

摇图书在版编目(CIP)数据

摇逻辑探索方法 张乃达 陈士龙编著 鄞—郑州 :大象

出版社 圆国原怨

摇(中学数学思维方法丛书 张梓坤 张乃达主编)

摇 圆国原怨 圆国原怨 圆国原怨 圆国原怨

摇 I 援逻辑摇 II 援①张援②陈援 III 援数学课—中学—

教学参考资料摇 IV 援 圆国原怨 圆国原怨

摇中国版本图书馆 CIP 数据核字(圆国原)第 圆国原号

责任编辑摇马摇莹

责任校对摇王摇森摇郭一凡

封面设计摇王翠云

出摇摇版摇大象出版社(郑州市经七路 圆国原号摇邮政编码 圆国原)

网摇摇址摇憎憎憎 圆国原 圆国原

发摇摇行摇河南省新华书店

制摇摇版摇

印摇摇刷摇

版摇摇次摇圆国原年摇月第 员版摇圆国原年摇月第 员次印刷

开摇摇本摇摇摇摇摇摇摇员 圆国原

印摇摇张摇

字摇摇数摇摇摇千字

印摇摇数摇

定摇摇价摇

目摇摇录

一、问题与探索活动	(员)
员 问题开始	(员)
摇(员) 爱因斯坦的问题	(圆)
摇(圆) 苏菲的困惑	(愿)
摇(猿) 费尔马大定理	(员源)
摇(源) 希尔伯特的报告	(圆猿)
圆 提出问题 and 解决问题	(圆缘)
摇(员) 问题	(圆兀)
摇(圆) 问题的来源	(圆愿)
摇(猿) 提出问题的方法	(猿猿)
摇(源) 解决问题	(猿源)
二、探索活动的思维模式	(源兀)
员 探索活动的尝试性	(源兀)
摇(员) 猜测—验证—调整	(源兀)
摇(圆) 例子 : 四边形面积公式的发现	(源苑)

圆探索活动中的逻辑与直觉	(缘)
摇(员)逻辑思维和直觉思维	(缘)
摇(圆)例子 数学家的探索活动——四 元数的发现	(缘)
猿探索活动中的思维模式	(远)
摇(员)归纳—演绎模式	(远)
摇(圆)假说—演绎模式	(远)
摇(猿)合情推理模式	(远)
摇(源)试错模式	(愿)
摇(缘)探索性演绎模式	(愿)
三、逻辑探索方法	(怨)
员基本的思维方法	(怨)
摇(员)观察与实验	(怨)
摇(圆)归纳	(员)
摇(猿)类比	(员)
摇(源)演绎	(员)
圆综合法和分析法	(员)
摇(员)综合法和分析法	(员)
摇(圆)定向分析法	(员)
摇(猿)探索性演绎法	(员)
四、探索活动的监控	(员)
员探求解题思路的策略	(员)
摇(员)弄清问题	(员)
摇(圆)变换问题	(员)
圆解题过程的控制与调节	(员)
摇(员)思维方向的确定	(员)

猿(圆)思维策略的调整与控制	(猿猿)
猿(猿)例子 教学背景下的探索活动	(猿猿)
主要参考书目	(猿猿)

摇摇序

摇摇早在 员怨怨年 愿月 ,大象出版社(原河南教育出版社)在扬州举办了一个座谈会 ,邀请十余位教学水平很高的数学教师参加 ,商讨出版一套“中学数学思维方法丛书”。与会同仁认为 ,这是一个富有创见的倡议 ,因而得到大家热烈赞许。提供一套既有较深厚的理论基础 ,又富有文采和启发性、可读性的关于数学思维的参考书 ,对中学数学教学 ,无疑会是非常有益的 ;而更主要的是 ,广大的中学生将在形象思维、逻辑推理和严密计算等方面 ,学到很多东西。将来无论做什么工作 ,都会受益无穷。

回想我们青少年时期学习数学的情景 ,总会有几分乐趣几分惊异。做出了几道难题是乐趣 ,而惊异则来自方法的进步。记得小学算鸡兔同笼 ,必须东拼西凑 ,多一只兔便比鸡多了两条腿 ,好不容易才能做出一题。而学过代数 ,这类问题便变得极为简单。做几何题也一样 ,必须具体问题具体解决 ,而学过解析几何后便有了一般的

