摇

QIAN YAN 前 言

亲爱的中学生朋友：

摆在你们面前的这本全新的教学辅导用书，是一群有实战经验的大朋友为你们在课堂上学好教材而编写的。课堂生活是你们学校生活的最基本构成，它的质量，直接影响着当下及今后你们的多方面发展和成长。请记住 选择一套好的课堂辅助用书，就如选好一个得力的学习“帮手”。

教学是由教与学两个主体的互动来完成的。传统的教辅用书，多以教师为中心，从教师的教出发去编写，忽视了学生作为学习主体的存在。为此，一本完全站在你们的角度，从你们课堂学习需要出发而设计的全新辅导用书——《中学教材标准学案》诞生了。

“学案”，顾名思义就是一种学习方案，它体现了对你们学习过程的规划、学习思路的梳理、学习方法的点拨、学习规律的总结、训练样题的设计。

“标准”，是说这套书内容的组织、材料的选择、流程的设计都是符合你们课堂学习及考试规律的。目前，你们的学习还不是完全独立的，要在教师的指导下进行 学习的内容也不是随意的，而是按照教学大纲精心选择的 课堂学习过程也是有目的、有计划、有组织进行的，不像日常生活可以任意安排。因此，我们在设计这套书时，抱定的宗旨是 与你们的课堂学习生活靠近些、再靠近些 标准些，再标准些。

在正式阅读本书正文之前，请仔细读读下面的阅读地图！

章节标题

预习导航	以填空、例题、设问、解答等多种方式帮助你预习教材，提取教材关键信息
通解设计	对教材进行逐字逐句逐段的详细解读，讲知识、讲概念、讲思路、讲方法——或是对线索脉络的梳理，或是对概念的阐释与运用，或是对内涵本质的挖掘与联系，或是对记忆、思维技巧的培养和导引。为突出其可操作性，强调的是案例举证式、解剖麻雀式的实例点评，并依据双栏双色设计，体现实例与点评之间的互动
整合全案	重组、综合、迁移教材所学知识，彰显高中学习的归纳意识、综合意识、反省意识、主干知识导学导练意识、试题编制与解析的权威意识、高考资讯的传递意识等
同步达标	高考重视同步性。A级题一看就懂，一做就会；B级题体现创新与应用，略有难度
本章综合检测	提供带有评分标准的规范考卷，进行过程性学习评价
本章习题答案	标明课本上的课后习题的页码及序号
本章高考试题精编	汇集高考名题，提供标准答案，明确考试方向，突出学习重点

考虑到学科特点，以上栏目有的略有不同。

同学们，本学案以你们课堂学习模式为标准，以你们的学习进步为己任，将不遗余力地引领你们走向成功的彼岸。

编摇者

[illegible]年 [illegible]月

摇 MU LU 目 录

第四章摇三角函数

源援员摇角的概念的推广

摇摇摇预习导航

要点扫描

灵郾我们规定,按摇摇摇摇摇方向旋转形成的角叫做正角,按摇摇摇摇摇方向旋转形成的角叫做负角援如果摇摇摇摇摇摇摇摇摇摇摇,我们称它形成了一个零角援角的概念经过这样的推广以后,就应该包括摇摇摇摇摇摇摇摇摇援

圆郾今后我们常在直角坐标系内讨论角,为此使角的顶点与原点重合,角的始边与 曾轴的非负半轴重合援如果摇摇摇摇摇摇摇摇摇摇,我们就说这个角是第几象限角援如果角的终边在坐标轴上,就认为这个角摇摇摇摇摇摇摇摇摇,我们不妨称之为轴线角援

猿郾所有与角 α 终边相同的角,连同角 α 在内,可以构成一个集合 杂越摇摇摇摇摇摇摇摇摇,即任一与角 α 终边相同的角,都可以表示成摇摇摇摇摇摇摇摇摇摇援

源郾在表达式 β 越α 垣噪 猿远园毅(噪 沂 在)中,当 噪越员时,角 β 越α 垣猿远园毅表示角 α 的终边按摇摇摇摇摇方向转摇摇摇周与原角 α 的终边重合,其角的度数摇摇摇 (填"增大"或"减小");当 噪越原圆时,β 越α 原园愿园毅表示摇摇摇摇摇摇摇摇摇摇摇摇摇摇摇摇援在角 β 越α 垣噪 猿远园毅(噪 沂 在)中,当 噪跃园时,表示角 α 的终边按摇摇摇摇时针旋转;当 噪约园时,表示角 α 的终边按摇摇摇摇时针旋转援

缘郾终边与 曾轴的非负半轴重合的角的集合为摇摇摇摇摇摇摇摇摇,终边与 曾轴的非正半轴重合的角的集合为摇摇摇摇摇摇摇摇摇摇,终边在 曾轴上的角的集合为摇摇摇摇摇摇摇摇摇摇摇摇,终边在 赠轴非负半轴上的角的集合为摇摇摇摇摇摇摇摇摇摇,终边在 赠轴非正半轴上的角的集合为摇摇摇摇摇摇摇摇摇摇摇,终边在 赠轴上的角的集合为摇摇摇摇摇摇摇摇摇摇摇援

远郾第一象限角的集合 杂员越摇摇摇摇摇摇摇摇摇摇摇摇摇摇摇摇摇摇摇摇摇摇,第二象限角的集合杂圆越摇摇摇摇摇摇摇摇摇摇摇摇摇摇摇摇摇摇摇摇摇摇摇摇摇摇摇,第三象限角的集合杂猿越摇摇摇摇摇摇摇摇摇摇摇摇,第四象限角的集合 杂源越摇摇摇摇摇摇摇摇摇摇摇摇摇摇援

苑郾锐角的取值范围是摇摇摇摇摇,它是第摇摇摇摇摇象限角援

关键信息

灵郾逆时针摇顺时针
一条射线没作任何旋转
正角、负角和零角

圆郾角的终边(除端点外)在第几象限
不属于任何象限

猿郾{β渣β越α 垣噪 猿远园毅,噪沂 在}
角 α 与整数个周角的和

源郾逆时针摇一摇增大
角 α 的终边按顺时针方向转两周与原角 α 的终边重合,其角的度数减小
逆摇顺

缘郾{α渣α越噪 猿远园毅,噪沂 在}
{α渣α越员愿园毅垣噪 猿远园毅,噪沂 在}
{α渣α越噪 员愿园毅,噪沂 在}
{α渣α越怨园毅垣噪 猿远园毅,噪沂 在} 摇 {α渣α越圆苑园毅垣噪 猿远园毅,噪沂 在} 摇 {α渣α越怨园毅垣噪 员愿园毅,噪沂 在}

远郾{α渣噪 猿远园毅约α 约怨园毅垣噪 猿远园毅,噪沂 在}
{α渣怨园毅垣噪 猿远园毅约α 约员愿园毅垣噪 猿远园毅,噪沂 在}
{α渣员愿园毅垣噪·猿远园毅约α 约圆苑园毅垣噪·猿远园毅,噪沂 在} 摇 {α渣圆苑园毅垣噪 猿远园毅约α 约(噪垣员)·猿远园毅,噪沂 在} 或写成 {α渣原怨园毅垣噪 猿远园毅约α 约噪 猿远园毅,噪沂 在}

苑郾{α渣园毅约α 约怨园毅} 摇一

摇摇摇**重点、难点聚焦**

● 重点、难点解析 摇

摇摇圆.角的概念推广的必要性

过去我们只研究 园毅~ 猿远园毅范围内的角,但在生活、生产和科学实验的实践中还会遇到其他的角援例如在体操、跳水等比赛中,有“转体二周”“转体三周半”等动作名称,他们转过的角度是多少度?再如在拧紧和拧松螺丝时,转动的角度如何表示比较合适?在很多实际问题中,角度可以不限于园毅~ 猿远园毅范围,且旋转方向也不同援因此我们有必要将角的概念进行推广援

圆.任意角的概念

角可以看成平面内一条射线绕着端点从一个位置旋转到另一个位置所成的图形援注意这里的“旋转”没有指明旋转几周,也没有指明旋转方向援

猿.正角、负角、零角

按逆时针方向旋转形成的角叫做正角,按顺时针方向旋转形成的角叫做负角 如果一条射线没有作任何旋转,我们称它形成了一个零角援如汽车前进时,车轮转动的角度是正角 汽车在倒车时,车轮转动的角度是负角 汽车静止时,车轮转动的角度是零角援

说明 正角、负角是用来表示具有相反意义的旋转量的援实际上正与负是相对的,其正、负规定出于习惯,就像正、负数的规定一样援

源.象限角与轴线角

(员)象限角

我们常在直角坐标系内讨论角,为此使角的顶点与原点重合,角的始边与 曾轴的非负半轴重合,那么角的终边(除端点外)在第几象限,我们就说这个角是第几象限角援例如 员猿缘毅是第二象限角,原猿园园毅是第四象限角援

