中学数学思维方法丛书

主摇摇编摇王梓坤摇张乃达

编摇摇委摇(以姓氏笔画为序)

王梓坤摇过伯祥摇杨世明

张乃达摇蒋摇声

本册作者摇张乃达

摇摇序

摇摇早在 员怨怨缘年 愿月，大象出版社（原河南教育出版社）在扬州举办了一个座谈会，邀请十余位教学水平很高的数学教师参加，商讨出版一套“中学数学思维方法丛书”。与会同仁认为，这是一个富有创见的倡议，因而得到大家热烈赞许。提供一套既有较深厚的理论基础，又富有文采和启发性、可读性的关于数学思维的参考书，对中学数学教学，无疑会是非常有益的；而更主要的，广大的中学生们，将在形象思维、逻辑推理和严密计算等方面，学到很多的东西。这对将来无论做什么工作，都会受益无穷。

回想我们青少年时期学习数学的情景，总会有几分乐趣几分惊异。做出了几道难题是乐趣，而惊异则来自方法的进步。记得小学算鸡兔同笼，必须东拼西凑，多一只兔便比鸡多了两条腿，好不容易才能做出一题。而学过代数，这类问题便变得极为简单。做几何题也一样，必须具体问题具体解决，而学过解析几何后便有了一般的

程序可循。至于算圆的面积，如果不用积分便会相当麻烦。由此可见，方法的进步对科学的发展是何等重要。以上是对学习现成的东西而言。如果要进行科研，从事创新、发现或发明，那就更应重视方法，特别是思维方法。没有新思想，没有新方法，要超过前人是很困难的。有鉴于此，一些优秀的数学家便谆谆告诫学生们，要非常重视学习方法和研究方法。美国著名数学家 [illegible]写过好几种关于数学思想方法的书，如《怎样解题》、《数学的发现》、《数学与猜想》，后来都成为世界名著，很受欢迎。

学习任何一门科学，都有掌握知识和培养能力两方面。一般说来，前者比较容易。因为知识已经成熟，而且大都已经过前人整理，成为循序渐进的教材。但能力则不然，那是捉摸不定、视之无形的东西，主要靠自己去思考，去探索，去总结，去刻苦锻炼。老师的培养固然重要，但只能起辅导作用。只可意会，不可言传，而有时甚至连意会都做不到。正如游泳，只靠言传是绝对学不会的。这是对受业人而说的。

至于老师，则应无保留地传授自己的经验和体会，尽量缩短学生学习的时间。中国有句古诗："鸳鸯绣出凭君看，不把金针度与人。"意思是说知识可以输出，但能力不可传授。前一句话意思很好，后一句应改为"急把金针度与人"。这套丛书，正是专门传授金针的。

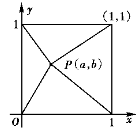
一般的科学研究方法，可分为演绎与归纳两大类。在数学中，演绎极为重要，而归纳则基本上用不上，除了[illegible]等人偶尔通过观察数列以提出一些数论中的猜想而外。不过自从计算机发明后，这种情况已大为改

观。混沌学主要靠计算机而发展起来，数学模拟也主要靠计算机。再者，以往数学中极少实验，还是由于计算机的广泛使用，现在不少数学系已有了实验室，特别是统计实验室。可以期望，计算机对改变数学的面貌，对改善数学的思维方法，都会起到越来越大的作用。

在此之前，我国已经出版了几本关于数学方法的书，它们都各有特色。如就规模之大，选题之广，论述之精而言，这套丛书也许是盛况空前、蔚为大观的。我们希望它在振兴我国的科学事业和培养数学人才中，将会起到令人鼓舞的作用。

王梓坤

目摇摇录



一、观念与思维活动

摇摇员援无所不在的观念

在本丛书的《抽象与模式》一册中，我们曾经就观念对思维活动的影响做了初步的讨论援在本书中，我们将就这个重要的问题进行更深入的探讨援

在《抽象与模式》中，谈到观念对抽象活动的影响时，有如下的论述：

摇摇尽管并不是每一个人都察觉到了观念对抽象活动的影响，但是观念对抽象活动的影响却是存在的，在很多时候甚至是决定性的援

观念对抽象的影响首先表现为思维者是不是具有抽象的意识，是不是想抽象援

其次，观念的影响表现为应该如何评价抽象的结果，对抽象的结果是接受，还是摒弃援

还有，应该怎样调控抽象的过程？抽象的方向对不对？

有没有价值？抽象的方法对不对？要不要进行调整？

可以说,观念对抽象活动的影响贯穿于思维活动的全过程援

尽管那时主要是就作为思维活动的一个环节——抽象来看观念的影响的,但还是应该说,上面的结论是具有一般性的援观念对思维活动的影响不仅是无所不在的,而且往往是决定性的援