程序可循。至于算圆的面积,如果不用积分便会相当麻烦。由此可见,方法的进步对科学的发展是何等重要。以上是对学习现成的东西而言。如果要进行科研,从事创新、发现或发明,那就更应重视方法,特别是思维方法。没有新思想,没有新方法,要超过前人是很难的。有鉴于此,一些优秀的数学家便谆谆告诫学生们,要非常重视学习方法和研究方法。美国著名数学家~~刚毅~~刚毅~~刚毅~~写过好几种关于数学思想方法的书,如《怎样解题》、《数学的发现》、《数学与猜想》,后来都成为世界名著,很受欢迎。

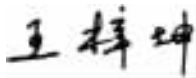
学习任何一门科学,都有掌握知识和培养能力两方面。一般说来,前者比较容易。因为知识已经成熟,而且大都已经过前人整理,成为循序渐进的教材。但能力则不然,那是捉摸不定、视之无形的东西,主要靠自己去思考,去探索,去总结,去刻苦锻炼。老师的培养固然重要,但只能起辅导作用。只可意会,不可言传,而有时甚至连意会都做不到。正如游泳,只靠言传是绝对学不会的。这是对受业人而说的。

至于老师,则应无保留地传授自己的经验和体会,尽量缩短学生学习的时间。中国有句古诗:“鸳鸯绣出凭君看,不把金针度与人。”意思是说知识可以输出,但能力不可传授。前一句话意思很好,后一句应改为“急把金针度与人”。这套丛书,正是专门传授金针的。

一般的科学研究方法,可分为演绎与归纳两大类。在数学中,演绎极为重要,而归纳则基本上用不上,除了~~悦~~悦~~悦~~等人偶尔通过观察数列以提出一些数论中的猜想而外。不过自从计算机发明后,这种情况已大为改

观。混沌学主要靠计算机而发展起来,数学模拟也主要靠计算机。再者,以往数学中极少实验,还是由于计算机的广泛使用,现在不少数学系已有了实验室,特别是统计实验室。可以期望,计算机对改变数学的面貌,对改善数学的思维方法,都会起到越来越大的作用。

在此之前,我国已经出版了几本关于数学方法的书,它们都各有特色。如就规模之大,选题之广,论述之精而言,这套丛书也许是盛况空前、蔚为大观的。我们希望它在振兴我国的科学事业和培养数学人才中,能起到令人鼓舞的作用。

A handwritten signature in black ink, reading '王样坤' (Wang Yankun), enclosed in a thin white rectangular border.

中学数学思维方法丛书

主 编 王梓坤 张乃达

编 委 (以姓氏笔画为序)

王梓坤 过伯祥 杨世明

张乃达 蒋声

本册作者 张乃达 陈士龙

引摇摇言

摇摇你听过“空城计”的故事吗？

那是《三国演义》中的一个惊心动魄、流芳千古的故事援

相传三国时代，蜀国丞相兼军师诸葛亮带兵阳平（今西阳平关）时，派大将魏延领兵去攻打魏国，只留少数老弱军士守城，不料魏国大都督司马懿率大队人马杀来，如果靠几个老弱军士出城应战，只能是以卵击石，怎么办？

诸葛亮经过紧张而又冷静地思考之后，想出了一条妙计援他传令大开城门，让老弱军士在城门口洒扫道路，自己则登上城楼，摆好香案，端坐弹琴，态度从容，琴声优雅援

司马懿来到城前，见此情景，顿生疑惑，他想：诸葛亮一生精明过人，谨慎有余，从不冒险援今天如此这般，与其一生表现矛盾，恐怕城内必有伏兵，故意诱我入城，决不能中计也！

于是，急命退兵援

人们无不赞叹运筹帷幄、智慧超群的诸葛亮！

又如火烧赤壁一仗，基本策略不过是诸葛亮和周瑜掌心里写的那一个“火”字援围绕着“火”，展开了草舟借箭、群英会、连环计、

苦肉计、“借”东风，火烧赤壁、华容道等一连串的激烈的斗智斗勇，打败了曹操的几十万大军，取得了战役的最后胜利。

人们又情不自禁地赞颂冲锋陷阵、英勇无比的关羽、张飞、赵子龙等将士。

如果把数学解题比作打仗，为了攻克一个又一个数学堡垒，那么我们自己不但要扮演勇猛无比的将士，还要扮演足智多谋的诸葛亮。在数学解题的思维活动中，我们的“将士”就是数学基础知识，我们的“兵器”就是数学基本方法，而调动数学基础知识、动用数学基本方法的数学思维方法就是我们的用兵之法。