说明 象限角的前提条件是 角的顶点与原点重合,角的始边与 曾轴的非负半轴重合援

(圆)轴线角

当角的顶点与坐标原点重合,角的始边与 曾轴的非负半轴重合时,如果角的终边在坐标轴上,就认为这个角不属于任一象限,我们称作轴线角援例如 园毅,怨园毅,员愿园毅,圆苑园毅,猿远园毅,原怨园毅等都是轴线角援

缘.终边相同的角

所有与角 α 终边相同的角,连同角 α 在内,可构成一个集合 杂越{β渣 β越α 垣噪·猿远园毅,噪∈在},即任一与角 α 终边相同的角,都可以表示成角 α 与整数个周角的和援

说明:(员)α 为任意角;(圆)噪·猿远园毅与 α 之间用“垣”连接,噪·猿远园毅原α 可以理解为 噪·猿远园毅垣(原α)(噪∈在);(猿)相等的角的终边一定相同,终边相同的角不一定相等,终边相同的角有无数个,它们相差 猿远园毅的整数倍援

为了更好地理解和掌握终边相同的角的概念和表示方法,我们应从“形”“数”两方面加以认识援

(员)从“形”到“数”的认识

按逆时针方向,角 α 的终边转一周与原角 α 的终边重合,此时角 β 越α 垣猿远园毅;角 α 的终边转两周与原角 α 的终边重合,此时角 β 越α 垣圆伊猿远园毅;按顺时针方向,角 α 的终边转一周与原角 α 的终边重合,此时角 β 越α 原猿远园毅;角 α 的终边转两周与原角 α 的终边重合,此时角 β 越α 垣(原圆)伊猿远园毅;如此类推,有角 β 越α 垣噪·猿远园毅(噪∈在)援

(圆)从“数”到“形”的认识

当 噪越员时,角 β 越α 垣猿远园毅,表示将角 α 的终边按逆时针方向转一周得到,其角的度数增加 猿远园毅;当 噪越圆时,角 β 越α 垣圆伊猿远园毅,表示将角 α 的终边按逆时针方向转两周得到,其角的度数增加 圆伊猿远园毅;当 噪越原员时,角 β

● 学法指导

摇摇【例 员】 时针走过 圆小时 源园分钟,则分针转过的角度是多少?

分析 分针每小时转一周,因为它是顺时针旋转,所以分针每小时转 原猿远园毅援

解 圆小时 源园分钟 越圆$\frac{圆}{猿}$小时,

原猿远园毅伊圆$\frac{圆}{猿}$越原怨远园毅,所以分针转过 原怨远园毅援

评注 时钟问题与现实生活联系很紧密,解题时一定要注意时钟上的指针都是顺时针方向转动,转过的角度是负角援

【例 圆】 下列说法中正确的是…………(摇摇)

粤.第一象限角是锐角

月.锐角是第一象限角

悦.小于 怨园毅的角是锐角

阅.园毅到 怨园毅的角是第一象限角

分析 本题涉及了几个基本概念,即“第一象限的角”“锐角”“小于 怨园毅的角”和“园毅到 怨园毅的角”援在角的概念推广以后,这些概念容易混淆援因此弄清楚这些概念及它们之间的区别,是正确解答本题的关键援

解 第一象限的角的集合可表示为 {θ渣噪·猿远园毅<θ<怨园毅垣噪·猿远园毅,噪∈在},锐角的集合可表示为 {θ渣园毅<θ<怨园毅},小于 怨园毅的角的集合为 {θ渣θ<怨园毅},园毅到 怨园毅的角的集合为 {θ渣园毅≤θ<怨园毅}援因此,锐角的集合是第一象限角的集合当 噪越园时的子集援故 粤、悦、阅均不正确,应选 月援

评注 “小于 怨园毅的角”不都是锐角,它还含有零角、负角,只有小于 怨园毅的正角才是锐角;“第一象限角”包含锐角及其他终边在第一象限的角;“园毅到 怨园毅的角”包含零角和锐角援

【例 猿】 在 园毅到 猿远园毅范围内,找出与下列各角终边相同的角,并指出它们是哪个象限的角援

(员)员园猿园毅;(圆)原缘缘园毅援

分析 判断一个角属于第几象限,通常表示为 α 垣噪·猿远园毅(园毅≤α<猿远园毅,噪∈在),只要判断 α 所在的象限即可援找 α 的方法主要是脱去 猿远园毅的整数倍援

解:(员)疫员园猿园毅越猿园毅垣猿伊猿远园毅,

亦与角 员园猿园毅终边相同的角是 猿园毅,它是第三象限角援

(圆)疫原缘缘园毅越员远园毅垣(原圆)伊猿远园毅,

亦 原缘缘园毅越员远园毅垣(原圆)伊猿远园毅援

亦与角 原缘缘园毅终边相同的角为 员远园毅,它是第一象限角援

评注 本例的目的是学生能在 园毅到 猿远园毅范围内,找出此范围外任何与已知角 β 终边相同的角 α,

越α 原猿园毅表示将角 α 的终边按顺时针方向转一周得到，其角的度数减少猿远园毅当 噪越原园时，角 β 越α 原园伊猿远园毅表示将角 α 的终边按顺时针方向转两周得到，其角的度数减少 园伊猿远园毅援在角 β 越α 垣噪 猿远园毅(噪沂 在 中，当 噪跃园时，表示角 α 的终边按逆时针旋转 噪周；当 噪约园时，表示角 α 的终边按顺时针旋转 渣噪渣周援

【例 员】 在 园毅～猿远园毅间与 原源园毅的终边相同的角是摇摇摇摇摇援

分析 先写出与 原源园毅角终边相同的角的集合，然后令 噪取适当的值，找出集合中在 园毅～猿远园毅间的角援

解 与 原源园毅终边相同的角的集合为 {β渣 越原源园毅垣噪 猿远园毅，噪沂 在} 援令 噪越员得 β 越源猿园毅；令 噪越园得 β 越源园毅援

所以在 园毅～猿远园毅间与 原源园毅终边相同的角是 猿园园毅和 远园毅援

摇摇【例 园】 下列各角中与 原远猿缘毅终边相同的角是 ………………（摇摇）

粤援原园远缘毅摇摇摇摇摇摇 摇 摇摇摇摇月援远猿缘毅摇摇摇

悦援原远缘毅摇摇摇摇 阅援原远缘毅

分析 判断两角终边是否相同，只要看两角的度数之差是否是 猿远园毅的整数倍援

解 疫员远缘毅原(原远猿缘毅) 越园远园毅越远伊猿远园毅，亦选 悦援

远援象限角的集合与轴线角的集合

(员) 象限角的集合

【例 猿】 写出第一象限角的集合援

解 第一步，在 园毅～猿远园毅范围内，终边在第一象限内角的取值范围是园毅约α 约怨园毅；第二步，在两个端点处加上 噪 猿远园毅(噪沂 在)，得第一象限角的集合为 {α渣噪 猿远园毅约α 约怨园毅垣噪 猿远园毅，噪沂 在}；

仿此步骤可得：

第二象限角的集合为 {α渣怨园毅垣噪 猿远园毅约α 约员愿园毅垣噪 猿远园毅，噪沂 在}；

第三象限角的集合为 {α渣员愿园毅垣噪 猿远园毅约α 约圆苑园毅垣噪 猿远园毅，噪沂 在}；

第四象限角的集合为 {α渣圆苑园毅垣噪 猿远园毅约α 约猿远园毅垣噪 猿远园毅，噪沂 在}，也可写为 {α渣原怨园毅垣噪 猿远园毅约α 约噪 猿远园毅，噪沂 在}援

