
电子图书
信息技术的结晶
人类文明的载体
网络的基本资源

高考数学科考试创造力考查的探讨

100080　教育部考试中心（海淀路 167 号）　　任子朝

1　问题的提出

在进入新的世纪时期，人类将进入知识经济时代，知识、发明创造对社会发展的作用越来越重要，其劳动者则是掌握知识、具有创造性的人才[1].因此，各国都在积极探讨培养适应知识经济、具有创造力人才的教育模式，使培养的人才在未来社会更具竞争力.中共中央国务院在《深化教育改革，全面推进素质教育的决定》中指出，实施素质教育，就是全面贯彻党的教育方针，重点培养学生的创新精神和实践能力[2].创造性人才的培养离不开创造型人才的选拔，我国的大学入学考试作为选拔人才的重要方式，体现了国家选拔人才的质量要求.本文主要讨论高中学生创造力的特点,高考数学科中考查考生的创造力所采取的措施和方法，以及考查过程中要解决的问题.

2　创造力的概念及中学生创造力的特点

创造力（creativity）一词源于拉丁语 creare，就是创造、创建、生产、造就的意思.创造力作为心理学的一个观念，通常指的是：根据一定的目的和任务，运用一切已知信息，开展能动思维活动，产生出某种新颖、独特、有社会或个人价值的产品的智力品质[3].这里的产品是指以某种形式存在的思维成果，可以是有形的，也可以是无形的，如一种新思想、新概念，或新技术、新工艺，产品强调新颖、独特、有社会或个人价值.可见，创造力应该理解为思维上的一种创新能力和开发能力，是在认识、解决和处理各种问题时体现出来，并且会产生出可知的客观成果.创造力是可检测的，具有可测性与可培养性，创造力存在明显的个体差异性.

根据皮亚杰的认知发展理论，高中生的认知水平处于形式运算阶段[4].此阶段学生的思维水平已得到很大的提高，记忆力、想象力、观察力等能力得到了迅速的发展，并且，思维具有较强的抽象性；他们能够根据自己的目标设定和检验假设，监控自己的思维活动，并能跳出思维的局限性，用新方法解决问题；他们已经善于考虑问题的多方面和可能性，根据问题进行逻辑性的推理、分析，解决问题的准确性和有效性也得到了发展.从认知心理方面来说，高中生已经具备了创造的条件，他们的创造力就是运用所学知识、技能，获得知识、解决问题的能力，并且问题相对于学生个人来说是新颖的.高中生的创造力具有三个比较显著的特点：第一是独立性，对问题是经过自己思考、分析、解决的，是自己的见解，而不是其他人已经采用的方法的简单重复.第二是相对新颖性.对于学生本人来说，问题的整个解决过程应该是新颖的，是以前没有遇到的.这种创造主要是一种“类创造”，是个体发展中的第一次的“创造”.第三是在学科学习中表现出来并具有个体的差异性和可检测性.

高中生的主要任务是学习，创造力的培养是最关键的，主要是为今后更

多、更好的发明创造奠定基础.高中生的创造力，更具有普遍意义的应该是创造潜能，或者说具有创造能力和创造精神.从本质上说，创造就是困难问题的解决过程，是一个发现问题、组织问题、解决问题的过程[5].

那么，创造力与一般认知能力的关系是怎样的呢？从认知心理学的角度来看，创造力是人对客观世界的一种特定的反映方式，创造性思维是人脑最高层次的机能.因此，创造力是人的一种认知能力，但高于我们所说的一般认知能力，诸如理解、推理、分析、综合等能力.创造力必须以一般认知能力为基础，并且，在创造过程中一般认知能力起着极其重要的作用，没有一般的理解、推理、分析、综合等能力，创造性活动是不可能产生的.反而言之，在创造性活动中包含着理解、推理、分析、综合等能力，创造力的培养也是通过一般认知能力的培养来获得的.

3　数学高考中对创造力的考查

数学科对创造性思维能力的考查，主要在三个方面进行.独创性（originality）:即产生新的思想的能力,发现和产生一些新颖简捷的解法.流畅性（fluency）：即思维敏捷，反应迅速，对于特定的问题情境能顺利产生多种反应或提出多种方案.灵活性（flexibility）：即具有较强的应变能力和适应性，具有灵活改变定向的能力，能发挥自由联想.

对考生创造能力的考查在试题中主要体现为：

3.1 创设一定数量的新颖情境的试题，考查创新能力

判断一个活动是否具有创造性，主要依据在解答问题中采用的方法、最终的结果是否是新颖的、独特的.因此，在高考中鉴别考生是否具有创造力的有效方法就是编制新颖的试题，要求考生应用已知的方法和知识，分析一些情境的特点，找出已知和未知的联系，重新组织若干已有的规则，形成新的规则，尝试解决新的问题.所谓新颖是相对于绝大多数考生来说，相对于用常规的方法难以解答，要求考生思维灵活、敏捷，创造性地应用知识，解决问题.

例 1 已知 a、b、c 是实数，函数

$f(x)=ax^2+bx+c$，$g(x)=ax+b$，当$-1\le x\le 1$时，$|f(x)|\le 1$.