在本章中我们的讨论就从考察观念对思维活动的影响开始援

(员) 非欧几何发现的背后

非欧几何的发现是数学史上具有划时代意义的一件大事,它从根本上改变了人们对数学的性质及其与物质世界关系的理解,打破了圆园园园多年的形而上学的时空观,导致了哲学和自然科学中若干重要观念的变更,不仅对数学,而且对哲学和自然科学的发展产生了深远的影响援

非欧几何发现的历史就是一本内容无比丰富的教科书,从中我们可以得到巨大的教益援因此,在讨论观念与思维活动的关系时,我们再一次把目光聚焦于非欧几何的发现史援

我们的讨论将集中于两个方面:第一,观念是如何影响非欧几何的发现活动的？第二,非欧几何的发现对人们的观念产生了什么样的影响？在本章中,我们主要研究第一个问题,而把第二个问题放在第三章中研究援

员援问题是怎样提出来的

提出问题是思维活动中最重要也是最有价值的环节,在具体的思维活动中,我们有很多种提出问题的方法援在这里我们想着重指出的是:在所有提出问题的方法后面,都可以看到观念的作用援

在考察非欧几何发现的历史时,首先要弄清的问题就是非欧

几何这个研究课题是怎样提出来的援

众所周知,非欧几何发现的历程是从怀疑欧几里得的第五公设开始的,这可以上溯到公元前 猿园园年左右援

现在的问题是:人们为什么要怀疑第五公设呢?

——这是因为第五公设太复杂了,不简单援

那么,为什么不简单就值得怀疑呢?

答:因为人们认为公设应该是不证自明的真命题,应该是简单的援不简单就难以做到不证自明援

问:人们是怀疑第五公设的正确性吗?

答:不,人们主要是怀疑第五公设的独立性援

问:什么叫做公设的独立性呢?

答:公设的独立性就是要求每一条公理都不能由其他公设推出,都不是其余公设的逻辑推论援

问:为什么要对公设提出独立性的要求呢?

答:这是为了使公设的数目尽可能地少援

问:为什么要使公设尽可能少呢?

答:在欧氏几何中,公设是推证定理的基础,是建立演绎数学知识体系不得不选取的真命题援为了最大限度地保证演绎系统的可靠性,欧几里得主张尽量减少公设的数目援

创立公理化方法的亚里士多德曾经认为作为演绎出发点的公理“在数目上比结论少不了多少”援但在《几何原本》中,欧几里得却从 缘条公设、圆猿个定义和 缘条公理,推出了 源远缘条定理援严格控制了公设(公理)的数目,这不仅增加了整个系统的可靠性,而且更清晰地揭示出数学命题间的逻辑关系,表现出强烈的美感(逻辑美)援

因此可以说,首先是强烈的求真意识,然后是一种对美(简

单) 的追求,才使人们对公设提出了独立性的要求援

问 :除了第五公设形式上不简单以外,有没有其他的因素促使数学家产生对第五公设的怀疑呢?

答 :应该说,欧几里得对第五公设的态度也是引起数学家怀疑的原因之一援

问 :欧几里得对第五公设采取了什么样的态度呢?

答 :欧几里得好像对第五公设心怀疑虑,他一直避免使用第五公设援在证明前 圆愿个命题时,欧几里得都回避了使用第五公设,只有在证明第 圆怨个命题时,使用了一次,这也是《几何原本》中使用第五公设的惟一一次援这说明欧几里得本人是第一个怀疑第五公设的人援

问 :既然连欧几里得本人都怀疑第五公设了,在其他的数学家看来,它当然值得怀疑了援那么,第五公设究竟复杂在何处呢?