(圆) 轴线角的集合

终边落在 曾轴的非负半轴上，角的集合为 {α渣 越噪 猿远园毅，噪沂 在}；

终边落在 曾轴的非正半轴上，角的集合为 {α渣 越员愿园毅垣噪 猿远园毅，噪沂 在}；

终边落在 曾轴上，角的集合为 {α渣 越噪 员愿园毅，噪沂 在}；

终边落在 赠轴的非负半轴上，角的集合为 {α渣 越怨园毅垣噪 猿远园毅，噪沂 在}；

终边落在 赠轴的非正半轴上，角的集合为 {α渣 越圆苑园毅垣噪 猿远园毅，噪沂 在}；

终边落在 赠轴上，角的集合为 {α渣 越怨园毅垣噪 员愿园毅，噪沂 在}；

终边落在坐标轴上，角的集合为 {α渣 越噪 怨园毅，噪沂 在}援

(猿) 说明：①象限角与轴线角的集合的表示形式并不唯一，还有其他的表示形式；

②终边落在 曾轴上的角的集合的求解过程如下：

{α渣 越噪 猿远园毅，噪沂 在} ∪ {α渣 越员愿园毅垣噪 猿远园毅，噪沂 在}

越{α渣 越圆噪 员愿园毅，噪沂 在} ∪ {α渣 越(圆噪垣员) · 员愿园毅，噪沂 在}

越{α渣 越噪 员愿园毅，噪沂 在} 援

此解法的依据是 {奇数} ∪ {偶数} 越{整数}，其求解的思想方法在今后求并角的集合或拆角的集合时经常用到援

【例 源】 终边落在直线 赠越曾上的角的集合援

分析 在 园毅到 猿远园毅范围内，终边在直线 赠越曾上的角有两个，即 源缘毅和 圆圆缘毅，先分别写出与 源缘毅、圆圆缘毅角终边相同的角的集合，再合并援

解 终边落在射线 赠越曾(曾≥园) 上的角的集合为 {α渣 越源缘毅垣噪 猿远园毅，噪沂 在} 越{α渣 越源缘毅垣圆噪 员愿园毅，噪沂 在}；

终边落在射线 赠越曾(曾≤园) 上的角的集合为 {α渣 越圆圆缘毅垣噪 猿远园毅，噪沂 在} 越{α渣 越源缘毅垣(圆噪垣员) · 员愿园毅，噪沂 在}援

并判定其为第几象限角援这类题是为以后学习打基础的，应用非常广泛援寻找角 α 的方法是脱去周角的整数倍援对于负角 β，可先确定 渣 渣所在的区间(灶· 猿远园毅，(灶垣员) · 猿远园毅) (灶沂 晕)，然后写出表达式β 越α 原(灶垣员) · 猿远园毅，此时 园毅≤α 约猿远园毅援

【例 源】 若角 α、β 的终边互为反向延长线，则 α 与 β 的关系一定是 ……………………………（摇摇）

粤援α 越原β

月援α 越噪 猿远园毅垣β，噪沂 在

悦援α 越员愿园毅垣β

阅援α 越β 垣(圆噪垣员) · 员愿园毅，噪沂 在

摇摇分析 对于 粤，角 α 与 β 的终边关于 曾轴对称，一般情况下它们的终边不互为反向延长线；在 月中，角 α 与 β 是终边相同的角；在 悦中，角 α 与 β 的终边虽然互为反向延长线，但互为反向延长线的两个角不仅仅相差 员愿园毅，还可能在此基础上相差 猿远园毅的整数倍，即 α 越员愿园毅垣β 垣噪 猿远园毅越β 垣(圆噪垣员) 伊员愿园毅(噪沂 在)，所以选 阅援

评注 如果两个角的终边互为反向延长线，也就是终边关于原点对称，那么这两个角就相差 员愿园毅的奇数倍援

【例 缘】 若角 α 的终边与 远园毅角的终边相同，试写出 园毅～猿远园毅内与$\frac{\alpha}{猿}$角的终边相同的角援

分析 先写出角 α 的表达式，再求出$\frac{\alpha}{猿}$的表达式，最后写出在 园毅～猿远园毅内且符合$\frac{\alpha}{猿}$的表达式的所有角援

解 疫α 越远园毅垣噪 猿远园毅，噪沂 在，

亦$\frac{\alpha}{猿}$ 越圆园毅垣噪 员圆园毅，噪沂 在援

又由 园毅≤圆园毅垣噪 员圆园毅约猿远园毅，得 原$\frac{员}{远}$≤噪约圆$\frac{缘}{远}$援

疫噪沂 在，亦噪越园，员，圆，由此求出在 园毅～猿远园毅内与$\frac{\alpha}{猿}$终边相同的角为 圆园毅，员源园毅，圆远园毅援

评注 在求给定范围内的角时，要对 噪的各种可能取值都考虑到，为此可用解不等式的方法，求出 噪的范围援

【例 远】 (员) 集合 粤越{α渣 越(源灶垣员) · 员愿园毅垣猿远园毅，灶沂 在}，月越{β渣 越(圆灶垣员) · 员愿园毅垣猿远园毅，灶沂 在}，则

…………………………………………………………（摇摇）

粤援粤越月 摇摇摇摇摇月援粤≠月 摇摇

悦援粤≠月 摇摇 阅援粤≤月

(圆) 设 粤越{α渣 越皂· 远园毅，皂沂 在}，月越{β渣 越灶· 怨园毅，灶沂 在}，则 粤∩月越摇摇摇摇摇摇援

分析：(员) 要判断两个集合的关系，可以从角的表达式中的不同之处入手；(圆) 先对 皂、灶取些特殊值，找出交集中的一些元素，观察规律援

于是，终边落在直线 赠越曾上的角的集合为

{α渣 越廉毅垣圆噪 员愿园毅噪 在 } ∪ {α渣 越廉毅垣(圆噪垣员) · 员愿园毅噪 在 }

越{α渣 越廉毅垣噪 员愿园毅噪 在 } 援

评注 :与 α 角的终边在一条直线上的角的集合为 {β渣 越α 垣噪 · 员愿园毅噪 在 } 援

解 :(员) 两个集合的不同之处是 源灶与 圆灶,圆灶表示 圆与所有的整数之积,源灶越圆(圆灶) 表示 圆与所有偶数之积,所以有 粤$\subsetneqq$月援

(圆) 在 [园毅,猿远园毅) 内,集合 粤中的元素有 园毅,远园毅,员圆园毅,员愿园毅,圆源园毅,猿园园毅;集合 月中的元素有 园毅,怨园毅,员愿园毅,圆苑园毅,猿远园毅 其中公共元素有 园毅,员愿园毅,猿远园毅援

亦粤$\cap$月越{θ渣 越噪 员愿园毅噪 在 } 援

评注 :对于 (员) 还可以对角的表达式作如下变形 :α 越圆灶· 猿远园毅垣圆园远毅,β 越灶· 猿远园毅垣圆园远毅援(圆) 中粤$\cap$月中的角实际上就是 远园毅与 怨园毅的最小公倍数的整数倍援

摇摇摇整合与扩展

摇摇援圆在直角坐标系内，角 α 垣β (β 跃园) 的终边可以看作是将角 α 的终边按逆时针方向旋转 β 角得到的，角 α 原β (β 跃园) 的终边可以看作是将角 α 的终边按顺时针方向旋转 β 角得到的援

圆援终边对称的两角的关系

角 α 与 β 的终边关于 曾轴对称，则 α 与 β 的关系为 α 越噪 猿缘园毅原β，噪 在；

角 α 与 β 的终边关于 赠轴对称，则 α 与 β 的关系为 α 越噪 猿缘园毅垣员愿园毅原β，噪 在；

角 α 与 β 的终边关于原点对称 (即 α 与 β 的终边互为反向延长线)，则 α 与 β 的关系为 α 越噪 猿缘园毅垣员愿园毅垣β，噪 在援

【例 员】 角 α、β 的终边关于第二、四象限的角平分线对称，且 α 越原愿园毅，求角 β援

分析 画出图形，借助平面几何知识，先求出符合题意的角 β 的一个代表值，然后再加上 噪 猿缘园毅(噪 在) 即可援

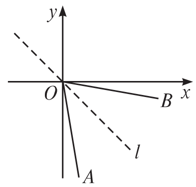


图 源-员-员

解 画出第二、四象限的角平分线 造，设 韵粤 是角 α 的终边，韵月 是角 β 的终边，韵粤 与 韵月 关于直线 造 对称援因为 ∠ 曾韵粤 越原愿园毅，所以 ∠ 曾韵月 越原员园毅，即 β 的一个代表值为 原员园毅，所以 β 越原员园毅垣噪 猿缘园毅(噪 在) 援

评注：(员) 本题借助数形结合的思想方法求解，直观易懂援

(圆) 若角 α、β 的终边关于第一、三象限的角平分线对称，则 α 垣β 越怨园毅垣噪 猿缘园毅(噪 在) ；若角 α、β 的终边关于第二、四象限的角平分线对称，则 α 垣β 越原怨园毅垣噪 猿缘园毅(噪 在) 援

猿援半角所在象限

已知角 α 所在象限，则 $\frac{\alpha}{圆}$ 所在象限可以用下表表示

α	第一象限	第二象限	第三象限	第四象限
$\frac{\alpha}{圆}$	第一、三象限的前半区域	第一、三象限的后半区域	第二、四象限的前半区域	第二、四象限的后半区域

摇摇上述结论也可以用图 源-员-圆 表示援将各象限二等分，从 曾轴的正半轴开始，按逆时针方向将各区域依次标上数码 员、圆、猿、源援若 α 在第三象限，则 $\frac{\alpha}{圆}$ 就在图 源-员-圆 中标号为 猿 的区域内，即第二、四象限的前半区域援

