=78.80\pm0.05$ 厘米。求两个光电门之间的距离 s。



解：$\bar{s}\pm\triangle s=(\bar{l}_2\pm\triangle l_2)-(\bar{l}_1\pm\triangle l_1)$。

$\bar{s}=\bar{l}_2-\bar{l}_1$

=78.80 厘米－25.50 厘米

=53.30 厘米。

计算公式中只有加减运算，所以可以直接计算 s 的绝对误差

$\triangle s=\triangle l_2\pm\triangle l_1$

=0.05 厘米+0.05 厘米

=0.1 厘米

因此，最后的结果是

s=53.3±0.1 厘米。

误差一般只保留一位有效数字（至多两位），而且绝对误差的位数应该与最佳值中存疑数字的位数对齐。例 1 中的最佳值原来是 53.30 厘米。由于它的绝对误差是 0.1 厘米，因此最佳值中小数点后第一位上的“3”已经不可靠了,所以最后的最佳值只能是 53.3 厘米,而不再是 53.30 厘米。

例 2　测定长方体金属块的密度。长方体金属块长 a=4.572±0.004 厘米，宽 b=1.804±0.002 厘米，高 c=1.200±0.002 厘米，质量 m=88.4±0.1 克。

解：根据密度定义

$\rho = \frac{m}{V}$。

$\bar{\rho} \pm \triangle\rho = \frac{\bar{m} \pm \triangle m}{(\bar{a} \pm \triangle a) \times (\bar{b} \pm \triangle b) \times (\bar{c} \pm \triangle c)}$，

$\bar{\rho} = \frac{88.4}{4.752 \times 1.804 \times 1.200}$ 克 / 厘米^3

$= 8.932$克 / 厘米^3。

因为计算公式中只有乘除运算，所以先计算结果的相对误差 E_ρ。

$E_m = \frac{\triangle m}{\bar{m}} = \frac{0.1}{88.4} = 0.0011$；

$E_a = \frac{\triangle a}{\bar{a}} = \frac{0.004}{4.572} = 0.0009$；

$E_b = \frac{\triangle b}{\bar{b}} = \frac{0.002}{1.804} = 0.0011$；

$E_c = \frac{\triangle c}{\bar{c}} = \frac{0.002}{1.200} = 0.0017$；

$E_\rho = E_m + E_a + E_b + E_c$

$= 0.0011 + 0.0009 + 0.0011 + 0.0017$

$= 0.005$。

再计算结果的绝对误差

$\triangle\rho = \bar{\rho} \times E_\rho$

$= 8.932 \times 0.005$ 克/厘米^3

$= 0.05$ 克/厘米^3。

最后的结果是

$\rho = 8.93 \pm 0.05$ 克/厘米^3。

值得注意，上面推导的四则运算的误差传递公式，是在考虑各因子的误差同时出现最不利的情况时，即都取绝对值相加而得到的。实际上，出现这种情况的概率是不大的，而且参于运算的直接测得量越多，出现这种情况的概率就越小。因而用上述误差传递公式计算误差，在大多数时候都扩大了间接测量的误差。

2．误差传递的一般公式

上面用初等数学推导了四则运算中误差的传递公式，这些结论在实验中是很有用的。现在再从广义的角度来讨论误差传递的一般公式及其应用。

设有函数 $y=f(x_1, x_2, \cdots\cdots, x_n)$。

式中 y 由 $x_1, x_2, \cdots\cdots, x_n$ 所决定。令 $\triangle x_1, \triangle x_2, \cdots\cdots, \triangle x_n$ 分别表示 $x_1, x_2, \cdots\cdots, x_n$ 的绝对误差，$\triangle y$ 表示由 $\triangle x_1, \triangle x_2, \cdots\cdots, \triangle x_n$ 所引起的 y 的误差，则有