（Ⅰ）证明：$|c|\le 1$；

（Ⅱ）证明：当$-1\le x\le 1$ 时，$|g(x)|\le 2$；

（Ⅲ）设 $a>0$，当$-1\le x\le 1$ 时，$g(x)$ 的最大值为 2，求 $f(x)$.

本题的设计比较新颖,没有常见的解题模式可以套用.题目以二次函数和一次函数为载体，着重考查对函数概念的理解、含绝对值不等式的性质、抽象的数学问题的具体化等.首先本题没有设计为证明某个函数的单调性,而是考查对函数单调性概念的理解和运用.其次题目中没有给出 a、b、c 的具体数值，而是给出比较抽象的函数表达式，要求考生根据题目的条件导出一些关系式：$|f(0)|\le 1$,

$$f(x)=x\cdot g(x)+c,\ g(1)=f(1)-f(0),$$

进而求出具体函数.同时本题还要求进行等式和不等式的转化,运用双边不等式$-1\le f(0)\le -1$ 得出等式 $c=f(0)=-1$；根据二次函数的极小值点，通

过逆向思维求出函数 f（x）的一次项系数.

例 2 某地为促进淡水鱼养殖业的发展，将价格控制在适当的范围内，决定对淡水鱼养殖提供政府补贴.设淡水鱼的市场价格为 x 元/千克，政府补贴为 t 元/千克.根据市场调查，当 $8\leq x\leq 14$ 时，淡水鱼的市场日供应量 P 千克与市场日需求量 Q 千克近似地满足关系：$P=1000(x+t-8)$（$x\geq 8$，$t\geq 0$），

$$Q=500(8\leq x\leq 14).$$

当 P=Q 时的市场价格称为市场平衡价格.

（Ⅰ）将市场平衡价格表示为政府补贴的函数，并求出函数的定义域；

（Ⅱ）为使市场平衡价格不高于每千克 10 元，政府补贴至少为每千克多少元？

本题是一道实际应用问题，试题密切结合当时的中国社会经济生活，背景新颖.同时题目引入了一些新的概念，如市场平衡价格、政府补贴等.试题的要求也不同于一般的数学试题，要求考生首先读懂题目，理解题目的条件和结论，将其转化为数学表达式，以便应用数学工具解决.题目根据问题的实际背景，对各参数限制了其取值范围，在数学运算过程中要求灵活地应用这些要求求解.

例3 设二次函数$f(x)=ax^2+bx+c$（$a>0$），方程 $f(x)-x=0$的两个根x_1、x_2满足

$$0<x_1<x_2<\frac{1}{a}.$$

（Ⅰ）当 $x\in(0,x_1)$ 时，证明：$x<f(x)<x_1$；

（Ⅱ）设函数$f(x)$的图象关于直线$x=x_0$对称，证明：$x_0<\frac{1}{2}$.

本题的几何意义非常明确，给定的抛物线与一条过原点的特殊直线有两个交点，在此情况下，研究某些给定点之间的关系，进而研究点的终极状态.这个问题更深刻的数学背景是动力学问题，其含义是设x_1和x_2（其中$x_1<x_2$）是$f(x)$的不动点，问在何种条件下x_1是$f(x)$稳定不动点，以及它的吸引域有多大.

高考中每年都有新颖题，特点是其中涉及的知识和方法是学生已经学得或试题本身告诉考生的，但涉及的过程、情境或问题是新颖的，要求考生根据所学的知识和试题所给的信息，来分析、解决问题.这种试题本身很好地考查了考生的创造性，在很大程度上体现了考生对问题的敏感性、洞察性、独创性.

3.2 设计各种层次的综合性试题,考查综合运用各种知识解决问题的能力

考生解决这类问题的过程是综合运用各种能力的过程，因此，高考中对能力的考查也应强调综合考查.

例4 已知过原点O的一条直线与函数$y=\log_8 x$的图象交于A、B两点，分别过 A、B 作 y 轴的平行线与函数的图象交于 C、D 两点.

（Ⅰ）证明：点 C、D 和原点 O 在同一条直线上；

（Ⅱ）当 BC 平行于 x 轴时，求点 A 的坐标.

本题考查对数函数的图象与直线的位置关系.两条平行于 y 轴的直线,如果与两个不同的对数函数的图象分别有两个交点，若其中一个对数函数的图象中的这两点的连线通过原点，则另一个对数函数的图象中的两点也必然通过原点.这是由于两个对数函数$f(x)=\log_a x$、$f(x)=\log_b x$之间有这样的关系：$\log_a x=\dfrac{\log_b x}{\log_b a}$.在此，很难分清是用代数方法研究几何问题，还是用几何方法研究代数问题，这是考查综合运用数学知识的能力和学习潜能的更高层次的要求.

例 5 设曲线 C 的方程是 $y=x^3-x$，将 C 沿 x 轴、y 轴正向分别平行移动 t、s 单位后得曲线 C_1.