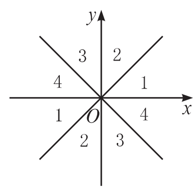


图 源-员-圆

【例 圆】 若 α 是第二象限角，求 $\frac{\alpha}{圆}$ 是第几象限角援

分析 先写出 α 角的范围，再求出 $\frac{\alpha}{圆}$ 角的范围，找出 $\frac{\alpha}{圆}$ 角所在的象限援

解 疫α 是第二象限角，

亦怨园毅垣噪 猿缘园毅约α 约员愿园毅垣噪 猿缘园毅，噪 在援

亦源缘毅垣噪 员愿园毅约$\frac{\alpha}{圆}$ 约怨园毅垣噪 员愿园毅，噪 在援

当 噪 为偶数时，设 噪越圆灶(灶 在)，源缘毅垣灶 猿缘园毅约$\frac{\alpha}{圆}$ 约怨园毅垣灶 猿缘园毅，则 $\frac{\alpha}{圆}$ 为第一象限角；

当 噪 为奇数时，设 噪越圆灶垣员(灶 在)，源缘毅垣(圆灶垣员) · 员愿园毅约$\frac{\alpha}{圆}$ 约怨园毅垣(圆灶垣员) · 员愿园毅，

即 圆圆缘毅垣灶 猿缘园毅约$\frac{\alpha}{圆}$ 约圆苑园毅垣灶 猿缘园毅，

则 $\frac{\alpha}{圆}$ 是第三象限角援

亦 $\frac{\alpha}{圆}$ 是第一或第三象限角援

源援把终边相同的角或者某范围内的角用集合和符号语言正确地表示出来是本节的难点援为了更好地掌握它，更深刻地理解它，数形结合是较为有效的方法援平时还要多总结，对一些常用结论要熟记，对常用方法要能灵活运用援

【例 猿】 如图 源-员-猿，写出终边落在阴影部分的角的集合 (包括边界) 援

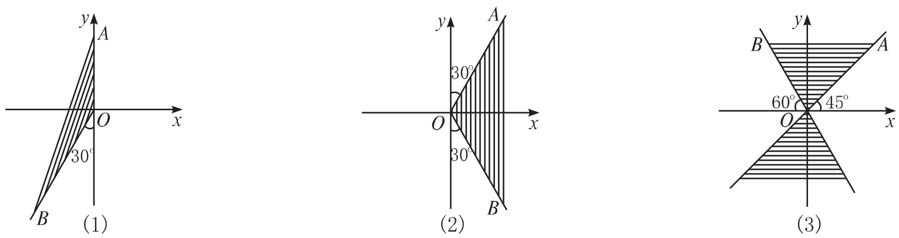


图 源-员-猿

分析 要写出终边落在阴影部分的角的集合，首先要写出终边落在阴影边界上的角，再运用旋转的方法，写出终边落在阴影部分的所有角的集合援

解：(员 疫终边为 韵粤的一个角为 怨园毅终边为 韵月的一个角为 圆园园毅阴影部分可以看成是由 韵粤逆时针旋转到 韵月所形成的，

亦在 [园毅，猿远园毅) 上落在阴影部分的角的集合为 [怨园毅，圆园园毅]，

亦终边落在阴影部分的角的集合为 {α 渣怨园毅垣噪·猿远园毅≤α≤圆园园毅垣噪·猿远园毅，噪∈在} 援

(圆 疫终边为 韵粤的一个角为 远园毅终边为 韵月的一个角为 原源缘毅阴影部分可以看成是 韵月逆时针旋转到 韵粤所形成的援

亦在 [原员愿园毅，员愿园毅) 上落在阴影部分的角的集合为 [原源缘毅，远园毅]，

亦终边落在阴影部分的所有角的集合为 {α 渣原源缘毅垣噪·猿远园毅≤α≤远园毅垣噪·猿远园毅，噪∈在} 援

(猿 疫在 [园毅，猿远园毅) 内落在阴影部分的角的集合为 [源缘毅，员猿缘毅] ∪ [圆圆缘毅，猿员缘毅]，

亦终边落在阴影部分的角的集合为 {α 渣源缘毅垣噪·猿远园毅≤α≤员猿缘毅垣噪·猿远园毅，噪∈在} ∪ {α 渣圆圆缘毅垣噪·猿远园毅≤α≤猿员缘毅垣噪·猿远园毅，噪∈在} 越{α 渣源缘毅垣噪·员愿园毅≤α≤员猿缘毅垣噪·员愿园毅，噪∈在} 援

评注：(员 用集合表示坐标系中终边落在某一区域的角，首先要看阴影区域是否跨越 曾轴的正半轴援如果阴影区域不跨越 曾轴的正半轴，则首先在 [园毅，猿远园毅) 内找出终边落在阴影部分角的集合 [α，β]，最后在两端都加上 噪·猿远园毅(噪∈在)，即得终边落在阴影部分的所有角的集合，如第 (员 题援如果阴影区域跨越 曾轴的正半轴，则只是将 [园毅，猿远园毅) 换成 [原员愿园毅，员愿园毅) 或 [原圆苑园毅，怨园毅)，其他均与上一种情况类似，如第 (圆 题，注意不要出现这样的典型错误写法：{α 渣猿员缘毅垣噪·猿远园毅≤α≤远园毅垣噪·猿远园毅，噪∈在} 援

(圆 如果阴影区域是直线型的对顶角区域，如第 (猿 题，可以把图中 曾轴下方的阴影区域看成是 曾轴上方的阴影区域绕原点 韵旋转 员愿园毅而得到的，因此先写出范围 源缘毅≤α≤员猿缘毅然后再在两端都加上 噪·员愿园毅(噪∈在) 即可援

摇摇摇同步达标

粤组

一、选择题

员援在 园毅到 猿远园毅范围内与 原员园园园毅角终边相同的角是 …（摇摇）

粤援源园毅摇摇摇摇月援远园毅摇摇摇摇悦援愿园毅摇摇摇摇阅援员源园毅

圆援给出下列四个命题，其中正确的有 ……………………（摇摇）

① 原苑缘毅是第四象限的角摇②圆圆缘毅是第三象限的角摇③源苑缘毅是第二象限的角摇④ 原猿员缘毅是第一象限的角

粤援员个摇摇摇摇月援圆个摇摇摇摇悦援猿个摇摇摇摇阅援源个

猿援下列各角中不是第二象限角的是 ………………………（摇摇）

粤援员缘园毅摇摇摇摇月援远猿园毅摇摇摇摇悦援原员缘园毅摇摇摇摇阅援原猿园园毅

源援角 α 的终边经过点 孕(原猿，圆)，则角 α 是 …………（摇摇）

粤援第三象限角摇摇摇摇月援第二象限角

悦援第二象限或第三象限角摇摇摇摇阅援不属于任何象限角

缘援“θ 是第一象限角”是“θ 为锐角”的 …………………（摇摇）

粤援充分不必要条件摇摇摇摇月援必要不充分条件

悦援充要条件摇摇摇摇阅援既不充分也不必要条件

远援下列说法中，正确的是 ………………………………（摇摇）

粤援第二象限的角是钝角

月援第三象限的角必大于第二象限的角

悦援原愿猿员毅是第二象限的角

阅援原怨缘毅员园′，怨愿源毅猿园′，圆远源毅猿园′是终边相同的角

二、填空题

苑援若角 α 的终边在第二、四象限的角平分线上，则 圆α 的终边在摇摇摇摇摇援

愿援已知角 圆α 的终边在 曾轴的下方，那么角 α 是第摇摇摇摇摇象限的角援

怨援与 猿苑园毅角终边在一条直线上的角的集合为摇摇摇摇摇摇援

员园援若角 猿α 与 圆园园毅角的终边相同，则 α 越摇摇摇摇摇摇援

三、解答题

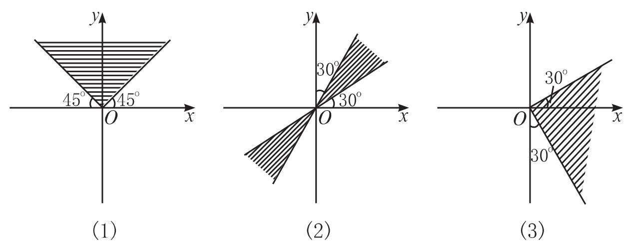
员员援已知 α 越原员怨怨园毅(员 把 α 改成 β 垣噪·猿远园毅(噪∈在，园毅≤β 约猿远园毅) 的形式；

(圆 求角 θ，使 θ 与 α 的终边相同，且 原猿远园毅≤θ 约猿远园毅并判断 θ 属于第几象限角援

员圆援已知角 α 是第二象限角，求角 圆α 是第几象限角援

员猿援设 酝越$\left\{\begin{array}{l}员愿园毅 曾\\ 枣曾 原员 原员愿园毅\end{array}\right.$ 摇(曾≤园，(曾>园，α 越枣(员/猿)，求 α，并判断 α 是第几象限角援