$y \pm \triangle y = f(\bar{x}_1 \pm \triangle x_1, \bar{x}_2 \pm \triangle x_2, \cdots\cdots, \bar{x}_n \pm \triangle x_n)$。

将上式右端按泰勒级数展开，得到

$f(\bar{x}_1 \pm \triangle x_1, \bar{x}_2 \pm \triangle x_2, \cdots\cdots, \bar{x}_n \pm \triangle x_n) = f(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \cdots\cdots, \bar{x}_n)$

$$\pm\triangle x_1\frac{\partial y}{\partial x_1}\pm\triangle x_2\frac{\partial y}{\partial x_2}\pm\cdots\cdots\pm\triangle x_n\frac{\partial y}{\partial x_n}$$

$$\pm\frac{1}{2}(\triangle x_1)^2\frac{\partial^2 y}{\partial x_1^2}\pm\cdots\cdots\pm\frac{1}{2}(\triangle x_n)^2\frac{\partial^2 y}{\partial x_n^2}$$

$$\pm 2\triangle x_1\cdot\triangle x_2\frac{\partial^2 y}{\partial x_1\cdot\partial x_2}\pm\cdots\cdots$$

$$\approx f(\bar{x}_1,\ \bar{x}_2,\ \cdots\cdots,\ \bar{x}_n)\pm\triangle x_1\frac{\partial y}{\partial x_1}\pm\triangle x_2\frac{\partial y}{\partial x_2}\pm\cdots\cdots\pm\triangle x_n\frac{\partial y}{\partial x_n}。$$

上式最后一步由略去了高阶小量而得到，其中 $f(\bar{x}_1,\ \bar{x}_2,\ \cdots\cdots,\ \bar{x}_n)$是 y 的最佳值，而

$$\triangle y=\pm\frac{\partial y}{\partial x_1}\cdot\triangle x_1\pm\frac{\partial y}{\partial x_2}\cdot\triangle x_2\pm\cdots\cdots\pm\frac{\partial y}{\partial x_n}\cdot\triangle x_n。$$

因为 x_1，x_2，……，x_n 都是独立的变量，它们的误差可能为正，也可能为负。在最不利的情况下（所有误差项全都同号），可能出现的最大误差是

$$\triangle y=\left|\frac{\partial y}{\partial x_1}\right|\cdot\triangle x_1+\left|\frac{\partial y}{\partial x_2}\right|\cdot\triangle x_2+\cdots\cdots\left|\frac{\partial y}{\partial x_n}\right|\cdot\triangle x_n。$$

我们规定这个可能出现的最大误差为 y 的误差。y 的相对误差

$$E_y=\frac{\triangle y}{y}=\left|\frac{\partial y}{\partial x_1}\right|\cdot\frac{\triangle x_1}{y}+\left|\frac{\partial y}{\partial x_2}\right|\cdot\frac{\triangle x_2}{y}+\cdots\cdots+\left|\frac{\partial y}{\partial x_n}\right|\cdot\frac{\triangle x_n}{y}。$$

以上推导的就是误差传递的一般公式，这个公式虽然是近似的，但在直接测量的量个数不多的情况下，是完全可以用的。

(1)从误差传递的一般公式可以很方便地推导出四则运算的误差传递公式

①和的误差

设 $y=x_1+x_2+\cdots\cdots+x_n$，

$$\triangle y=\left|\frac{\partial y}{\partial x_1}\right|\cdot\triangle x_1+\left|\frac{\partial y}{\partial x_2}\right|\cdot\triangle x_2+\cdots\cdots+\left|\frac{\partial y}{\partial x_n}\right|\cdot\triangle x_n。$$

$$=\triangle x_1+\triangle x_2+\cdots\cdots+\triangle x_n。$$

②差的误差

设 $y=x_1-x_2-\cdots\cdots-x_n$，

$$\triangle y=\left|\frac{\partial y}{\partial x_1}\right|\cdot\triangle x_1+\left|\frac{\partial y}{\partial x_2}\right|\cdot\triangle x_2+\cdots\cdots+\left|\frac{\partial y}{\partial x_n}\right|\cdot\triangle x_n。$$