（Ⅰ）写出曲线 C_1 的方程；

（Ⅱ）证明：曲线C与C_1关于点$A(\dfrac{t}{4},\dfrac{s}{2})$对称；

（Ⅲ）如果曲线C与C_1有且只有一个公共点，证明：$s=\dfrac{t^3}{4}-t$，且 $t\neq 0$.

本题设计思想是试题能够体现代数表述及其推理与其几何背景的平衡，根据这一立意，命题选取了考生熟悉的平面曲线的平移、对称和旋转以及相互之间的关系作为出发点，讨论相应的代数表述和有关函数基本特性的代数推理.本题以三次函数设定情境，将平移、对称、相交等概念有机地结合在一起，讨论曲线C和C_1之间的关系.本题很难按其所涉及具体的知识点、按一般的分类将其归入代数或解析几何类试题，而是把中学教学里函数及图象的基本概念、基本性质与曲线的几何变换（平移、中心对称）的性质，以及用代数方程研究曲线位置关系的思想方法等，许多重要内容融合在一起，命题颇具创意.

3.3 开发新的题型，考查灵活运用知识的能力

近几年在高考命题时，编拟了一些作答方式比较新颖的试题，如多个正确选项的选择题、开放题、探索题等，从解题过程反映出了学生的灵活性、敏感性、创造性，考查考生创造性地运用所学知识解决问题的能力.

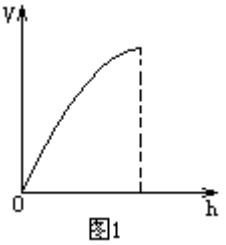


图1

例 6　向高为 H 的水瓶注水，注满为止.如果水量 V 与水深 h 的函数关系如图 1，则水瓶的形状是（　　）.

需要全本请访问 www.ertongbook.com

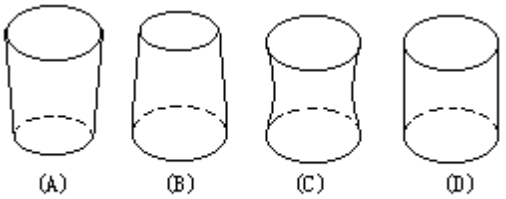


图2

首先，在设计本题时没有给出通常的函数关系解析式，而是给出的函数关系的图象，用图象呈现数量关系、题目的条件和要求，要求考生根据注水量和水深的函数关系图象,判断水瓶的形状.设计本题的另一个想法就是加强数学意识和数学化的能力的考查.本题与常规的试题不同，本题没有一个数字，所给的几何旋转体其注水量与水深的函数表达式并非都可以用中学的数学知识求出来,但可由曲线的变化情况分析容积的变化情况.其次是要按照对函数图象和性质在整体意义上的理解，根据对各种几何体的性质及其体积自下而上变化的比较灵活的认识，把数学的合情推理和逻辑推理结合起来，作出正确的判断.

一般的应用问题是由实际问题建立数学模型，而本题是给出数学模型，去解决实际问题，考查了逆向思维能力.解决本题可有两种方法：（1）定性判断，从函数的单调性考虑，观察函数图象的发展.（2）定量判断.按照我们常说的“时间过半，任务过半”，可取$h=\frac{H}{2}$，由图象可知$f(\frac{H}{2})>\frac{V_0}{2}$.

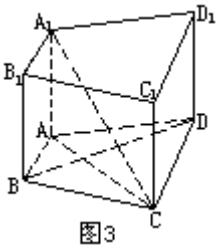


图3

例7　如图3，在直四棱柱$A_1B_1C_1D_1-ABCD$中，当底面四边形ABCD满足_____时，有$A_1C\perp B_1D_1$.本题是一道典型的开放型和探索性的试题，题目以直四棱柱$A_1B_1C_1D_1-ABCD$为依托，要求考生对底面四边形ABCD补充一定的条件，使之能推出$A_1C\perp B_1D_1$的结论.这样的结论并不唯一，ABCD是正方形；ABCD 是菱形；ABCD 是等形；AB=CD 且 CB=CD；AB=BC 且 AD=CD.可以充分考查考生的空间想象能力和分析判断能力.试题的整个分析过程一定程度上反映了学生的洞察力、思维的灵活性、流畅性，鉴别出考生是否能够根据给定的情境提出多种解答、是否能够打破以往的旧模型建立新模型的能力，从考后的结果来看，该题考查灵活性、创造性的效度较好.

例 8 定义在区间（－∞，＋∞）的奇函数 f（x）为增函数；偶函数 g（x）在区间［0，＋∞）的图象与 f（x）的图象重合.设 a＞b＞0，给出下列不等式：

①f（b）－f(－a) ＞ g（a）－g（－b）；

②f（b）－f(－a) ＜ g（a）－g（－b）；

③f（a）－f(－b) ＞ g（b）－g（－a）；

④f（a）－f(－b) ＜ g（b）－g（－a）.

其中成立的是（　　）.

（A）①和④　　（B）②和③

（C）①和③　　（D）②和④

本题实际上是有多个正确选项的多项选择题，成立的不等式是①和③，但由于在中国的数学科考试中，选择题都是只有一个正确选项，因此将选项进行了组合，改编成单项选择题.