答 :第五公设是这样说的 :若两直线和第三直线相交且在同一侧所形成的两个同侧内角之和小于两直角,则两直线无限延长后必相交于该侧的一点援

由于命题中涉及到“无限”,而在当时的希腊数学家看来,无限都是意义不清晰,很容易惹麻烦的事,所以总是抱着“敬而远之”,能不用就不用的态度援

问 :可是欧几里得还是把它选为公设了,这是为什么呢?

答 :首先,欧几里得认为尽管这个命题不能用其他的 源个公设证得,但是它却是正确的 ;其次,欧几里得认为它又是不可或缺的,因为没有它,有很多重要的定理都证不出来援

问 :这么说,尽管没有演绎证明,欧几里得已经坚信第五公设以及由它推出的一系列定理的正确性了呢?

答 :可以说,确实是这样援

问 :那么欧几里得凭什么相信它们的正确性呢？

答 :凭直观和经验——包括由第五公设推出的一系列命题和生活经验的高度吻合都使欧几里得确信第五公设的正确援

问 :这是不是说,尽管希腊数学家坚持对数学命题进行演绎证明的要求,但是他们仍然把某些命题（如公理）看成是先验的,天生正确的？

答 :确实如此援因为在他们看来,公设就是被长期实践证明了的命题,是用归纳的方法得到的援

通过上面的思考,我们可以清晰地看到,在数学家对第五公设发生怀疑的后面,潜藏着如下的观念：

①审美意识——简单的才是美的,才是更值得相信的；

②求真意识——公设数目愈少,愈能保证系统的正确性；

③认为公设是先验的,其正确性已被实践证明,是可以用归纳的方法得到的援

以上的观念对整个第五公设的研究产生了极其重大的影响援

圆逻辑错误是怎样产生的

①萨凯利的错误

萨凯利是第一个企图用反证法证明第五公设的数学家援他用一个与第五公设矛盾的命题代替它,把它和其他的公设放到一起进行推理,希望推出矛盾,从而从反面证明第五公设的正确援按照上面的想法,萨凯利推出了一系列的命题,这些命题和欧氏几何中的结论完全不同——后来知道,这些命题实质上就是非欧几何中的定理——可是,萨凯利并没有承认它们,他认为,他推出的都是谬误,于是他宣布 :他证明了第五公设援

这样,萨凯利就犯了逻辑错误,尽管他推出的许多结论都和我们熟知的事实不符,但是没有产生逻辑上的矛盾,因此,并不能说

这些结论肯定是错误的援

现在要问的是,萨凯利的逻辑错误是怎样产生的呢?

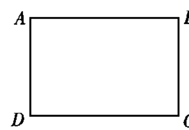
——为了说明这一点,我们可以具体地看看萨凯利证明第五公设的过程援

摇摇萨凯利研究了一个四边形 粤月悦阅,其中 粤阅越月悦,并且 粤阅、月悦同时垂直于 粤月(后来,这样的四边形被称为萨凯利四边形)援首先,萨凯利证明了∠悦越∠阅,它们的大小只有三种可能:

员 ∠悦越∠阅跃怨园毅(钝角假设);

圆 ∠悦越∠阅约怨园毅(锐角假设);

猿 ∠悦越∠阅越怨园毅(直角假设)援



摇图 员

萨凯利证明了第五公设与直角假设是等价的,因此,只要能用归谬法证明在钝角和锐角假设下导致矛盾,就可以肯定只有直角假设成立,就可以证出第五公设了援

在排除钝角假设的过程中,萨凯利没有遇到麻烦,但是在排除锐角假设的过程中却不是那么顺利援萨凯利证明了一个又一个的结论,但并没有发现他希望得到的矛盾援最后,他推得:“在无穷远点相交的直线必在无穷远点处有一公垂线援”这时,萨凯利认为这个结论“与直线的本质抵触”,于是他断言“锐角假设绝对是假的”,并宣称他证明了第五公设援

可是,直线的本质是什么呢?为什么“在无穷远点相交的直线必在无穷远点处有一公垂线”就和“直线的本质”相“抵触”了呢?所有这些都没有说清楚援

萨凯利的错误在于把有限图形的性质扩大到无限图形,以为在有限远处不成立的东西,在无限远处也不成立援

事实上，正如克吕格尔（灵苑远缘年）指出的：萨凯利并没有得到逻辑上的矛盾，只是同常识、经验、情理相矛盾；是和欧氏几何中相应命题的矛盾援他在不知不觉之中把生活中的经验和欧氏几何（而它们正是由值得怀疑的第五公设推出的）当成了判定是非的依据，而这一点显然是和逻辑推理的规则相违背的援

