

QIAN YAN 前言

亲爱的中学生朋友：

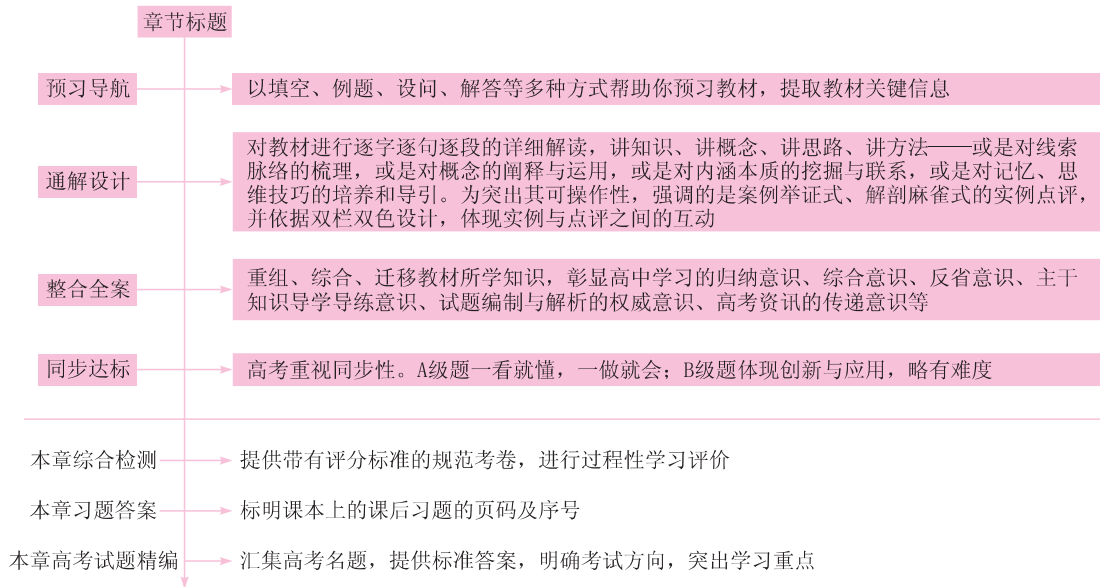
摆在你们面前的这本全新的教学辅导用书,是一群有实战经验的大朋友为你们在课堂上学好教材而编写的。课堂生活是你们学校生活的最基本构成,它的质量,直接影响着当下及今后你们的多方面发展和成长。请记住:选择一套好的课堂辅助用书,就如选好一个得力的学习“帮手”。

教学是由教与学两个主体的互动来完成的。传统的教辅用书,多以教师为中心,从教师的教出发去编写,忽视了学生作为学习主体的存在。为此,一本完全站在你们的角度,从你们课堂学习需要出发而设计的全新辅导用书——《中学教材标准学案》诞生了。

“学案”顾名思义就是一种学习方案,它体现了对你们学习过程的规划、学习思路的梳理、学习方法的点拨、学习规律的总结、训练样题的设计。

“标准”,是说这套书内容的组织、材料的选择、流程的设计都是符合你们课堂学习及考试规律的。目前,你们的学习还不是完全独立的,要在教师的指导下进行;学习的内容也不是随意的,而是按照教学大纲精心选择的;课堂学习过程也是有目的、有计划、有组织进行的,不像日常生活可以任意安排。因此,我们在设计这套书时,抱定的宗旨是:与你们的课堂学习生活靠近些、再靠近些;标准些,再标准些。

在正式阅读本书正文之前,请仔细阅读下面的阅读地图!



考虑到学科特点,以上栏目有的略有不同。

同学们,本学案以你们课堂学习模式为标准,以你们的学习进步为己任,将不遗余力地引领你们走向成功的彼岸。



MU LU

目 录

第九章 直线、平面、简单几何体	1
一、空间直线和平面	1
9.1 平面	1
9.2 空间直线	8
9.3 直线与平面平行的判定和性质	16
9.4 直线与平面垂直的判定和性质	23
9.5 两个平面平行的判定和性质	34
9.6 两个平面垂直的判定和性质	41
二、简单几何体	51
9.7 棱柱	51
9.8 棱锥	59
研究性学习课题 :多面体欧拉定理的发现	71
9.9 球	76
本章总结	85
本章目标检测题	91
第十章 排列、组合和二项式定理	94
10.1 分类计数原理与分步计数原理	94
10.2 排列	99
10.3 组合	107
10.4 二项式定理	115
本章总结	123
本章目标检测题	127
第十一章 概率	129
11.1 随机事件的概率	129
11.2 互斥事件有一个发生的概率	136
11.3 相互独立事件同时发生的概率	144
本章总结	151
本章目标检测题	154
期中测试卷	156
期末测试卷	158
参考答案	161