引以自豪的是，我们的中学生竟然和数学家一样，天天都在解数学题，在进行着数学思维活动。这种实实在在、富有情趣的思维活动为我们提供了既需运筹帷幄又要冲锋陷阵的实践机会，这种扣人心弦、扑朔迷离的思维活动激荡着我们思维的琴弦，增长着我们的才干。

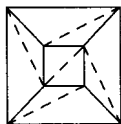
但是我们自己要扮演好二重角色并不是简单的事情。我们自己既是指挥者，又是战斗者，更重要的是要对自己的思维活动的目的、思维的方式和方法、思维的进程、思维的途径随时进行评价，自己既是评价者，又是第三个角色的扮演者。

也就是说，假如你在足球比赛场上，你应该既是运动员，又是教练员，还是评论员。

如果真是这样，你的足球水平就会大大提高的。

好有一比：在数学思维活动中，我们好像在明月当空的夜晚，独自一人坐在石凳上，伏着石桌，斟满杯中酒，举杯畅饮，让月光尽情地照耀着自己的身影，这正是

举杯邀明月，对影成三人。



摇

一、问题与探索活动

从问题开始

探索活动是怎样开始的？

直到今天，仍然还有很多人认为探索活动是从观察开始的。溯溯起来，这种似是而非的观点已经存在很长的时期了。

早在古希腊时期，亚里士多德就提出了一个关于科学发现程序的模式，他认为：发现活动是从观察个别事实开始，然后归纳出解释性的原理，再从解释性的原理演绎到个别事实的。按照这个程序，科学的发现活动只能起源于观察。后来以培根为代表的古典归纳主义学派，片面地夸大了归纳的发现作用，进一步地强化和突出了“科学发现始于观察”的观点，以致在很长的一个时期内，使其成为科学认识论中的主导观点。

可是，随着科学的发展，事情也就变得愈来愈清楚：科学理论并非总是简单地直接从经验事实中归纳出来的，科学发现的过程是一个不断地提出问题和解决问题的过程，进而形成了“科学探

索活动始于问题”的观点，并取得了科学家的认同，成为科学界的共识。

（员）爱因斯坦的问题

爱因斯坦是历史上最伟大的物理学家之一，可以毫不夸张地说：他是改变了人类宇宙观的科学巨人。因此，他的论述和经历，对于科学探索活动的研究应该是最具权威也最有说服力的。现在我们就从他的发现历程中撷取一些片断来寻求启发吧！

员缘年 员月 远日的观测

员缘年 员月 远日的下午对现代物理学来说，是一个具有划时代意义的日子。许多人聚集在伦敦古老的皇家学会总部那间富丽堂皇的会议厅内，欧洲最重要的物理学家和天文学家都到场了。他们认真倾听着两位资深的同行——克罗姆林博士和埃丁顿教授描述他们的最新研究成果：他们在巴西和西非海岸天文台观察到了似乎是不可能发生的现象！

克罗姆林和埃丁顿利用日食拍摄了某些星星的照片。拍摄过程非常顺利，可是，奇怪的事情还是发生了！当他们检查天文台所拍摄的照片时，发现那些星星并没有出现在应有的位置上，相反，它们似乎突然跳到边上去了。当然这种情况是不可能的，但是——有照片作证——它的确发生了！

员缘年 员月 远日的观测

当时，对于克罗姆林和埃丁顿的观测结果，可能只有阿尔伯特·爱因斯坦一人不觉得惊讶——他反而感到高兴和解脱。

原来早在 员缘年，爱因斯坦已经预料到会有这种看起来不可能的结果。更准确地说，他预测出从遥远星球射出的光线在经过太阳时会发生弯曲，这就导致地球上的观察者感到那些星星好像移