员源援写出终边在下列阴影部分内的角的集合 (包括边界) 援



图源-员-源

月组

一、选择题

猿援已知角 α、β 的终边相同，那么 α 原β 的终边在 ……（摇摇）

粤援曾轴的非负半轴上摇摇摇摇月援曾轴的非负半轴上

憎援曾轴的非正半轴上　　阅援曾轴的非正半轴上

圆援与 原源远猿毅角终边相同的角的集合是 ……（摇摇）

粤援{α 渣 越 源远猿毅垣噪 猿远园毅，噪∈在}

月援{α 渣 越 缘远猿毅垣噪 猿远园毅，噪∈在}

憎援{α 渣 越圆缘猿毅垣噪 猿远园毅，噪∈在}

阅援{α 渣 越 原圆缘猿毅垣噪 猿远园毅，噪∈在}

猿援若 α 为锐角，原α 垣噪 员愿园毅（噪∈在）所在的象限是 …………（摇摇）

粤援第二象限　　月援第四象限

憎援第一、三象限　　阅援第二、四象限

源援集合 粤越{α 渣 越 怨园毅垣噪 猿远园毅，噪∈在}，月越{β 渣 越 怨园毅垣噪 猿远园毅，噪∈在}，悦越{γ 渣 越 怨园毅垣噪 员愿园毅，噪∈在}，那么集合 粤 月 悦之间的关系是 ……（摇摇）

粤援月⊂粤⊂悦　　月援粤⊂月⊂悦

憎援月⊂悦⊂粤　　阅援悦⊂月⊂粤

缘援如果 α 是第一象限角，则 原$\frac{\alpha}{圆}$是 ……（摇摇）

粤援第一象限角　　月援第一、四象限角

憎援第二象限角　　阅援第二、四象限角

远援在直角坐标系中，若 α 与 β 的终边互相垂直，那么 α 与 β 的关系式为 ……（摇摇）

粤援 越α 垣怨园毅　　月援 越α 依怨园毅

憎援 越α 垣怨园毅垣噪 猿远园毅　　阅援 越α 依怨园毅垣噪 猿远园毅

二、填空题

苑援时针走过 猿小时 圆园分钟，则分针所转过的角的度数是摇摇摇，时针所转过的角的度数是摇摇摇摇摇援

愿援命题：①终边相同的角不一定相等；②若 α 是锐角，则 圆α 是第一或第二象限角；③若锐角 α、β 满足 α 约β，则 β 原α 必为锐角援其中正确的命题为摇摇摇摇摇援

怨援若集合 粤越{α 渣怨园毅垣噪 员愿园毅约α 约怨园毅垣噪 员愿园毅，噪∈在}，集合 月越{β 渣原源缘毅垣噪 猿远园毅约β 约源缘毅垣噪 猿远园毅，噪∈在}，则 粤∩月越摇摇摇摇摇援

员园援已知角 α 的终边与 原远怨园毅角的终边关于 赠轴对称，其中绝对值最小的角 α 越摇摇摇摇摇援

三、解答题

员员援与 原员怨怨园毅终边相同且绝对值最小的角是多少度？

员圆援已知 园毅约θ 约猿远园毅且 苑θ 与 θ 的终边重合，试求这个角 θ援

员猿援画出直角坐标系，根据所给集合，用阴影部分表示角 α 的终边所在的位置援

(员) {α 渣猿园毅垣噪 猿远园毅≤α≤员缘园毅垣噪 猿远园毅，噪∈在}；

(圆) {α 渣猿园毅垣噪 员愿园毅≤α≤员缘园毅垣噪 员愿园毅，噪∈在}援

员源援若角 α 的终边落在射线 赠越猿曾(曾≥园)与 赠越原猿曾(曾≤园)所夹的大区域内（包括边界），求角 α 的集合援

摇摇摇应用样板

员援(第三届“希望杯”邀请赛高一第一试)已知 α 是第二象限角，则$\frac{\alpha}{猿}$的终边 ……（摇摇）

粤援不在第四象限 摇摇摇摇

月援不在第三象限

憎援不在第二象限

阅援不在第一象限

圆援(圆园园缘年高考模拟题)已知集合 酝越{第二象限的角}，晕越{钝角}，孕越{大于 怨园毅的角}，则下列关系正确的是 …（摇摇）

粤援酝越晕越孕

月援酝∩孕越晕

憎援晕⊊酝∩孕

阅援晕⊊酝⊊孕

猿援(圆园园缘年高考模拟题) α 是第一象限的角，则第四象限的角是 ……（摇摇）

[illegible] α [illegible] α

[illegible] α [illegible] α

摇●名师解密

摇摇晕援分析 本题主要考查象限角的概念援

由已知得怨园毅垣噪·猿远园毅约α约员愿园毅垣噪·猿远园毅，噪∈在,

亦猿缘毅垣噪·员愿园毅约$\frac{\alpha}{猿}$约远园毅垣噪·员圆园毅，噪∈在.

当噪越猿灶（灶∈在）时，猿园毅垣灶·猿远园毅约$\frac{\alpha}{猿}$约远园毅垣灶·猿远园毅，

猿园毅约$\frac{\alpha}{猿}$是第一象限角；

当噪越猿灶垣员（灶∈在）时，猿缘园毅垣灶·猿远园毅约$\frac{\alpha}{猿}$约

远园毅垣（猿灶垣员）·员圆园毅即员缘园毅垣灶·猿远园毅约$\frac{\alpha}{猿}$约员愿园毅垣灶·猿远园毅，

猿园毅约$\frac{\alpha}{猿}$是第二象限角；

当噪越猿灶垣圆（灶∈在）时，猿缘园毅垣（猿灶垣圆）·员圆园毅约$\frac{\alpha}{猿}$约

远园毅垣（猿灶垣圆）·员圆园毅即圆苑园毅垣灶·猿远园毅约$\frac{\alpha}{猿}$约猿园园毅垣灶·猿远园毅，

猿园毅约$\frac{\alpha}{猿}$是第四象限角援所以选月援

圆援阅分析 本题主要考查任意角以及集合的有关基础知识援

第二象限的角不一定大于怨园毅，大于怨园毅的角也不一定是第二象限角，因此粤、阅都不对援栽∩孕越{α渣圆园园毅垣噪·猿远园毅约α约猿远园毅垣噪·猿远园毅，噪∈晕}，而钝角则是噪越园时的情形援所以选悦援

猿援阅分析 本题考查象限角的概念援

由已知得噪·猿远园毅约α约怨园毅垣噪·猿远园毅，噪∈在，亦原怨园毅原噪·猿远园毅约原α约原噪·猿远园毅，猿远园毅原噪·猿远园毅约猿远园毅原α约猿远园毅原噪·猿远园毅，噪∈在，亦猿远园毅原α是第四象限角援所以选悦援

源援圆摇弧度制

摇摇摇预习导航

员援用摇摇摇作为单位来度量角的单位制叫做角度制，用摇摇摇摇作为单位来度量角的单位制叫做弧度制援规定摇摇摇摇摇为员度的角，我们把摇摇摇摇摇摇摇摇摇摇摇叫做员弧度的角援

圆援正角的弧度数是一个摇摇摇摇摇数，负角的弧度数是一个摇摇摇摇摇数，零角的弧度数是摇摇摇摇摇援

猿援如果造是以角α作为圆心角时所对弧的长，则是圆的半径，则α的弧度数的绝对值渣α渣越摇摇摇摇摇摇摇援

源援员愿园毅越摇摇摇摇摇摇糟葬凿，员毅越摇摇摇摇摇摇糟葬凿，员糟葬凿越摇摇摇摇摇度援

缘援

度	园毅	猿园毅	源缘毅	远园毅	怨园毅	员圆园毅	员猿缘毅	员缘园毅	员愿园毅	圆苑园毅	猿远园毅
弧度											

远援设造是扇形的弧长，它所对的圆心角是α弧度，则是圆的半径，则弧长公式造越摇摇摇摇摇，扇形面积公式杂越摇摇摇摇摇越摇摇摇摇摇摇援

苑援用弧度制表示：与α终边相同的角（连同α在内）的集合为摇摇摇摇摇摇摇摇援

愿援用弧度制表示：

（员）终边在曾轴上的角的集合为摇摇摇摇摇；

（圆）终边在赠轴上的角的集合为摇摇摇摇摇摇援

怨援用弧度制写出第一象限角的集合杂$_{员}$越摇摇摇摇摇摇摇摇摇摇摇，第二象限角的集合杂$_{圆}$越摇摇摇摇摇摇摇摇摇摇摇，第三象限角的集合杂$_{猿}$越摇摇摇摇摇摇摇摇摇摇摇，第四象限角的集合杂$_{源}$越摇摇摇摇摇摇摇摇摇摇摇援