3.4 统筹设计整个试卷，发挥各种题型的功能

高考数学科选用的题型有四选一的选择题、填空题和解答题.因为主、客观性试题各具优缺点.因此要充分发挥各自的优点,使之在考试中得到最佳组合.虽然客观题是封闭式的答题方式，答案事先给定且唯一，但其解决的过程仍具有开放性,可以通过一题多解考查考生的创造性.主观题有利于学生比较开放、灵活地解决问题，充分发挥其发现问题、分析问题、解决问题的能力，有利于培养学生的发散性思维,对创造力的培养有较大的贡献.高考数学科在整个试卷中设计了不同层次、不同难度的问题，深入浅出，体现多层次思维深度的考查要求,使不同水平的考生都能发挥其所长.同时在试卷中适当提供解题所用的知识，把考核重点放在创造能力的考查上.

1991～1999年数学试卷结构

	1991	1992	1993	1994	1995
选择题（%）	36.0	45.3	45.3	43.3	43.3
填空题（%）	16.0	16.0	16.0	13.2	13.2
解答题（%）	48.0	38.7	38.7	43.5	43.5
	1996	1997	1998	1999	
选择题（%）	43.3	43.3	43.3	40.0	
填空题（%）	13.2	13.2	13.2	13.2	
解答题（%）	43.5	43.5	43.5	46.8	

1991～1998年数学试卷难度

	1991	1992	1993	1994	1995
难度	0.59	0.65	0.58	0.55	0.59
	1996	1997	1998	1999	
难度	0.55	0.59	0.57	0.51	

4　创造力考查的讨论

从每年命题和高考后的结果来看，反映出了几个问题：

第一，创造力的存在是普遍的，而不仅仅是少数人具有创造力.正如吉尔福特所说：迄今人们获得的最有意义的认识之一是，创造性再也不必假设为仅限于少数天才，它潜在分布于整个人口中间[6].高考就是为高校选拔这些

有潜能的优秀的学生，因此，高考中考查创造力是十分必要的.考查过程中应注意切合考生的水平，并且根据考生水平的实际差异，设计不同层次的试题，使各水平的考生创新能力都得到有效的考查.

第二,学科内容考查与创造力考查的关系.我国现行高考是以课程为基础的考试,运用学科教学内容考查创新能力是我们试题的特色.在命题中应该以学科知识为基础，按照“依据教学大纲，但不拘泥于教学大纲”的命题改革指导思想，注意考查学科的内在联系，包括各部分知识在各自发展过程中的纵向联系，以及各部分知识之间的横向联系.注重知识的综合性，从学科的整体高度考虑问题,在知识网络交汇点设计试题.同时注意学科之间的交叉和渗透，全面考查考生的创造能力.

第三，试卷结构的改革.继续进行题型功能和题型改革的研究和试验，进一步深入研究题型功能，改革试卷结构，使之更有利于创造性的发挥和鉴别.提高选择题命题水平，充分发挥主观题的作用，进一步开拓主观题的考查功能.根据学科特点和选拔的要求，合理确定选择题和非选择题的比例.

第四，由于高考的社会性，必须保证高考的公平竞争.高考试题的编制需要考虑到各个方面，要考虑控制评分误差，阅卷工作量，对评卷教师的要求等.高考鉴别考生解决问题的能力，主要从结果来评定，因此，高考中创造力的考查必须考虑到可操作性以及试题的效度和信度.

参考文献

1 李文平.关于知识经济的思考.光明日报，1998，4，10

2 中共中央国务院.深化教育改革，全面推进素质教育的决定.人民日报，1999，6，15

3 林崇德，辛涛.智力的培养.杭州：浙江人民出版社，1996，11

4 林崇德.发展心理学.北京：人民教育出版社，1995，11

5 俞国良.创造心理学.杭州：浙江人民出版社，1996，11

6 邵瑞珍.教育心理学.上海：上海教育出版社，1988，1

7 教育部考试中心.1999 年普通高等学校招生全国统一考试说明.北京：高等教育出版社，1999，1

谈数学课堂教学中思维热点的组织

215200 江苏省吴江市高级中学　姚伟斌

所谓思维热点，就是能够引起学生积极思维，对问题产生共鸣、诱发思维情趣的问题.教师组织课堂思维热点的关键，在于教师在教学设计时，要根据教材的内容、学生的实际和本人的教学特点，做到精心选材、精心设计、精心安排.一般地说，思维热点的组织安排，可以从以下几个方面来考虑.

1　抓住教材内容通过“导问”组织思维热点

教师好比骑手，上课好比驾驭着一匹马，前进的方向、速度、方式都由骑手控制着.同样，教师对学生的思维形式、方向、深刻程度也起着导航塔般的作用.教师可以根据课本内容，由浅入深、由低层次到高层次，设计一个个问题，指导学生去探索，寻找答案，从中获得知识的真谛.比如在讲授反正弦函数时，就可安排如下问题：什么叫函数及反函数？y=sinx 是否有反函数？怎样的情况下才具有反函数？如何定义反函数？设置悬念，迫使学生去思考，引导他们讨论、回答，积极参与.使他们经常处于积极思维状态，既获得知识，又促进思维的发展，品尝思维成功的乐趣.