动了位置。他还甚至还估计出光线的弯曲程度，以及那些星星位置偏离的程度。实际上，克罗姆林和埃丁顿的观测就是根据爱因斯坦的预测进行的。

这就是说，爱因斯坦的思维走在观察的前面，爱因斯坦在进行观察之前就探索到了结果，爱因斯坦的发现并不是从观察开始的！

爱因斯坦的预测是根据他从1905年以来一直从事研究的理论，即“广义相对论”作出的。

光是怎样行进的？人们（包括其他的物理学家）通常认为，光在空间中始终是沿直线行进的，从其源头直接到达观察者的眼睛。

但是爱因斯坦认为，光并非严格按照直线行进。他认为光线在任意两点之间是以尽可能最短的路线穿过空间（和时间）的。

在正常情况下，直线就是最短的路线，这时爱因斯坦的结论是和传统的理论以及人们的生活经验相符合的。

然而事情并非永远如此！爱因斯坦预测，从其他星球射来的光线在经过太阳附近时会发生弯曲！尽管这是和我们的经验相悖的，但是这样的事实还是摆在了人们的眼前！

面对着这样的事实，人们当然要问：光线为什么会沿着一条弯曲的路径行进呢？它为什么会发生弯曲？

爱因斯坦的理论对这些问题作出了解答。他指出，由于光线（它必须以可能的最短路径行进）是沿着一条弯曲的路径行进的，因此在这种情况下，空间本身必定也是弯曲的。这完全是一种新的创见，难以想像——像宇宙空间这样广大和毫无形状的事物是如何弯曲的？

这又是一个大胆的预言，它又一次远远地走在观察的前面！你能观察到弯曲的空间吗？

在爱因斯坦以前，科学家们普遍相信空间是平坦的。他们还认

源

为每个物体都会对周围的所有物体产生一种力，它被称为引力。比如，人们认为把较小的地球“拉”向太阳的正是它的引力。这种引力作用的结果是地球沿着一条弯曲的轨道围绕太阳运行。

可是，爱因斯坦认为，这并不是对实际发生情况的一种准确解释。爱因斯坦认为引力并不是地球（物体）在空间移动的原因；真正的原因是宇宙中物质和能量的集合体（如太阳）造成了空间的弯曲。而引力效应（比如地球围绕太阳运转）并不是直接由一个物体的质量把另一个物体拉向自己所形成的。相反，地球围绕太阳运转是沿着一条尽可能直的路径穿过弯曲的空间，如同那些星球射来的光线一样。

探索从问题开始

那么，爱因斯坦是如何得出这些结论的呢？特别地，爱因斯坦是从什么地方开始他的探索活动的呢？

爱因斯坦的探索活动是不是由观察到了一个新的现象，抑或是从一项新实验的结果引发的呢？

——不是！引起爱因斯坦对“引力疑难”的思考的并不是观察到了什么新的事实，而是出于解答新的疑难问题！

爱因斯坦关于引力问题的思考，一直可以追溯到他的中学时代。

爱因斯坦从12岁读中学时起，就开始思考两个超出常人想像力的问题：

其一，如果有人跟着光线跑，并努力赶上它，那么，这个人将看到些什么现象呢？

其二，如果把一个人关在一架自由下降的升降机内，他将看到什么呢？

后来人们把这两个问题分别称为“追光实验”和“升降机理想

实验”援爱因斯坦经过 10 年的思考和研究 ,终于找到了第一个问题的答案 ,创立了狭义相对论援这一研究成果于 1905 年公之于世援此后 ,爱因斯坦又锲而不舍地对第二个问题进行深入思考、反复探索 ,费时 10 年 ,于 1915 年进一步建立了广义相对论援

所以可以说 ,爱因斯坦关于相对论的探索工作就是从这两个问题开始的援

这又一次证明了 科学发现活动可以从问题开始援

源援迈克尔孙—莫雷实验

我们说 ,爱因斯坦的探索活动是从问题开始的 ,这并不是要全盘否定观察和实验在科学探索活动中的作用 相反 ,我们认为 ,观察和实验是科学发现的重要方法 ,它们在科学的发现活动中是不可替代的援这同样体现在爱因斯坦的探索活动之中援作为一个例子 ,我们可以分析一下迈克尔孙—莫雷实验对爱因斯坦发现狭义相对论的影响援