第九章 直线、平面、简单几何体

一、空间直线和平面

9.1 平面



预习导航

● 要点扫描

1. 平面和点、直线一样是构成空间图形的基本元素之一,是一个只描述而不定义的原始概念.平面具有_____,平面无_____,无_____,无_____,无所谓面积.
2. 立体几何中,我们通常画平行四边形来表示平面.当平面水平放置时,通常把平行四边形的锐角画成_____,横边画成邻边的_____倍长.
3. 平面通常用一个希腊字母 α, β, γ 来表示,如平面 α 、平面 β 、平面 γ 等,也可以用表示_____的两个相对顶点的字母表示.
4. 平面具有如下性质:

公理 1 如果一条直线上的两点在一个平面内,那么这条直线上_____都在这个平面内.

公理 2 如果两个平面有一个公共点,那么它们还有其他公共点,且所有公共点的集合是一条_____的直线.

公理 3 经过_____的三点,有且只有一个平面.

推论 1 经过一条直线和_____,有且只有一个平面.

推论 2 经过两条_____,有且只有一个平面.

推论 3 经过两条_____,有且只有一个平面.

关键信息

1. 无限延展性 边沿 大小 厚薄
2. 45° 2
3. 平行四边形
4. 所有的点

过这个公共点
不在同一条直线上
这条直线外的一点
相交直线
平行直线



重点、难点聚焦

● 重点、难点解析



● 学法指导

1. 平面的概念

- (1) 平面和点、直线一样是构成空间图形的基本要素之一,是一个只描述而不定义的原始概念.
- (2) 平面具有无限延展性.数学里所说的“平面”将空间分成了两部分,如果想从平面的一侧到另一侧,必须穿过这个平面.平面无边沿.
- (3) 数学中的平面是点的集合.因此,在空间中,平面无大小、无厚薄、无所谓面积.

2. 平面的画法

立体几何中,我们“通常”画平行四边形来表示平面.但要注意:

- (1) 画的平行四边形表示的是整个平面.

平面是无限延展的,只能用一有限图形表示平面(类似于画线段表示直线).可用平面四边形、三角形等

【例 1】判断下列说法是否正确?并说明理由.

- (1) 平面的形状是平行四边形;
- (2) 任何一个平面图形都是一个平面;
- (3) 圆和平面多边形都可以表示平面;
- (4) 因为 $\square ABCD$ 的面积大于 $\square A'B'C'D'$ 的面积,所以平面 $ABCD$ 大于平面 $A'B'C'D'$;
- (5) 用平行四边形表示平面,以平面四边形的四条边作为平面的边界线.

分析:本题主要考查对平面概念的理解.

解:(1)不正确.平面是无限延展的,我们只是画平行四边形表示平面.

(2)不正确.平面图形和平面是两个完全不同的概念.平面图形有大小、有面积,可以度量.而平面具有无限延展性,类似于直线可无限延长,不可度量.

(3)正确.圆和平面多边形都是平面图形,可以用它们表示平面.

平面图形来表示某个平面,而表示平面的这些平面图形可根据需要扩展或缩小.

(2)加“通常”二字的意思是因为有时根据需要也可用其他平面图形表示:如用三角形、矩形、圆等平面图形来表示平面.

如图 9-1-1 中,三棱锥 $S-ABC$ 的底面 ABC ,就是用三角形来表示的;长方体 $ABCD-A'B'C'D'$ 的侧面 $ABB'A'$,就是用矩形表示的;圆锥 SO 中的底面是 $\odot O$,就是用圆来表示的.

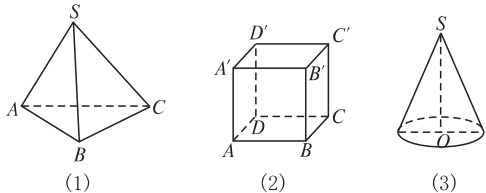


图 9-1-1

(3)画表示平面的平行四边形时,通常把它的锐角画成 45° ,横边画成邻边的两倍.

(4)当一个平面的一部分被另一个平面遮住时,应把被遮住部分的线段画成虚线或者不画,以增强立体感.