$$=\triangle x_1+\triangle x_2+\cdots\cdots+\triangle x_n。$$

③积的误差

设 $y=x_1\times x_2\times\cdots\cdots\times x_n$，

$$E_y=\left|\frac{\partial y}{\partial x_1}\right|\cdot\frac{\triangle x_1}{y}+\left|\frac{\partial y}{\partial x_2}\right|\cdot\frac{\triangle x_2}{y}+\cdots\cdots+\left|\frac{\partial y}{\partial x_n}\right|\cdot\frac{\triangle x_n}{y}。$$

$$=\frac{x_2\cdot x_3\cdots\cdots x_n}{x_1\cdot x_2\cdots\cdots x_n}\cdot\triangle x_1+\frac{x_1x_3\cdots\cdots x_n}{x_1x_2\cdots\cdots x_n}\cdot\triangle x_2+\cdots\cdots+$$

$$\frac{x_1x_2\cdots\cdots x_{n-1}}{x_1x_2\cdots\cdots x_n}\cdot\triangle x_n$$

$$=\frac{\triangle x_1}{x_1}+\frac{\triangle x_2}{x_2}+\cdots\cdots+\frac{\triangle x_n}{x_n}$$

$$=E_{x1}+E_{x2}+\cdots\cdots+E_{xn}。$$

④商的误差

设$y=\dfrac{x_1}{x_2x_3\cdots\cdots x_n}$**，**

$$E_y=\left|\frac{\partial y}{\partial x_1}\right|\cdot\frac{\triangle x_1}{y}+\left|\frac{\partial y}{\partial x_2}\right|\cdot\frac{\triangle x_2}{y}+\cdots\cdots+\left|\frac{\partial y}{\partial x_n}\right|\cdot\frac{\triangle x_n}{y}。$$

$$=\frac{\dfrac{1}{x_2x_3\cdots\cdots x_n}}{\dfrac{x_1}{x_2x_3\cdots\cdots x_n}}\cdot\triangle x_1+\frac{\dfrac{x_1}{x_2^2x_3\cdots\cdots x_n}}{\dfrac{x_1}{x_2x_3\cdots\cdots x_n}}\cdot\triangle x_2+$$

$$\frac{\dfrac{x_1}{x_2x_3^2x_4\cdots\cdots x_n}}{\dfrac{x_1}{x_2x_3\cdots\cdots x_n}}\cdot\triangle x_3+\cdots\cdots+\frac{\dfrac{x_1}{x_2x_3\cdots\cdots x_n^2}}{\dfrac{x_1}{x_2x_3\cdots\cdots x_n}}\cdot\triangle x_n$$

$$=\frac{\triangle x_1}{x_1}+\frac{\triangle x_2}{x_2}+\frac{\triangle x_3}{x_3}+\cdots\cdots+\frac{\triangle x_n}{x_n}$$

$$=E_{x1}+E_{x2}+E_{x3}+\cdots\cdots+E_{xn}。$$

(2)用误差传递的一般公式推导其他初等函数的误差传递公式

①乘方

设 $y=x^n$**，**

$$E_y=\left|\frac{dy}{dx}\right|\cdot\frac{\triangle x}{y}$$

$$=n\cdot x^{n-1}\cdot\frac{\triangle x}{x^n}$$

$$=n\cdot\frac{\triangle x}{x}$$

$$=n\cdot E_x。$$

例 1　已知 $y=x^3$**，**$x=47.3\pm0.1$**，**

求：y**。**

解：$E_x=\dfrac{\triangle x}{\bar{x}}=\dfrac{0.1}{47.3}=0.0021$**，**

$Ey=3\times Ex=3\times0.0021=0.0063$**，**

需要全本请访问 www.ertongbook.com