②勒让德重蹈覆辙

在非欧几何的发现历史中，犯有类似逻辑错误的数学家大有人在援法国数学家勒让德就是其中有代表性的一个援

在对平行公设的证明中，勒让德大概称得上是一个最为不倦的探索者，他对这个问题的研究持续了源园年援他希望从欧几里得的其他九个公理（公设）推出一个逻辑上与第五公设等价的命题援他首先尝试证明存在两个相似但不全等的三角形，然后又尝试证明过不共线的三点可作一个圆，但都没有成功援勒让德并没有放弃努力，终于在灵苑愿源年出版了《几何学基础》一书，其中，他激动地宣称证明了平行公设援

和前人一样，勒让德想从三角形内角和来解决这个难题援勒让德证明了平行公设与“三角形内角和等于灵愿园毅”是等价的援接着又用归谬法证明了“三角形内角和只能等于灵愿园毅”，这样就可以推出平行公设援

可是，他的证明是错误的援因为在证明中，他用了一个假设：若从角的内部的一点引一条直线，则一定与角的两边相交援这个假设并没有经过证明，因此，勒让德并没有证出第五公设，而只是找到了一个与第五公设等价的命题援这样，勒让德还是失败了，不过他自己永远不知道，他一直认为这个千古难题已被他彻底解决了援

③在逻辑错误的背后

萨凯利、勒让德犯了逻辑错误，这难道是应该的吗？

愿

可以毫不夸张地说，他们犯的是今天很多优秀的中学生都不会犯的错误！那么，作为数学家的他们又怎么会犯如此低级的逻辑错误呢？

这就需要对整个事情做更深入的分析援

首先，萨凯利和勒让德都是带着强烈的先入之见进行研究工作的援他们坚信第五公设是正确的，他们工作的目的就是要证明第五公设的正确性援于是，急于找到矛盾的萨凯利，果然找到了矛盾！急于完成证明的勒让德，果然完成了证明！

这就是人们常说的心理定势——是心理定势使他们失去了原有的洞察力和警觉，走进了思维的误区援

具体地说，当时的数学家并不怀疑第五公设的正确性！在对它进行逻辑的证明之前，他们就已经把它看成是真理，而不是猜想！因此，这里的证明已经不具有发现的功能，而不过是一个例行的手续而已！

可是，在发现活动中，本来是不应该如此的，证明并不单单是确认事实的例行手续，它原本是发现活动中一个重要的环节，应该具有双向的功能：它既能确认结论的正确，也可以通过反馈对结论提出怀疑，可是这一切都被忽视了援

简言之，他们还不会使用探索性演绎法！他们一厢情愿地相信第五公设是可以证明的，把问题看“死”了，因而就无法应变援

可见，思维方式上的缺陷是造成逻辑错误的深层原因援

猿援兰伯特的贡献

在进一步深入分析萨凯利所犯逻辑错误时，考察一下瑞士数学家兰伯特（员苑圆愿—员苑苑苑）的研究工作还是很有意义的援

兰伯特曾经作了和萨凯利类似的研究援

针对有三个直角的四边形，兰伯特对第四个角的情况做出了

钝角、锐角和直角的不同假定援他很容易就否定了钝角假设，并从锐角假设中得到了一系列与欧氏几何不同的结论援例如，他推出：三角形的内角和并不是定值，三角形的面积与角的亏量（即三角形内角和与 员愿园毅之差）成正比，即 杂越运［员愿园毅原（粤垣月垣悦）］援

和萨凯利不同，兰伯特没有根据这些结论轻易地否定锐角假设，他甚至有这样的推测：认为第三种假设（即锐角假设），在一个虚的球面上成立援

兰伯特的思想是先进的，他并没有因为推出的结论与欧氏几何中的结论不符，与生活中的经验不符，就否定它们援相反地，他清醒地知道他并没找到逻辑矛盾，他甚至开始从观念上怀疑平行公设的可证性援他说：