3. 平面的表示方法

平面通常用一个小写的希腊字母表示,如平面 α 、平面 β 、平面 γ 等,根据问题实际需要,有时也用表示平行四边形 $ABCD$ 的相对顶点的两个大写字母来表示,如平面 AC ,平面 BD ;或者用表示多边形顶点的字母来表示,如平面 ABC ,平面 $A'B'C'D'$ (见图 9-1-1 中的三棱锥和长方体).

4. 直线和平面都是由点构成的集合

以点作为元素,直线和平面都是由点构成的集合.

立体几何中,许多符号的规定都是源于将图形视为点集.如:点 A 在平面 α 内,记作 $A \in \alpha$;点 A 不在平面 α 内,记作 $A \notin \alpha$.直线 l 在平面 α 内,记作 $l \subset \alpha$;直线 l 不在平面 α 内;记作 $l \not\subset \alpha$.这里点 A 是平面 α 的元素,而直线 l 是平面 α 的子集,因此在符号的使用上是有区别的.

从点集的角度认识几何图形,是数学发展的需要,这对于数形结合,深入研究数学问题是非常必要和有效的.

5. 平面的基本性质

平面的基本性质,即教科书中的三个公理及推论,它们是研究立体几何的基础理论,每个同学都必须熟练掌握.

公理 1

(1)文字语言表述:如果一条直线上的两点在一个平面内,那么这条直线上所有的点都在这个平面内.

图形语言表述:

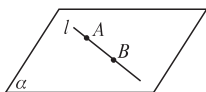


图 9-1-2

符号语言表述:

$A \in l, B \in l, A \in \alpha, B \in \alpha \Rightarrow l \subset \alpha.$

(2)公理 1 反映了平面与曲面的区别,通过直线的

(4)不正确.平面是无限延展的,不论大小,不计面积.

(5)不正确.平面是无限延展的,无边界.

注:平面和平面图形是两个不同的概念,要熟悉这两者之间的区别与联系.

【例 2】试画出两个相交的平面.

解:具体画法的步骤如下:

1°画两条相交直线,表示两个平面的平行四边形相交的两条边,如图 9-1-6(1)中的 EF, MN .

2°画两个相交平面的交线,如图 9-1-6(2)中的 AB .

3°通过端点 E, F, M, N 分别画出与 AB 平行且相等的线段 EC, FD, MP, NQ ,连结 CD 和 PQ ,可以得到表示平面的平行四边形 $EFDC$ 和 $MNQP$,如图 9-1-6(3).

4°把被平面遮住的部分画成虚线或者不画,如图 9-1-6(4).

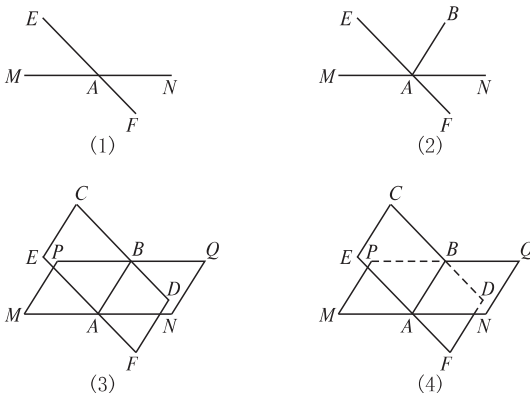


图 9-1-6

注:在平面几何中,凡是后引的辅助线都画成虚线;而立体几何则不同,凡是被平面遮住的线,都画成虚线,凡是不被遮住的线都画成实线,不论是题中原有的还是后添的辅助线.

【例 3】若点 B 在直线 b 上, b 在平面 β 内,则 B, b, β 之间的关系可以记作

- A. $B \in b \in \beta$ B. $B \in b \subset \beta$ C. $B \subset b \subset \beta$ D. $B \subset b \in \beta$

分析:本题考查用符号表示点、线、面之间的关系,关键是弄清点与直线是元素与集合之间的关系,直线与平面是集合与集合之间的关系.

解法一:(直接法) \because 点 B 在直线 b 上, $\therefore B \in b$.

又 \because 直线 b 在平面 β 内, $\therefore b \subset \beta$. $\therefore B \in b \subset \beta$.

答案:B

解法二:(排除法) \because 点 B 与直线 b 的关系是元素与几何之间的关系, \therefore 只能用符号“ \in ”或“ \notin ”表示.

\therefore 排除 C 和 D(容易出现 $B \subset b$ 或 $b \in \beta$ 等错误).

又 $\because b$ 与 β 是集合与集合之间的关系,

\therefore 应该用符号“ \subset ”或“ $\not\subset$ ”来表示.

\therefore 排除 A.