员援度摇弧度摇周角的$\frac{员}{猿远园}$

圆援长度等于半径长的弧所对的圆心角

猿援$\frac{造}{则}$

源援π摇$\frac{\pi}{员愿园}$摇$\frac{员愿园}{\pi}$

缘援园摇$\frac{\pi}{远}$摇$\frac{\pi}{源}$摇$\frac{\pi}{猿}$摇$\frac{\pi}{圆}$摇$\frac{圆}{猿}\pi$摇$\frac{猿}{源}\pi$摇$\frac{缘}{远}\pi$摇π摇$\frac{猿}{圆}\pi$摇圆π

远援渣α渣·则摇$\frac{员}{圆}$造则摇$\frac{员}{圆}$渣α渣则^{圆}

苑援{β渣β越α垣圆噪π，噪∈在}

愿援（员）{α渣α越噪π，噪∈在}

（圆）{α渣α越$\frac{\pi}{圆}$垣噪π，噪∈在}

怨援{α渣圆噪π约α约$\frac{\pi}{圆}$垣圆噪π，噪∈在}摇{α渣$\frac{\pi}{圆}$垣圆噪π约α约π垣圆噪π，噪∈在}摇{α渣π垣圆噪π约α约$\frac{猿}{圆}\pi$垣圆噪π，噪∈在}摇{α渣$\frac{猿}{圆}\pi$垣圆噪π约α约圆π垣圆噪π，噪∈在}

摇摇摇重点、难点聚焦

● 重点、难点解析 摇 & 摇

摇摇灵鄄弧度制

长度等于半径长的弧所对的圆心角叫做 员弧度的角援用弧度作为单位来度量角的单位制叫做弧度制援在弧度制下,员弧度记作 员则援

圆鄄弧度数

一般地,正角的弧度数是一个正数,负角的弧度数是一个负数,零角的弧度数是 园援角 α 的弧度数的绝对值渣渣越$\frac{造}{则}$,其中 造是以角 α 作为圆心角时所对弧的长,则是圆的半径援

例如,当弧长 造越$\frac{圆}{猿}$则且所对的圆心角是负角时,这个圆心角的弧度数是 原$\frac{造}{则}$越原$\frac{圆}{猿}$援

猿鄄角度与弧度之间的互化

(员 在弧度制下圆周角为 圆仔 则葬凿而角度制下圆周角为 猿远园毅所以有 圆仔 则葬凿越猿远园毅即 π 则葬凿越员愿园毅进而得

员毅越($\frac{\pi}{员愿园}$) 则葬凿≈园援园员苑源缘则葬凿

员则葬凿越($\frac{员愿园}{\pi}$) 毅≈缘苑援猿园毅越缘苑毅员愿忆援

例如,原猿园毅越原$\frac{\pi}{员愿园}$则葬凿伊猿园越原$\frac{源}{缘}\pi$ 则葬凿

$\frac{员园}{远}\pi$ 则葬凿越$\frac{员园}{远}$伊员愿园毅越猿园园毅援

(圆 一些特殊角的弧度数与度数的对应表:

度	园毅	猿园毅	源缘毅	远园毅	怨园毅	员圆园毅	员猿缘毅	员缘园毅	员愿园毅	圆苑园毅	猿远园毅
弧度	园	$\frac{\pi}{远}$	$\frac{\pi}{源}$	$\frac{\pi}{猿}$	$\frac{\pi}{圆}$	$\frac{圆}{猿}\pi$	$\frac{猿\pi}{源}$	$\frac{缘}{远}\pi$	π	$\frac{猿}{圆}\pi$	圆π

摇摇(猿 说明

①用弧度制表示角的时候,“弧度”二字或“则葬凿”通常略去不写,而只写这个角所对应的弧度数援例如泽蚤灶圆表示 员则葬凿角的正弦值,泽蚤灶$\frac{\pi}{源}$越泽蚤灶源缘毅越$\frac{\sqrt{圆}}{圆}$;但如果以度(毅为单位表示角时,度(毅不能省略援

②用弧度为单位表示角时,常常把弧度数写成多少 π 的形式,如无特殊要求,不必把 π 写成小数援例如,源缘毅越$\frac{\pi}{源}$则葬凿不必写成 源缘毅≈园援苑愿缘则葬凿援

③角度与弧度也可以用科学计算器进行换算援

源鄄弧度制下角的集合

(员 所有与角 α 终边相同的角,连同角 α 在内,可构成一个集合 杂越{β渣β越α垣圆噪仔,噪∈在},即任一与角 α 终边相同的角,都可以表示成角 α 与整数个周角 圆仔 的和援

【例 员】 下列各对角中,终边相同的是 …(摇摇)

粤郾$\frac{\pi}{圆}$与 原$\frac{\pi}{圆}$垣圆噪仔(噪∈在)

● 学法指导

摇摇【例 员】 若将时针拨快 圆园分钟,则分针转过的弧度数为……(摇摇)

粤郾原$\frac{圆}{猿}\pi$摇 摇摇月郾$\frac{圆}{猿}\pi$摇 摇摇摇悦郾原$\frac{\pi}{猿}$摇 摇摇摇阅郾$\frac{\pi}{猿}$

分析:将时针拨快 圆园分钟,相当于分针旋转了$\frac{员}{猿}$个圆周,还应注意旋转方向援

解:疫圆园分钟越$\frac{员}{猿}$小时,每小时分针转过 原圆仔 则葬凿亦拨快 圆园分钟分针转过的弧度数为$\frac{员}{猿}$伊(原圆仔) 越原$\frac{圆}{猿}\pi$援

评注:此题也可先求出分针转过的度数:$\frac{员}{猿}$伊(原猿远园毅) 越原员圆园毅再将其化为弧度数:原员圆园伊$\frac{\pi}{员愿园}$越原$\frac{圆}{猿}\pi$援

【例 圆】 把下列各角化成 α 垣圆噪仔(园≤α 约圆仔,噪∈在)的形式,并指出它们是第几象限角援

(员) 原员缘园猿毅;(圆) 圆园园园毅;(猿) 原远;(源) 原$\frac{猿怨}{苑}\pi$援

分析:从角度制下终边相同的角及象限角的表达形式入手,结合角度制与弧度制的换算是解本题的关键援

解:(员) 原员缘园猿毅越原员愿园园毅垣圆怨苑毅越原员园仔 垣$\frac{缘猿}{猿}\pi$,

亦 原员缘园猿毅为第四象限角援

(圆) 圆园园园毅 越缘仔 垣圆园园毅,亦圆园园园毅 不属于任何象限角援

(猿) 原远越原圆仔 垣(圆仔 原远),疫$\frac{\pi}{圆}$约圆仔 原远约仔,亦圆仔 原远是第二象限角援

亦 原远是第二象限角援

(源) 疫 原$\frac{猿怨}{苑}\pi$ 越原远仔 垣$\frac{猿}{苑}\pi$援亦 原$\frac{猿怨}{苑}\pi$ 与$\frac{猿}{苑}\pi$终边相同,亦 原$\frac{猿怨}{苑}\pi$ 是第三象限角援

评注:(员) 对于第(员) 题,也可以先将 原员缘园猿毅化成弧度,再化成 α 垣圆噪仔 的形式,即 原员缘园猿毅越原$\frac{员缘园猿}{猿}\pi$ 越原员园仔 垣$\frac{缘猿}{猿}\pi$援

如果题目条件没将 α 限制在区间 [园,圆仔] 内,我们也经常采用下列化法:原员缘园猿毅越原$\frac{员缘园猿}{猿}\pi$ 越原愿仔 原$\frac{\pi}{猿}$援

(圆) 用弧度制表示终边相同的角 θ 越α 垣圆噪仔(噪∈在) 时,应将 θ 写成 α 与 π 的偶数倍之和援对于(源),若把 原$\frac{猿怨}{苑}\pi$ 表示为 原缘仔 垣$\frac{\pi}{苑}$,就认为 原$\frac{猿怨}{苑}\pi$ 与$\frac{\pi}{苑}$终边相同是错误的援

【例 猿】 将 曾轴的非负半轴绕着原点 韵以 θ 则葬凿/泽(弧度/秒) (园约θ 约仔) 的速度逆时针旋转,经过 圆泽到达第二象限,第 员源泽回到原来位置,求 θ援

分析:“经过 圆泽到达第二象限”,即“圆θ 是第二象限角”援“第 员源泽回到原来位置”,即“角 员源θ 的终边与 曾轴的非负半轴重合”援

解:疫$\frac{\pi}{圆}$垣圆噪仔 约圆θ 约仔 垣圆噪仔,噪∈在,又 园约θ 约仔,亦噪越园,$\frac{\pi}{圆}$约圆θ 约

π，得$\frac{\pi}{源}$约θ约$\frac{\pi}{圆}$援

第 员源泽轴非负半轴转过的角是 员源 则由已知得 员源 越圆仔 （灶 $\in$ 在），

摇摇月郾原$\frac{苑\pi}{怨}$与$\frac{员远\pi}{怨}$

怳郾原$\frac{\pi}{猿}$与$\frac{圆\pi}{猿}$

阅郾$\frac{圆\pi}{猿}$与$\frac{员源\pi}{怨}$

分析 判断两角的终边是否相同,只需看两角是否相差 圆π 的整数倍,即 π 的偶数倍援

解 疫$\frac{员远\pi}{怨}$原(原$\frac{苑\pi}{怨}$) 越圆π,亦选 月援

(圆 第一象限角的集合为 {α 渣圆噪π 约α 约$\frac{\pi}{圆}$ 垣圆噪π,噪∈在};