2　根据教材知识点，通过模型、实验组织思维热点

如在立几教学中，要针对学生初学立几，空间想象能力差，立体观念淡薄，思维容易混淆、阻塞的特点.充分运用模型教具展示给学生看，使他们对几何体有直观的认识,通过分析归纳得到理论的再认识.有时也可以让学生亲自做实验，拓展思维的力度.如在讲授异面直线以前，可以让学生拿出两根木棒，要他们摆出各种位置，可以分别得到平行、相交、重合等情形，而有一种特殊的位置很奇怪，指导学生得出特征：两直线始终不处在同一个平面上，从而揭示异面直线的概念.这种做法可以充分调动学生的形象思维和探求新知识的欲望，加深对概念的理解，认识内涵，激发学生学习的兴趣.

3　利用公式训练组织思维热点

教师通过不断变换命题的已知条件，产生一个个既类似又有区别的问题，形成一浪高过一浪的气势扑向学生，使学生产生浓厚的兴趣，在挑战中寻找乐趣，在积极思维中培养思维的坚韧性.比如研究三棱锥（即四面体）顶点的射影与底面三角形“五心”的关系时就可设置以下问题：

① 当三棱锥是正三棱锥时；

② 当三条侧棱的长度均相等时；

③ 当侧棱与底面所成的角都相等时；

④ 当各个侧面与底面所成的二面角相等且顶点射影在底面三角形内时；

⑤ 当顶点与底面三边距离相等时；

⑥ 当三条侧棱两两垂直时；

需要全本请访问 www.ertongbook.com

⑦ 当三条侧棱分别与所对侧面垂直时；

⑧ 当各个侧面在底面上的射影面积相等时；

⑨ 当各个侧面与底面所成的角相等且顶点在底面三角形外时.

通过几个排比式问题的提出，形成一浪高过一浪的气势，可以极大地调动学生的思维，进一步巩固线线、线面垂直关系，尤其是三垂线定理的掌握.既加深知识的理解，又开阔了视野，增添兴趣，培养思维品质.

4 利用一题多解或多题一解组织思维热点

一题多解或多题一解在一定程度上可吸引学生多角度观察、联想，获得多种解题途径，充分展示思维的广阔性、深刻性和灵活性，使学生感受到数学的美妙与情趣，有利于学生思维品质的提高.如题目：已知函数 $f(x)=\sqrt{1+x^2}$，试比较｜f（a）－f（b）｜与｜a－b｜的大小.可以有以下解题途径：

① 按证明绝对值不等式的常规方法，经过平方去绝对值符号，作差比较，利用配方法证明.

② 用商比法，利用共轭根式有理化分子，再用放缩法证明.

③ 注意函数 $f(x)=\sqrt{1+x^2}$ 表示双曲线 $y^2-x^2=1$ 的上支，$\dfrac{|f(a)-f(b)|}{|a-b|}$ 是双曲*线上两点（a,f（a））与（b,f（b））连线斜率的绝对值，于是问题转化为双曲线上支任一弦所在直线斜率的估计问题，而双曲线的渐近线斜率为±1，问题即可得证.

④ 注意函数 $f(x)=\sqrt{1+x^2}$ 的结构特征，用三角代换令 $x=\mathrm{tg}\theta$，转化为三角不等式证之.

⑤ 观察函数 $f(x)=\sqrt{1+x^2}$ 的特点，联想到复数的模，可构造复数 $z=1+xi$，利用复数不等式证明.

一题多解或多题一解能很好地吸引学生，不断掀起学生思维的浪花，培养他们发散思维和集中思维的能力.

5 精心挑选典型错例组织思维热点

在课堂教学中，针对学生存在的问题，教师精心挑选错例予以评讲，或诱使学生产生错误，而学生往往对自己的错误较为敏感，当他们一旦知道自己解题存在问题，势必会产生浓厚的兴趣，此时老师恰到好处的点拨思维，使学生领悟到思维的故障在哪里，从而达到掌握知识的目的.正所谓：重在点拨，贵在引导，妙在开窍.如有这么一题：使实系数二次方程 $2kx^2+(8k+1)x+8k=0$ 有两个不相等的实数根的 k 的范围是（　　）.

(A) $k<-\frac{1}{16}$

(B) $k>-\frac{1}{16}$

(C) $k\geq-\frac{1}{16}$

(D) 以上都不对

有许多同学选择（B），这是忽视了“实系数二次方程首项系数 $k\neq0$”这个条件，点拨之下，学生都有种恍然大悟的感觉，加深了印象，以后再也不敢小瞧二次函数方程首项系数了.又如已知$\sin+\cos\theta=\frac{1}{5}$，$\theta\in(0,\pi)$，则 $t\theta$ 的值为（　　）.