答案:B

【例 4】如果直线 $a \subset$ 平面 α , 直线 $b \subset$ 平面 α , $M \in a, N \in b$ 且 $M \in l, N \in l$,那么

- A. $l \subset \alpha$ B. $l \not\subset \alpha$
- C. $l \cap \alpha = M$ D. $l \cap \alpha = N$

解: $\because M \in a, N \in b, a, b \subset \alpha, \therefore M, N \in \alpha$.

而 MN 确定直线 l ,

根据公理 1,可知 $l \subset \alpha$.

故选 A.

“直”和“无限延伸”的特性,揭示了平面的“平”和“无限延伸”的特性.应用公理 1,既可判定直线是否在平面内、点是否在平面内,又可用直线检验平面.

公理 2

(1)文字语言表述:如果两个平面有一个公共点,那么它们还有其他的公共点,且所有这些公共点的集合是一条过这个公共点的直线.

图形语言表述:

符号语言表述:

$P \in \alpha \cap \beta \Rightarrow \alpha \cap \beta = l$ 且 $P \in l$.

(2)公理 2 说明了若两个平面相交,必交于同一条直线,这是由平面的无限延展性决定的.

公理 2 的作用主要有两方面.

其一,它是判定两个平面是否相交的依据,只要两个平面有一个公共点,就可以判定这两个平面必相交于过这点的一条直线;其二,它可以判定点在直线上,点是某两个平面的公共点,线是这两个平面的交线,则这点在交线上.

公理 3

(1)文字语言表述:经过不在同一条直线上的三点,有且只有一个平面.

图形语言表述:

符号语言表述:

A, B, C 三点不共线 \Rightarrow 有且只有一个平面 α , 使 $A \in \alpha, B \in \alpha, C \in \alpha$.

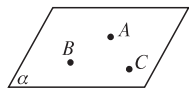


图 9-1-4

(2)公理 3 的三个推论

推论 1 经过一条直线和这条直线外的一点,有且只有一个平面(图 9-1-5(1)).

用符号表示为:

$A \notin a \Rightarrow$ 有且只有一个平面 α , 使 $A \in \alpha, a \subset \alpha$.

推论 2 经过两条相交直线,有且只有一个平面(图 9-1-5(2)).

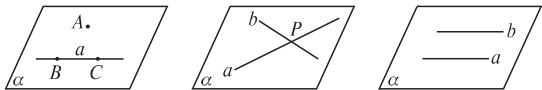
用符号表示为:

$a \cap b = P \Rightarrow$ 有且只有一个平面 α , 使 $a \subset \alpha, b \subset \alpha$.

推论 3 经过两条平行直线,有且只有一个平面(图 9-1-5(3)).

用符号表示为:

$a \parallel b \Rightarrow$ 有且只有一个平面 α , 使 $a \subset \alpha, b \subset \alpha$.



(1)

(2)

(3)

图 9-1-5

(3)公理 3 及其三个推论是确定平面及判断两个平面重合的依据,是证明点、线共面的依据,也是作截面、辅助平面的依据.作辅助平面和平面几何中作辅助直线的作用一样,可以为解题开拓思路.

【例 5】“线段 AB 在平面 α 内,直线 AB 不全在平面 α 内”这一说法是否正确,为什么?

解:不正确.

\because 线段 AB 在平面 α 内,

\therefore 线段 AB 上的所有点都在平面 α 内.

\therefore 线段上的 A, B 两点一定在平面 α 内.

\therefore 直线 AB 在平面 α 内(公理 1).

【例 6】如图 9-1-7,已知 $\triangle ABC$ 在平面 α 外, $AB \cap \alpha = P, AC \cap \alpha = R, BC \cap \alpha = Q$.

求证: P, Q, R 三点共线.

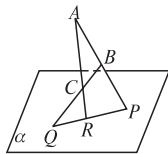


图 9-1-7

分析:只需证明 P, Q, R 均为平面 ABC 与 α 的公共点.

证明: $\because AB \cap \alpha = P, ABC \subset$ 平面 ABC ,

$\therefore P \in$ 平面 ABC . 又 $P \in \alpha$,

\therefore 由公理 2 可知点 P 在平面 ABC 与平面 α 的交线上.

同理可证: Q, R 也在平面 ABC 与平面 α 的交线上.

$\therefore P, Q, R$ 三点共线.

注:证明空间三点共线时,将线看作两平面的交线,只需证明这三点都是两个平面的公共点,则公共点必定在两平面的交线上,因此三点共线.