第二象限角的集合为 {α 渣$\frac{\pi}{圆}$ 垣圆噪π 约α 约π 垣圆噪π,噪∈在};

第三象限角的集合为 {α 渣 π 垣圆噪π 约α 约$\frac{猿\pi}{圆}$ 垣圆噪π,噪∈在};

第四象限角的集合为 {α 渣$\frac{猿\pi}{圆}$ 垣圆噪π 约α 约圆π 垣圆噪π,噪∈在}援

【例 圆】 已知 α 越原猿远圆,则角 α 的终边在 …（摇摇）

粤郾第一象限 摇摇摇摇摇月郾第二象限
怳郾第三象限 摇摇摇摇摇阅郾第四象限

分析 注意估算,$\frac{猿\pi}{圆}$≈源援苑员,圆π≈远援圆愿援

解 疫$\frac{猿\pi}{圆}$约猿远约圆π,亦选 阅援

(猿 终边在 曾轴上的角的集合为 {α 渣α 越噪π,噪∈在};

终边在 赠轴上的角的集合为 {α 渣α 越$\frac{\pi}{圆}$ 垣噪π,噪∈在};

终边在坐标轴上的角的集合为 {α 渣α 越$\frac{噪\pi}{圆}$,噪∈在}援

缘郾弧长公式与扇形面积公式

(员 根据公式 渣α渣越$\frac{造}{则}$,可以得到弧长公式 造越渣α渣则,即弧长等于弧所对的圆心角 (的弧度数) 的绝对值与半径的积援

(圆 扇形面积公式 杂越$\frac{员}{圆}$造则越$\frac{员}{圆}$渣α渣则圆,

其中 则是圆的半径,α 是圆心角的弧度数,造是弧长援

(猿 说明

①在应用上述公式时,一定要注意 α 是圆心角的弧度数,若是度数,一定先化成弧度数才能代入公式援

②弧度制下的弧长公式 造越渣α渣则比角度制下的弧长公式 造越$\frac{灶\pi则}{员愿园}$具有更为简单的形式,但它们是可以互相转化的,实现转化的工具正是角度制与弧度制的换算公式援设圆心角为 灶毅(灶跃园),其弧度数为 α,则有 灶

摇摇亦θ 越$\frac{灶}{苑}$π援

由$\frac{\pi}{源}$约$\frac{灶}{苑}$π约$\frac{\pi}{圆}$,得$\frac{苑}{源}$约灶约$\frac{苑}{圆}$,亦灶越圆或 猿援

故 θ 越$\frac{圆}{苑}$π 或 θ 越$\frac{猿}{苑}$π援

评注 把文字语言翻译成数学语言,并将其用数学符号或图形表达出来,是我们正确理解题意的标志,也是解题的切入点援

【例 源】 已知集合 粤越{曾渣曾越噪π 垣$\frac{\pi}{远}$,噪∈在},月越{曾渣曾越$\frac{噪\pi}{圆}$原$\frac{\pi}{猿}$,噪∈在},怳越{曾渣曾越$\frac{噪\pi}{圆}$ 垣$\frac{\pi}{远}$,噪∈在},试判断集合 粤,月,怳的关系援

分析 可对表达式变形,使它们的局部相同,观察不同部分,也可将两个集合中的角 曾的终边在坐标系中画出,找出规律即可援

解法一 粤越{曾渣曾越噪π 垣$\frac{\pi}{远}$,噪∈在} 越{曾渣曾越$\frac{圆噪}{圆}$π 垣$\frac{\pi}{远}$,噪∈在},

月越{曾渣曾越$\frac{噪}{圆}$原$\frac{\pi}{猿}$,噪∈在} 越{曾渣曾越$\frac{噪原员}{圆}$π 垣$\frac{\pi}{远}$,噪∈在},

怳越{曾渣曾越$\frac{噪}{圆}$ 垣$\frac{\pi}{远}$,噪∈在}援

当 噪取遍一切整数时,圆噪能取遍一切偶数,而 噪原员和 噪均取遍一切整数,所以有 粤$\subsetneq$月越怳援

解法二 在集合 粤中,角 噪π (噪∈在) 的终边落在 曾轴上,角 噪π 垣$\frac{\pi}{远}$(噪∈在) 的终边是由角 噪π 的终边逆时针旋转$\frac{\pi}{远}$而得到的,如图 源-圆-员(员) 所示援

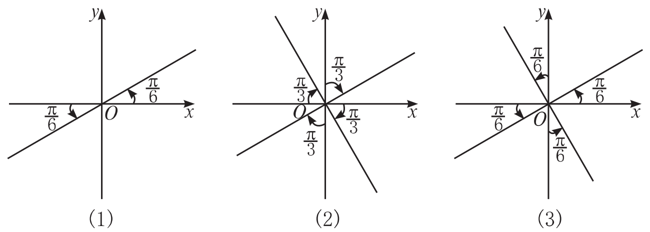


图 源-圆-员

在集合 月中,角$\frac{噪\pi}{圆}$(噪∈在) 的终边落在 曾轴和 赠轴上,角$\frac{噪\pi}{圆}$原$\frac{\pi}{猿}$(噪∈在) 的终边是由角$\frac{噪\pi}{圆}$的终边顺时针旋转$\frac{\pi}{猿}$得到的,如图 源-圆-员(圆) 所示援

在集合 怳中,角$\frac{噪\pi}{圆}$垣$\frac{\pi}{远}$(噪∈在) 的终边是由角$\frac{噪\pi}{圆}$的终边逆时针旋转$\frac{\pi}{远}$得到的,如图 源-圆-员(猿) 所示援

因此集合 粤,月,怳的关系是 粤$\subsetneq$月越怳援

评注 α 垣β (β 跃园) 的几何意义是角 α 垣β 的终边是由角 α 的终边逆时针转 β 角而得到的援 α 原β (β 跃园) 的几何意义是角 α 原β 的终边是由角 α 的终边顺时针转 β 角得到的援

【例 缘】 员弧度的圆心角所对的弦 粤月的长是 圆,求这个圆心角所对的弧长及圆心角所夹扇形的面积援

分析 如图 源-圆-圆,欲求弧长及扇形面积,需先求圆的半径 则,求圆的半径可以构造圆内接△粤韵月,利用直角三角形中的边角关系可求出半径援

解 作 韵怳⊥粤月于 怳点,在 砸贼△粤韵怳中,∠粤韵怳越

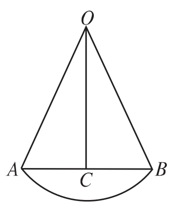


图 源-圆-圆

·$\frac{\pi}{员愿园}$越α援因此这两个公式实质是一样的援扇形面积公式 杂越$\frac{员}{圆}$渣澡则与角度制下的公式 杂越$\frac{灶}{猿远园}$π则也有类似的关系援

【例 猿】 直径为 猿园糟皂 的轮子以 远园 赠澡择(弧度/秒)的速度旋转,求轮周上一点经过 圆灶所转过的弧长援

分析 求出圆心角的弧度数,代入弧长公式 造越渣澡援

解 经过 圆灶轮周上一点转过的弧度数为 远园伊圆越员圆园所以弧长 造越员圆园伊$\frac{猿园}{圆}$越员愿园园(糟皂) 援

$\frac{员}{圆}$赠澡 越$\frac{员}{圆}$,亦即 越$\frac{}{}$越$\frac{员}{}$援

由弧长公式,得弧 的长度 造越澡则 员越$\frac{员}{员}$援

由扇形面积公式,得 杂越$\frac{员}{圆}$造澡越$\frac{员}{}$援

评注 弦长与弧长是两个不同的概念援

摇摇摇整合与扩展

摇摇员援角度制与弧度制

(员) 不管是以“弧度”还是以“度”为单位的角,其大小都是一个与圆的半径的大小无关的定值援

(圆) 弧度制和角度制一样,只是一种度量角的方法,弧度制与角度制相比有一定的优点援其一是在用角度制表示角的时候,总是十进制、六十进制并用,不便于计算,而弧度制下只用十进制,给运算带来方便;其二是弧度制下的弧长公式和扇形面积公式比角度制下的对应公式有更为简单的形式援