(A) $\pm\frac{4}{3}$　　(B) $-\frac{3}{4}$

(C) $-\frac{4}{3}$　　(D) $-\frac{4}{3}$ 或 $-\frac{3}{4}$

许多同学按一般思路做下来都选择了（D），而没有注意到题目中隐含条件 $\theta\in(\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{4})$，

$$\text{从而}\quad \operatorname{tg}\theta<\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}=-1.$$

通过分析，使学生领悟到错误的症结所在，不仅排除了障碍，加深了印象，还深化了思维.

6　利用学生心理上的“好奇驱动”因素组织思维热点

一般来说，学生有“喜新厌旧”的心理因素，对于新鲜事物乐于探索和了解.教师如能在讲课时时常结合一些新颖的、各种数学竞赛中的题目，以及数学在现代科学、实际生活中的应用性问题（面向当今素质教育和高考的方向），古今中外数学史上的一些典故、轶事，当今数学这门基础学科的发展概况，介绍一些世界性的难题，比如哥德巴赫猜想、费尔马大定理等等，肯定会引起同学们的浓厚兴趣，难保不会不对他们产生一点影响，从而奠定自己的理想.要知道陈景润就是从中学老师的介绍中知道哥德巴赫猜想的,从而使其为摘取这颗数学皇冠上的明珠而奋斗一生.

总之，教师在备课时，要根据教材，结合学生的年龄特征和认知水平等实际情况，有目的、有步骤地设计好思维的热点，以利于更好地提高课堂教学效果.

灵活运用提问技巧　培养学生思维品质

430208 武汉市江夏区金口中学　魏仁洪

提问，是课堂教学的重要环节，是师生之间进行信息和情感交流的重要途径.巧妙地运用提问技巧，能激发兴趣，拓广思路，启迪思维，充分发挥学生在学习中的主动精神，从而培养学生良好的数学思维品质.

1　盲点提问，培养学生思维的严密性

盲点，即在正常思维中不容易被注意到但在实际运用中又往往会影响人们正确思维的问题.针对学生思维不严密，容易以偏概全、疏忽隐含条件、只看问题的表象等问题，先让学生练习，再针对盲点设问，引导学生“再发现”差错，透过现象看本质.让学生全面思考问题，从而培养学生思维的严密性.

例1　已知数列的前n项之和为$S_n = 10_n - n^2$（n∈N），试求数列｛｜a_n｜｝的前n项和S_n'.

绝大多数学生这样解：

错解 ∵$S_n = 10n - n^2$（n∈N），

∴ n = 1时，$a_1 = S_1 = 9 = -2\times1+11$，

n≥2 时，

$a_n = S_n - S_{n-1}$

$= 10_n - n_2 - [10(n-1) - (n-1)^2] = -2n+11$，

因此 $a_n = 11 - 2n$（n∈N），

由 $a_n = 11 - 2n \geq 0$ 得 $n \leq 5\frac{1}{2}$；

由 $a_n = 11 - 2n < 0$ 得 $n > 5\frac{1}{2}$，

因此 当 1≤n≤5，n∈N 时，$a_n > 0$；

当n≥6，n∈N时，$a_n < 0$，

$\therefore S_n' = |a_1|+|a_2|+|a_3|+|a_4|+|a_5|+|a_6|+|a_7|+\Lambda+|a_n|$

$= a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 - (a_6 + a_7 + \cdots + a_n)$

$= 2(a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5) - (a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 + a_7 + \cdots + a_n)$

$= 2S_5 - S_n$

$= n_2 - 10n + 50.$

对盲点提问：$S_1' = |a_1| = 9$适合上式吗？由此提出问题再引导学生发现错误，从而培养学生思维的严密性.

解 同上先求出$a_n = 11-2n$（n∈N），且当0 1≤n≤5，n∈N时，$a_n > 0$；

当n≥6，n∈N时，$a_n < 0$

讨论： 当 1≤n≤5 时，

$S_n' = |a_1| + |a_2| + \cdots + |a_n|$

$= a_1 + a_2 + \cdots + a_n = S_n = 10n - n^2$；

当 n≥6 时，

$S_n' = |a_1| + |a_2| + |a_3| + |a_4| + |a_5| + |a_6| + |a_7| + \cdots + |a_n|$

$= a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 - (a_6 + a_7 + \cdots + a_n)$

$= 2(a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5) - (a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 + a_7 + \cdots + a_n)$

$= 2S_5 - S_n$

$= n_2 - 10_n + 50.$

因此 $S_n' = \begin{cases} 10 - n^2，1 \le n \le 5，n \in N \\ n^2 - 10n + 50，n \ge 6，n \in N \end{cases}$

2 引伸提问，培养学生思维的深刻性

采用引伸提问，把问题引向深处，让学生在新的情境中解答，使学生学一个题会一类题，举一反三，有利于培养学生思维的深刻性与探索精神.

例2 若复数z_1、z_2、z_3满足$z_1 + z_2 + z_3 = 0$，$|z_1| = |z_2| = |z_3| = 1$，求证：以$z_1$、$z_2$、$z_3$所对应点为顶点的三角形是等边三角形.