【例 7】如图 9-1-8,已知直线 $a \parallel$ 直线 b , 直线 m 与 a, b 分别交于点 A, B .

求证:过 a, b, m 有且只有一个平面.

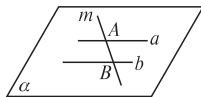


图 9-1-8

分析:证明过 a, b, m 三条直线有且只有一个平面,需证两个方面.其一是存在性即“有”,其二是唯一性即“只有”.

证明: $\because a \parallel b, \therefore$ 过 a, b 有一个平面 α .

又 $m \cap a = A, m \cap b = B$,

$\therefore A \in \alpha, B \in \alpha, \therefore A \in \alpha, B \in \alpha$.

又 $A \in m, B \in m, \therefore m \subset \alpha$,

即过 a, b, m 有一个平面 α .

假设过 a, b, m 还有一个平面 β 异于 α ,

则 $a \subset \alpha, b \subset \alpha, a \subset \beta, b \subset \beta$.

这与 $a \parallel b$, 过 a, b 有且只有一个平面相矛盾.

因此,过 a, b, m 有且只有一个平面.

注:①证明过三条直线有且只有一个平面(即确定平面)与证明三线共面是有差异的.前者不仅需证明存在性,还必须证明唯一性;而后者则不然,只需证明平面存在即可.

②证明唯一性,常常使用反证法.

整合与扩展

1. 识图与画图

学习立体几何开始要建立好空间概念,首先会识图,正确的识图可以帮助我们想象各部分元素之间的位置关系.

画直观图要注意虚实线,它们是正确表示空间位置的关键.在立体几何中,实线表示看到的部分,虚线表示被遮住的部分.

掌握正方形、正三角形、圆的水平放置的直观图,是今后识图、画图的基础.

2. 点线共面的证明

所谓点线共面问题就是指证明一些点或直线在同一个平面内的问题.

(1) 证明点线共面的主要依据

① 如果一条直线上的两点在一个平面内,那么这条直线上的所有点都在这个平面内(公理 1).

② 经过不在同一条直线上的三点,有且只有一个平面(公理 3 及其推论).

(2) 证明点线共面的常用方法

① 纳入平面法:先确定一个平面,再证明有关点、线在此平面内.

② 辅助平面法:先证明有关的点、线确定平面 α ,再证明其余元素确定平面 β ,最后证明平面 α, β 重合.

③ 反证法.

(3) 具体操作方法

① 证明几点共面的问题可先取三点(不共线的三点)确定一个平面,再证明其余各点都在这个平面内.

② 证明空间几条直线共面问题可先取两条(相交或平行)直线确定一个平面,再证明其余直线均在这个平面内.

3. 证明三点共线问题

所谓点共线问题就是证明三个点或三个以上的点在同一条直线上.

(1) 证明三点共线的依据是公理 2:如果两个平面有一个公共点,那么它们还有其他的公共点,且所有这些公共点的集合是一条过这个公共点的直线.也就是说一个点若是两个平面的公共点,则这个点在这两个平面的交线上.

对于这个公理应进一步理解下面三点:① 如果两个相交平面有两个公共点,那么过这两点的直线就是它们的交线;② 如果两个相交平面有三个公共点,那么这三点共线;③ 如果两个平面相交,那么一个平面内的直线和另一个平面的交点必在这两个平面的交线上.

(2) 证明三点共线的常用方法

方法 1 是首先找出两个平面,然后证明这三点都是这两个平面的公共点.根据公理 2 知,这些点都在交线上.

方法 2 是选择其中两点确定一条直线,然后证明另一点也在其上.

4. 证明三线共点问题

所谓线共点问题就是证明三条或三条以上的直线

【例 8】说出下面图形的不同之处.

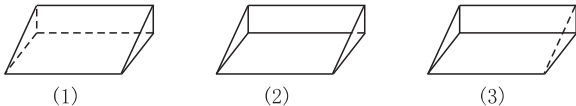


图 9-1-10

解:图中三个图形,每个图形都是由九条线段组成的,但由于虚实线的表示不同,则反映了不同的几何体.图(1)是三棱柱;图(2)是簸箕形;图(3)可以看成翻转的图(1).

注:本题易将三个图表示的几何图形看作同一个几何体,其原因是对实、虚线的意义不明确.

【例 9】如图 9-1-11,已知 $a \parallel b \parallel c, l \cap a = A, l \cap b = B, l \cap c = C$.

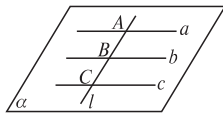


图 9-1-11

求证: a, b, c, l 共面.