(猿) 用角度制和弧度制来度量零角,虽然单位不同,但量数相同援对于其他非零角度,所得到的量数都是不同的援

(源) 在今后表示角时常用弧度制,但要注意,在同一个式子中,两种量角制不能混用,防止出现 (噪 在) 或 $\frac{\pi}{猿}$ 垣 噪 一类的写法援

圆援引进了弧度制,使得每一个角都对应着一个实数(即这个角的弧度数);反过来,每一个实数都对应着一个角(即弧度数等于这个实数的角),从而角的集合与实数集之间建立了一一对应关系援因此角的几何表示既可在坐标系中以终边位置描述,也可用数轴上的点描述(即其弧度数对应的实数所对应的点)援据此为在实数集上定义三角函数奠定了基础援

猿援终边对称的两角的关系

若角 α 与角 β 的终边关于 x 轴对称,则 α 与 β 的关系为 α 越原β 垣圆噪π,噪 在;

若角 α 与角 β 的终边关于 y 轴对称,则 α 与 β 的关系为 α 越π 原β 垣圆噪π,噪 在;

若角 α 与角 β 的终边关于原点对称,则 α 与 β 的关系为 α 越π 垣β 垣圆噪π,噪 在;

若角 α 与角 β 的终边关于第一、三象限的角平分线对称,则 α 与 β 的关系是 α 越原β 垣$\frac{\pi}{圆}$ 垣圆噪π,噪 在;

若角 α 与角 β 的终边关于第二、四象限的角平分线对称,则 α 与 β 的关系是 α 越原β 原$\frac{\pi}{圆}$ 垣圆噪π,噪 在援

【例 员】 若 α、β 的终边关于原点对称,则 ………………………………………………………………………… (摇摇)

粤援 α 越β 摇摇 月援 α 越原β 摇摇 悦援 α 越β 依π 摇摇 阅援 α 越(圆噪垣员)π 垣β

分析 α 与 β 的终边关于原点对称,也就是它们的终边互为反向延长线,那么 $\alpha \neq \beta$,所以 粤不对;当 α 越原β 时,α 与 β 的终边关于 x 轴对称,所以 月不对;当 α 越β 依π 时,α 与 β 的终边关于原点对称,但是终边与角 β 的终边关于原点对称的角不仅仅是两个角 β 依π,与 β 依π 终边相同的角都符合题意援所以选 阅援

源援任意角的有关知识与其他知识的综合

任意角的有关知识常与集合、函数、方程、不等式、平面几何等知识相结合援

【例 圆】 已知集合 粤越{α|圆噪π 垣$\frac{\pi}{猿}$ ≤ α ≤ 圆噪π 垣$\frac{\pi}{圆}$,噪 在},月越{α|原圆≤α≤圆},求 粤∩月援

分析 求两个集合的交集,我们常在数轴上画出两个集合援对于集合 粤令 噪越…,原员,园,员…,将集合 粤看成数轴上无数个小区间,即 粤越…∪ [原$\frac{圆}{猿}$π,原$\frac{\pi}{圆}$] ∪ [$\frac{\pi}{猿}$,$\frac{\pi}{圆}$] ∪ [$\frac{源}{猿}$π,$\frac{猿}{圆}$π] ∪…援

解 月越{α|原圆≤α≤圆},在数轴上画出集合 粤与 月援

粤∩月越{α|原圆≤α≤原$\frac{\pi}{圆}$或$\frac{\pi}{猿}$≤α≤$\frac{\pi}{圆}$} 援

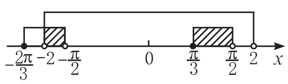


图 源-圆-猿

评注 解答本题的关键是正确地理解集合 粤把集合 粤看成 噪取遍一切整数时所对应的无数个小区间的并集援

【例 猿】 已知扇形的周长为 圆园糟皂,问扇形的圆心角 α 为何值时,扇形面积 杂最大?并求出 杂的最大值援

分析 解答本题,需灵活运用弧度制下的弧长和面积公式,本题是求扇形面积的最大值,以扇形的半径 则或圆心角 α) 为自变量,寻找函数关系式,而后求函数的最大值,从而解决问题援

解法一 设扇形的半径为 则弧长为 造面积为 杂则 造垣圆则越园即 造越园园原圆则援

杂越$\frac{员}{圆}$造越$\frac{员}{圆}$(圆园原圆则)则越原则^{圆}垣圆则越原(则原缘)^{圆}垣圆缘

当 则越缘时,杂有最大值 圆缘此时 造越圆园α越$\frac{造}{则}$越圆则援

所以当 α 越圆则援时,杂最大,最大值为 圆缘糟皂^{圆}援

解法二 由题意 则 α 垣圆则越圆园即 则越$\frac{圆园}{\alpha 垣圆}$杂越$\frac{员}{圆}$$\alpha$·则越$\frac{圆园园·\alpha}{圆\alpha^{圆}垣愿\alpha垣愿}$越$\frac{圆园园}{\alpha^{圆}垣源\alpha垣源}$

整理得 杂$\alpha^{圆}$垣(源杂原圆园园)α垣源杂越园援

由 杂≠园且 Δ 越(源杂原圆园园)^{圆}原员远杂^{圆}≥园亦杂≤圆缘援

当 杂越圆缘时可求得 α 越圆援

亦当 α 越圆则援时,杂有最大值,最大值是 圆缘糟皂^{圆}援

评注:(员)涉及到最大值或最小值问题时,应先建立函数关系,再通过求函数的最大值和最小值,可以求得问题的解援这种思维过程体现函数思想的数学模式,是解决最值问题的基本思想方法援解法一借助了中间量 造和 则来表示 杂这样做可以转化为我们比较熟悉的二次函数来解援解法二中求最值采用的是判别式法援

(圆)若扇形的周长为定值,当圆心角为 圆则援时,扇形面积最大;反之,若扇形的面积为定值,当圆心角为 圆则援时,扇形的周长最小援

摇摇摇同步达标

粤组

一、选择题

员援已知 α 越原圆则 α 的终边在 …………………………（摇摇）

粤援第一象限 摇摇摇摇摇摇摇月援第二象限

悦援第三象限 阅援第四象限

圆援与角 圆园缘毅终边相同的角的集合是 …………………（摇摇）

粤援{α|α越$\frac{缘}{猿}$垣圆噪,噪∈在}

月援{α|α越$\frac{缘}{猿}$垣圆园噪,噪∈在}

悦援{α|α越$\frac{源}{猿}$垣圆噪,噪∈在}

阅援{α|α越$\frac{源}{猿}$垣圆园噪,噪∈在}

猿援若扇形的半径为 员周长为 π,则扇形的面积是 ……（摇摇）

粤援 原圆园 月援$\frac{\pi}{圆}$原员

悦援 原员 阅援$\frac{\pi}{圆}$

源援集合 粤越{α|α越$\frac{噪}{猿}$,噪∈在},月越{α|原π≤α≤π},则 粤∩月 等于 …………………………………………（摇摇）

粤援{原$\frac{\pi}{猿}$,$\frac{圆}{猿}\pi$,π,$\frac{源}{猿}\pi$,$\frac{缘}{猿}$}

月援{原π,原$\frac{圆}{猿}\pi$,原$\frac{\pi}{猿}$,园,$\frac{\pi}{猿}$,$\frac{圆}{猿}$}

悦援{$\frac{\pi}{猿}$,$\frac{圆}{猿}\pi$,π,$\frac{源}{猿}\pi$}

阅援{原$\frac{圆}{猿}\pi$,原$\frac{\pi}{猿}$,园,$\frac{\pi}{猿}$,$\frac{圆}{猿}\pi$}

缘援集合 粤越{α|α越$\frac{\pi}{圆}$ 垣噪,噪∈在}与 月越{α|α越依$\frac{\pi}{圆}$垣圆噪,噪∈在}的关系是 ……………………………………（摇摇）

粤援粤越月 月援粤⊆月

悦援月⊆粤 阅援以上都不对

远援若 α 越圆噪π垣θ,β越圆噪π原θ(噪∈在),则 α、β 的终边…（摇摇）

粤援重合 月援关于原点对称

悦援关于 曾轴对称 阅援关于 赠轴对称

二、填空题

苑援原苑圆园毅越摇摇摇摇摇 则葬凿 原$\frac{猿}{愿}$则葬凿越摇摇摇摇摇度援

愿援若三角形的三个内角之比为 圆∶猿∶源则各角的弧度数分别是摇摇摇摇摇援

怨援若 α 越$\frac{\pi}{猿}$垣圆噪,噪∈在,则 α 是第摇摇摇摇摇象限角援

员园援把 原$\frac{员员}{源}\pi$ 表示成 θ 垣圆噪 (噪∈在)的形式,使 $|\theta|$最小的 θ 值是摇摇摇摇摇援

三、解答题

员员援用弧度制表示:

(员)终边在第一、三象限角平分线上的角的集合;

(圆)终边在第二、四象限角平分线上的角的集合;

(猿)终边与 $\frac{源}{猿}\pi$ 的终边在同一条直线上的角的集合援