证明该题后，提问：该题有哪些变式呢？引导学生们得到：

变式1 在复平面内已知正$\triangle Z_1Z_2Z_3$的三个顶点与复数z_1、z_2、z_3对应，且$|z_1| = |z_2| = |z_3| = 1$，求证：$z_1 + z_2 + z_3 = 0$.

变式2 在复平面内已知正$\triangle Z_1Z_2Z_3$的三个顶点与复数z_1、z_2、z_3对应，且$z_1 + z_2 + z_3 = 0$，求证：$|z_1| = |z_2| = |z_3|$.

变式3 在复平面内已知正$\triangle Z_1Z_2Z_3$的三个顶点与复数z_1、z_2、z_3对应，且$|z_1| = |z_2| = |z_3| \neq 0$，求证：$z_1 + z_2 + z_3 = 0$.

变式4 若复数z_1、z_2、z_3满足$z_1 + z_2 + z_3 = 0$，$|z_1| = |z_2| = |z_3| \neq 0$，求证：以$z_1$、$z_2$、$z_3$的对应点为顶点的三角形是等边三角形.

可以发现上述变式都是可证的.这样由一个问题引伸出一类问题,可以充分调动学生的探索精神，从而培养学生思维的深刻性.

3 变换提问，培养学生思维的灵活性

思维的灵活性是指思维活动的智力灵活程度.通过变换提问,可引导学生根据客观条件的变化及时调整思维方向，克服思维的呆板性，即保守性或思维定势，从而提高思维的灵活性.

例3 当m为何实数时，抛物线$y = x^2 - mx + 1$与x轴无交点？

讲解后，变换出下列问题，并提问：它们有什么联系？

变形1 m为何值时，二次函数 $y = x^2 - mx + 1$的值恒大于0？

变形2 m为何值时，二次三项式 $x^2 - mx + 1$在实数范围内不能因式分解？

变形3 m为何值时，方程$x^2 - mx + 1 = 0$无实根？

变形4 m为何值时，不等式 $x^2 - mx + 1 > 0$的解集为一切实数？

可以看出，上述几个变换问题，都是例 3 的转化形式.通过这些变换，可以活跃思路，开阔视野，加强各知识间的联系，从而培养学生的应变能力.

4 联想提问，培养学生思维的广阔性

思维的广阔性即思维的广度，是探索问题的能力.教学时，运用联想提问可引导学生横向联系，数形结合，拓广思路，从而培养学生思维的广阔性，提高发散性思维能力.

例4 已知a、b、c、d都是实数，求证：$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 \geq (a-c)^2 + (b-d)^2$.

提问：该题有哪些证法？引导学生们讨论、联想.

证法 1 （分析法）

欲证 $\sqrt{a^2+b^2} + \sqrt{c^2+d^2}$

$\geq \sqrt{(a-c)^2 + (b-d)^2}$，

只需证$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + 2\sqrt{(a^2+b^2)+(c^2+d^2)}$

$\geq a^2 + c^2 - 2ac + b^2 + d^2 - 2bd.$

只需证 $\sqrt{(a^2+b^2)+(c^2+d^2)} \geq -(ac+bd)$，

只需证 $\sqrt{(a^2+b^2)+(c^2+d^2)} \geq |ac+bd|$，

只需证 $(a^2+b^2)(c^2+d^2) \geq (ac+bd)^2$，

只需证 $a^2c^2 + b^2c^2 + a^2d^2 + b^2d^2$

$\geq a^2c^2 + b^2d^2 + 2abcd$

只需证 $(bc-ad)^2 \geq 0.$

最后的不等式恒成立，因此，原不等式成立.

联想到不等式中$\sqrt{a^2+b^2}$，$\sqrt{c^2+d^2}$，$\sqrt{(a-c)^2+(b-d)^2}$可写成$\sqrt{(a-0)^2+(b-0)^2}$，$\sqrt{(c-0)^2+(d-0)^2}$，$\sqrt{(a-c)^2+(b-d)^2}$等距离形式，提问：能否运用* 距离的有关性质证明呢？又联想到不等式中$\sqrt{a^2+b^2}$，$\sqrt{c^2+d^2}$，$\sqrt{(a-c)^2+(b-d)^2}$均可看作复数$z_1 = a+bi$，$z_2 = c+di$，$z_3 = (a-c) + (b-d)i$的模的形式，提问：能否运用复数模的性质证明呢？由此引导同学们得到下面证法.

证法 2 如图 1，建立直角坐标系，设 O（0，0）、A（a，b）、B（c，d），则$|OA| = \sqrt{a^2+b^2}$，$|OB| = \sqrt{c^2+d^2}$，$|OC| = \sqrt{(a-c)^2+(b-d)^2}$.

在△ABC中由三角形三边之间的关系知$\sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{c^2+d^2}\geq\sqrt{(a-c)^2+(b-d)^2}$.