证法一:先由 $a \parallel b$ 确定一个平面,然后证明 l, c 都在这个平面内.

$\because a \parallel b, \therefore a, b$ 确定平面 α .

又 $\because l \cap a = A, l \cap b = B,$

$\therefore l$ 上有两点 A, B 在 α 内,即直线 $l \subset \alpha$.

于是 a, b, l 共面.

换句话说,若 a, l 确定平面 α ,过 l 上一点 B 作 $b \parallel a$,则 $b \subset \alpha$.

同理,过 l 上一点 C 作 $c \parallel a$,则 c 也在 a, l 确定的平面内.

故 a, b, c, l 共面.

证法二: $\because a \parallel b, \therefore a, b$ 确定平面 α .

又 $A \in a, B \in b, \therefore ABC \subset \alpha$,即 $l \subset \alpha$,

又 $\because b \parallel c, \therefore$ 过 b, c 确定平面 β .

同理可证 $l \subset \beta$.

于是 $b, l \subset \alpha, b, l \subset \beta$,而 $b \cap l = B,$

$\therefore \alpha$ 与 β 重合, $\therefore a, b, c, l$ 共面.

注:①学习了平行公理后,本题还可用反证法证明;②本题可推广为:若 $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ 互相平行,直线 b 与 $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ 都相交,则 $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, b$ 这 $n+1$ 条直线在同一个平面内.

【例 10】如图 9-1-12,已知 E, F, G, H 分别是空间四边形 $ABCD$ 各边 AB, AD, BC, CD 上的点,且直线 EF 和 HG 交于点 P .

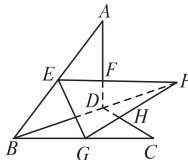


图 9-1-12

求证:点 B, D, P 在同一条直线上.

证明: \because 直线 $EF \cap$ 直线 $HG = P,$

$\therefore P \in$ 直线 EF ,而 $EF \subset$ 平面 $ABD,$

$\therefore P \in$ 平面 ABD .

同理, $P \in$ 平面 BCD ,即点 P 是平面 ABD 和平面 BCD 的公共点.显然,点 B, D 也是平面 ABD 和平面 BCD 的公共点,由公理 2 知,点 B, D, P 都在平面 ABD 和平面 BCD 的交线上,即点 B, D, P 在同一条直线上.

【例 11】如图 9-1-13,三个平面 α, β, γ 两两相交, $\alpha \cap \beta = c, \alpha \cap \gamma = b, \beta \cap \gamma = a$,若直线 a 和 b 不平行.

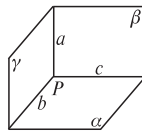


图 9-1-13

求证: a, b, c 三条直线必过同一点.

分析:直线过同一点,可以这样思考:先证明两线相交,得一交点,然后证明该点在其余的直线上(或其余的直线经过该点).

交于一点.

(1) 证明三线共点的依据是公理 2.

(2) 证明三线共点的思路是:先证两条直线交于一点,再证明第三条直线经过这点,把问题化归到证明点在直线上的问题.

5. 平面个数的确定及平面把空间分成若干部分

公理 3 及三个推论是用来确定平面的,对于确定平面的个数问题,这四种方法可以交互使用.如:四条线段首尾相接,它们最多可以确定多少个平面?

由推论 2 知,两条相交直线确定一个平面,四条线段首尾相接,最多可产生四对相交线段,因此,最多可确定 4 个平面.

由于平面是无限延展的,因此一个平面可以把空间分成 2 个部分;两个平面既可以把空间分成 3 个部分(两平面平行),也可以分成 4 个部分(两平面相交);三个平面可以把空间分成 4 个部分,也可以分成 6、7、8 个部分(如图 9-1-9).

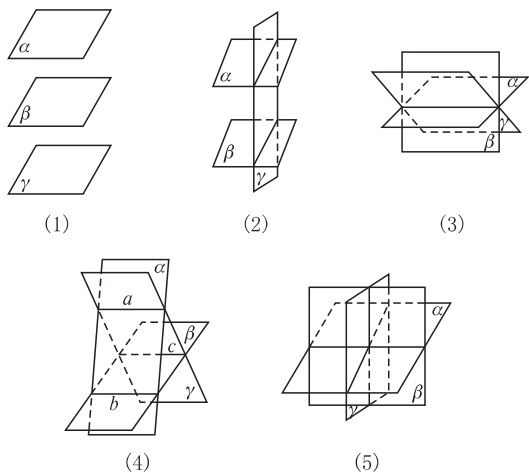


图 9-1-9

证明: $\because a \cap \gamma = b, \beta \cap \gamma = a, \therefore a \subset \gamma, b \subset \gamma.$

由于直线 a 和 b 不平行, $\therefore a, b$ 必相交.