1887 年 ,也就是爱因斯坦 12 岁时 ,有两位美国科学家莫雷和迈克尔孙设计了一个实验 ,尝试测量光在真空中的速度援

1871 年 ,麦克斯韦提出了关于光的传播的完整理论援麦克斯韦认为光应当以一种固定的速度 ,并借助“以太”(这是一种看不见的物质)所产生的波传播 ,并用它解释了当时观测到的一系列物理现象 ,但是由于麦克斯韦没有能证明上述结论 ,因此 ,它只能是一种假说援

莫雷和迈克尔孙的实验是建立在麦克斯韦以太理论的基础上的援根据麦克斯韦的理论 ,如果以太的确存在 ,那么地球穿越以太运动时就会产生一股“以太风” ,使得当光线与地球以相同的方向穿过以太时的速度比较快 ,而当光线与地球朝相反方向穿过以太时的速度较慢援因此 ,只要能精确地测量出光线在不同方向穿过以

远

太时的速度 ,就可以计算出光线在真空中的速度了援

莫雷和迈克尔孙设计了一个巧妙的装置 ,精确地进行了测量 ,可是却得到了出乎意料的结果 ! 他们发现无论光线是顺着还是逆着地球运动的方向传播 ,也不管发射光束的物体是否在运动 ,其行进速度都是相同的援

原来 ,光速是不变的 !

——可是 ,这似乎是有悖于常理的 ! 因为它显然和运动学中的相对性原理相矛盾援

缘遥爱因斯坦的答案

灵圆缘年 远月 ,爱因斯坦发表了论文《论动体的电动力学》(这是关于相对论的第一篇论文) ,对迈克尔孙—莫雷实验的奇怪结果作出了自己的解释援

文章的第一句话就是 :

大家知道麦克斯韦电动力学应用到运动物体上 ,就要引起一些不对称 ,而这种不对称似乎不是现象所固有的援

爱因斯坦相信 ,力学和电磁学是统一的 ,在力学定律成立的任何参照系中 ,电动力学的定律也应该适用援他的这些思想集中地反映在他所提出的狭义相对论的两条基本原理上援这两条原理是 :

灵圆相对性原理 物理学定律在所有惯性系中是相同的 ,不存在一种特殊的惯性系援

圆缘光速不变原理 在所有的惯性系内 ,真空中光的速度具有相同的值援

可是 ,怎样才能解释这两项原理之间的“不对称”呢 ? 爱因斯坦认为关键在于时间的概念援他认为牛顿的“绝对时间”的概念是可疑的 !

远遥观察与问题

为了进一步弄清迈克尔孙—莫雷实验对爱因斯坦工作的影响,我们来听听爱因斯坦自己的陈述援

当迈克尔孙的实验结果紧紧地吸引着许多人的时候,爱因斯坦却默默地从事着其他的研究援他后来说:

在我自己的(思想)发展过程中,迈克尔孙的结果对我没有产生多大影响,我甚至记不清,当我写有关这个题目的第一篇论文的时候,究竟是否知道它援

我坚信绝对运动是不存在的,而我所思考的问题只是这种情况如何能同电动力学的知识相一致援因此人们可以理解,为什么在我本人的努力中,迈克尔孙的实验没有起到什么作用,至少是没有起到绝对作用援

但是,爱因斯坦并没有因此否定实验的作用,相反地,他给予实验以很高的评价援他说:

迈克尔孙的工作是对科学的不朽贡献,它的伟大之处在于运用巧妙的方法达到了测量所要求的很高精度,同样也在于对问题的大胆而清晰的表述援对于不存在绝对运动,因而对于狭义相对性原理,都是一个新的有力证据援而相对性原理,自牛顿以来,在力学中从来就没有被人怀疑过,但它同电动力学似乎不相容援

在爱因斯坦看来,他们工作的意义在于向物理学家们提出了一个得到“清晰表述”的“大胆”的问题,从而使人们产生了对牛顿的绝对时空观的怀疑援

由此可见,观察和实验的作用集中地体现在能提出问题援

例如,迈克尔孙—莫雷实验的目的就是为了测量真空中的光速,而测量光速的目的又在于验证麦克斯韦的以太理论;尽管实验的结果出乎实验者的意料,没有达到预期的目的,但是它却向人们