摇摇任何一组假设，如果不导致矛盾的话，一定提供一种可能的几何，这种几何是一种真的逻辑结构，虽然它或许对真实的图形作用很少援

这样的认识和萨凯利是有天壤之别的！

于是从兰伯特开始，人们认识到，除了欧氏几何外，还可能存在着其他不同的几何援这项进步可以说正是由于运用探索性演绎法取得的援人们在无数次证明第五公设的失败中，终于产生了一个念头，可能第五公设本身就是无法证明的，它本来就是具有独立性的“公设”援

遗憾的是兰伯特并没有发现非欧几何，尽管他从理论上承认“可能有很多种不同的几何”，但是他仍然认为欧氏几何是在经验能够证实的范围内描述物质空间性质的惟一几何学援这就是说，其他的几何学只是一种逻辑上的可能，一种“游戏”，而不是真实的存在援

值得追问的是，我们有什么理由相信上述结论呢？为什么欧

氏几何就应该具有不同于其他几何的特殊地位呢？

答案只能是：我们是根据经验做出上述判断的，又自觉或不自觉地把经验看成是判定真理的最后标准了！

实际上，兰伯特又回到了和萨凯利相同的立场上去了，即面对逻辑和经验相矛盾时，我们究竟应该相信什么呢？

——这是应该由思维者的价值观来回答的问题援

兰伯特和萨凯利一样，选择了经验！

这样，非欧几何的发现就和兰伯特擦肩而过了！

这就是兰伯特不能成为非欧几何发现者的原因；同时，也是萨凯利等数学家犯逻辑错误的深层次的原因援

在这里我们又一次看到了观念对思维活动的影响援

源援猿摇高斯的眼光

高斯、罗巴切夫斯基和约翰·伯尔约是非欧几何的发现者援

在非欧几何的研究中，伟大的德国数学家、天文学家、物理学家、“数学王子”高斯（员苑苑苑—员愿缘缘）表现了与众不同的眼光援

作为一个数学家，高斯也毫不例外地曾经试图证明第五公设援早在员苑怨圆年，即他员缘岁时，就思考过第五公设问题，但不久他就意识到，在这条路上有不可逾越的障碍援员苑怨怨年，他给朋友的信中说：“我仍抱着这个希望，在我死去之前，这些拦路石能够让出一条路来援”直到员愿员猿年，高斯在这方面仍没有看到希望援他说：“我们现在所知道的平行理论并没有比欧几里得更进一步，这是数学界的耻辱，迟早我们必须得到一个全新的形式援”

他确实得到了全新的几何，开始他把这种几何称为“反欧几何”，接着称为“星空几何”，最后定名为“非欧几何”援员愿圆源年后，高斯小心翼翼地得到这样一个结论：平行公设不能够从其余的公理中推出援

所有这些工作,像兰伯特那样的数学家也曾经做过,这算不上是高斯的首创援但高斯的高明之处是他从自己和前人的工作中看到了别人没有看到的东西援他说:“我所得到的许多东西,在大多数人看来都可以认为是一种证明,而在我的眼中它却什么也没有证明援’

高斯不仅深信新几何在逻辑上的相容性,而且还确认它具有可应用性,他认为新几何的地位和欧氏几何的地位是平等的援他说:“我愈来愈深信我们不可能证明我们的欧几里得几何具有物理的必然性,至少不能用人类理智,也不能给予人类理智以这种证明援’

高斯认识到欧氏几何并不一定必然是物质空间的几何,因此,非欧几何和欧氏几何“都只是人们创造出来的一种可能的空间模式”,从而跨出了非欧几何发现中的关键一步,成为非欧几何的发现者援

从上述事实可以清楚地看出,导致高斯做出重大发现的关键因素,是他不相信欧氏几何是描述物质空间的惟一正确的几何学,不相信欧氏几何的绝对真理地位援在他看来,既然从逻辑上,欧氏几何和新几何都是可行的,那么人们又有什么理由确信欧氏几何是惟一真实的几何呢?在他看来,它们具有同等地位,都是一种可能的空间模式援从这里可以看出:高斯的怀疑主义的立场以及他拒绝“先验”的观点和不承认绝对真理的做法,表现了高度的理性精神和对数学的深刻理解援

在权衡经验和逻辑的权威性时,高斯选择的是逻辑!

高斯成功的原因,在于他从前人和自己失败的思维活动中,受到了启发援这种启发不仅仅是思维方法上的,而且更是观念上的,他更新了陈旧的观念援和高斯一样成为非欧几何的创始人的还有