设 $a \cap b = P$, 则 $P \in a, P \in b.$

$\because a \subset \beta, b \subset \alpha, \therefore P \in \beta, P \in \alpha.$

又 $a \cap \beta = c,$

$\therefore P \in c$, 即交线 c 经过点 $P.$

$\therefore a, b, c$ 三条直线相交于同一点.

【例 12】正方体各个面所在的平面一共将空间分成了多少个相互没有重叠的部分?

分析:本题重在培养同学们的空间想象能力和动手实践的能力.要求同学们在对本章学习的一开始就重视空间想象力的培养,养成合理运用自己周围的生活空间中的实际模型来帮助分析、解答数学问题的习惯.

可作出正方体并结合教室对应的实际空间,分层考虑.

解:如图 9-1-14(1),平面 $ABCD$ 和平面 $A_1B_1C_1D_1$ 将空间分成了三层,从图 9-1-14(2)可以看出,每一层的四个平面又将空间分成了 9 个部分,由此可知,正方体各个面所在的平面将空间分成了没有重叠的 27 个部分.

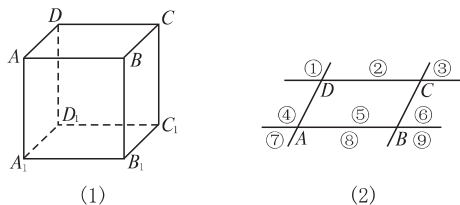


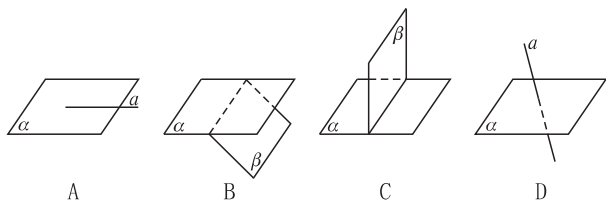
图 9-1-14

同步达标

A 组

一、选择题

- 下列命题中,其中正确命题的个数是 ()
 - 黑板面是平面
 - 6 个平面重叠起来,要比 4 个平面重叠起来厚
 - 有一个平面的长是 20 m,宽是 15 m
 - 平面是绝对的平、无厚度、可以无限延展的抽象的数学概念
 A. 1 B. 2 C. 3 D. 4
- 下列图形中正确的是 ()



- 给出下列命题,正确的个数是 ()
 - 梯形的四个顶点在同一平面内
 - 三条平行直线必共面
 - 有三个公共点的两个平面必重合
 - 每两条都相交且交点各不相同的四条直线一定共面
 A. 1 B. 2 C. 3 D. 4
- 平面 $\alpha \cap$ 平面 $\beta = l$, 点 $A \in \alpha$, 点 $B \in \beta$, 且 $B \notin l$, 点 $C \in \alpha$, 又 $AC \cap l = R$, 过 A, B, C 三点确定的平面为 γ , 则 $\beta \cap \gamma$ 是 ... ()
 - 直线 AB
 - 直线 BC
 - 直线 BR
 - 直线 CR

二、填空题

- 已知点 A, B , 直线 l 及平面 α, β , 用符号“ $\in, \notin, =, \subset, \not\subset$ ”填空:
 - 已知 $A \in \alpha, a \subset \beta$, 则 A _____ β ;
 - 已知 $\alpha \cap \beta = l, A$ _____ α, A _____ β , 则 $A \in l$;
 - 已知 $A \in \alpha, B \in \alpha, A \in \beta, B \in \beta$, 则 $\alpha \cap \beta$ _____ AB .

- 6. 平面 α 与平面 β 相交于直线 l , 直线 a, b 分别在 α, β 内, 且 a 与 b 相交于点 O , 上述语句可用数学符号语言表示为 _____.
- 7. 空间首尾相连的四条线段, 它们可确定 _____ 个平面.
- 8. 四条直线两两平行, 任意三条不共面, 过其中的任意两条作一个平面, 共可作平面 _____ 个.

三、解答题

9. 如图 9-1-16(1)、(2) 分别表示两个平面交于直线 a , 在图中画出两个平面分别向直线 a 的另一侧延展的示意图.