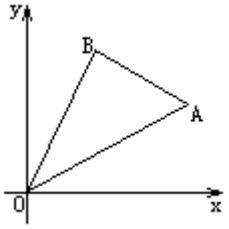


图 1

（当 A、O、B 三点共线时等号成立）

证法3 设复数$z_1=a+bi$，$z_2=c+di$，则$z_1-z_2=(a-C)+(b-d)i$，

∵ $|z_1|+|z_2|\geq|z_1-z_2|$，

∴ $a^2+b^2+c^2+d^2$

$\geq(a-c)^2+(b-d)^2$.

这里运用联想提问，引导学生们运用代数知识、解几知识、复数知识来解题，加强了各知识间的联系，培养学生形成多角度、多层次的立体思维.

5 辨析提问，培养学生思维的批判性

通过展示学生解题的典型错误与正确答案，引导学生辨析并提出问题，帮助学生弄清错误的根源，从而培养学生思维的批判性.

例5 已知$x>0$，求$4x+\frac{9}{x^2}$的极小值.

先给出两种解法：

解法1 ∵ $4x+\frac{9}{x^2}=x+3x+\frac{9}{x^2}$

$\geq 3\sqrt[3]{x\cdot 3x\cdot\frac{9}{x^2}}=9$，

∴$4x+\frac{9}{x^2}$的极小值为9.

解法2 ∵ $4x+\frac{9}{x^2}=2x+2x+\frac{9}{x^2}$

$\geq 3\sqrt[3]{2x\cdot 2x\cdot\frac{9}{x^2}}=3\sqrt[3]{36},$

∴$4x+\frac{9}{x^2}$的极小值为$3\sqrt[3]{36}$.

两种解法结果不同，提问：哪种解法是正确的呢？引导学生们辨析、讨论.

解法1中，$x+3x+\frac{9}{x^2}=9$等号成立的条件$x=3x=\frac{9}{x^2}$中的x值不存在，

故解法1是错误的；解法2中，$2x+2x+\frac{9}{x^2}=3\sqrt[3]{36}$是当且仅当$2x=2x=\frac{9}{x^2}$，即$x=\sqrt[3]{\frac{9}{2}}>0$时成立，故解法2是正确的.

6 猜想提问，培养学生思维的独创性

思维的独创性是指打破常规解决问题的一种创造能力.教师运用猜想提问可鼓励、引导学生敢于打破常规，标新立异，大胆猜想，从而培养学生自觉的独创精神.

例6 已知数列 $\{a_n\}$ 满足$a_1=a_2=1$，$a_{n+2}=\frac{a_{n+1}^2+2}{a_n}$.求证：对一切自然数n，$a_n$都为整数.

大多数学生很快可以算出$a_1=1$，$a_2=1$，$a_3=3$，$a_4=11$，$a_5=41$，$a_6=153$，但对怎样证明束手无策，怎么办呢？猜想提问：能否假设$a_{n+2}=pa_{n+1}+qa_n$成立？（p、q为整数）并引导学生用待定系数法求得$p=4$，$q=-1$.因此$a_{n+2}=4a_{n+1}-a_n$，再用数学归纳法可证明该等式成立，则问题易证下面用数学归纳法证明$a_{n+2}=4a_{n+1}-a_n$.

证明 （1）$n=1$时，$a_3=3$，

$4a_2-a_1=4\times1-1=3$，

∴$a_3=4a_2-a_1$，∴$n=1$时，等式成立.

（2）假设当 n=k（k∈N）时，等式成立，即

$$a_{k+2}=4a_{k+1}-a_k,$$

由题设知，对任何n∈N，$a_{n+2}=\frac{a_{n+1}^2+2}{a_n}$，

∴ $$a_{k+2}=\frac{a_{k+1}^2+2}{a_k},\qquad ②$$

$$a_{k+3}=\frac{a_{k+2}^2+2}{a_{k+1}}.$$

由①、②联立消去a_k得

$$a_{k+2}(4a_{k+1}-a_{k+2})=a_{k+1}^2+2,$$

展开移项得 $a_{k+2}^2+2=4a_{k+2}\cdot a_{k+1}-a_{k+1}^2$，

∴ $$a_{k+2}=\frac{a_{k+2}^2+2}{a_{k+1}}=\frac{4a_{k+2}\cdot a_{k+1}-a_{k+1}^2}{a_{k+1}},$$

$$=4a_{k+2}-a_{k+1}.$$

∴ $a_{(k+1)+2}=4a_{(k+1)+1}-a_{k+1}$，

即 n=k+1 时，等式成立.

综合（1）、（2）可知：等式$a_{n+2}=4a_{n+1}-a_n$对任何n∈N都成立.

“没有大胆的猜想，就做不出伟大的创造”（牛顿语）.在教学时应鼓励学生大胆猜想，并引导他们在充分理解题意的基础上提出有新意、有创造性的解法，从而逐步培养学生创造性思维的能力.

总之，善于运用提问技巧，多角度、多层次、多形式地提出问题，引导、启发学生们辨析、讨论、分析、联想等，可以有针对性地培养学生思维的严密性、深刻性、灵活性、广阔性、批判性、独创性，从而培养学生良好的数学思维品质.当然，提问技巧在培养学生对基本概念的理解、对基本技能的掌握上也有着很好的运用效果.

需要全本请访问 www.ertongbook.com