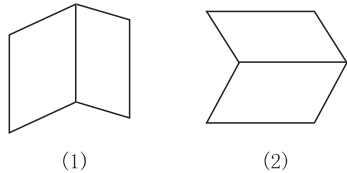


图 9-1-16

10. 如图 9-1-17, 在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, E, F 分别为 CC_1 和 AA_1 上的中点, 画出平面 BED_1F 与平面 $ABCD$ 的交线.

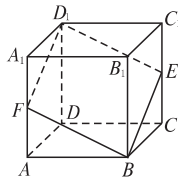


图 9-1-17

11. 如图 9-1-18, 在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, 对角线 A_1C 与平面 BDC_1 交于点 O, AC, BD 交于点 M . 求证: 点 C_1, O, M 三点共线.

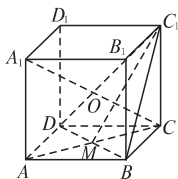


图 9-1-18

12. 求证: 两两相交且不共点的四条直线共面.

B 组

一、选择题

- 1. 下面列举了四个关于空间三条直线共面的条件, 这四个条件中不正确的个数为 _____ ()
 - ① 三条直线两两相交
 - ② 三条直线两两平行
 - ③ 三条直线交于一点
 - ④ 三条直线中的有两条平行
- A. 4 B. 3 C. 2 D. 1
- 2. 若 A, B, C 表示不重合的三点, m, n 表示不重合的直线, α, β 表示不同的平面, 下列四个命题中, 正确的是 _____ ()
 - A. $m \not\subset \alpha, A \in m \Rightarrow A \notin \alpha$
 - B. $\alpha \cap \beta = m, m \cap n = A \Rightarrow n \subset \alpha$
 - C. $A \in \alpha, A \in \beta, B \in \alpha, B \in \beta \Rightarrow \alpha \cap \beta = AB$
 - D. $C \in \alpha, C \in \beta, C \in m \Rightarrow \alpha \cap \beta = m$

3. 长方体的十二条棱所能确定的平面个数为 _____ ()

A. 6 B. 12 C. 18 D. 24

4. 如图 9-1-19, 在长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, O 是 B_1D_1 的中点, 直线 A_1C 交平面 AB_1D_1 于点 M , 则下列结论错误的是 _____ ()

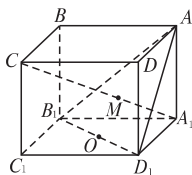


图 9-1-19

- A. A, M, O 三点共线
- B. A, M, O, A_1 四点共面
- C. A, O, C, M 四点共面
- D. B, B_1, O, M 四点共面

二、填空题

- 5. 一个橡胶实心球, 切一刀能把它分成两块, 切三刀最多能把它切成 _____ 块, 最少能把它切成 _____ 块.
- 6. 空间有 5 个点, 其中有 4 个点在同一平面内, 另一点在此平面外, 且这 5 个点中任意三个都不共线, 这样的 5 个点能确定的平面个数是 _____.

7. 在四边形 $ABCD$ 中, $AB=BC=CD=DA=BD=1$, 则成为空间四面体时, AC 的取值范围是 _____.

- 8. 有下面几个命题:
 - ① 如果一条线段的中点在一个平面内, 那么它的两个端点也在这个平面内;
 - ② 两组对边分别相等的四边形是平行四边形;
 - ③ 两组对边分别平行的四边形是平行四边形;
 - ④ 四边形有三条边在同一平面内, 则第四条边也在这个平面内;
 - ⑤ 点 A 在平面 α 外, 点 A 和平面 α 内的任意一条直线都不共面.
 其中正确命题的序号是 _____. (把正确命题的序号都填上)

三、解答题

9. 如图 9-1-20, 四边形 $ABCD$ 中, $AB \parallel CD$, 直线 AB, BC, CD, DA 分别交平面 α 于点 E, G, F, H , 求证: E, F, G, H 四点共线.

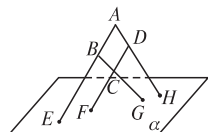


图 9-1-20

10. 如图 9-1-21, 空间四边形 $ABCD$ 中, 对角线为 AC 和 BD , 点 E, F, G, H, M, N 分别为 AB, BC, CD, DA, AC, BD 的中点. 求证: 线段 EG, FH, MN 必交于一点, 且被该点平分.

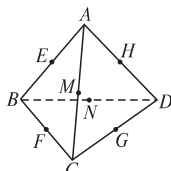


图 9-1-21

11. 如图 9-1-22, 已知直线 a 与 b 不共面, 直线 $c \cap a = M$, 直线 $b \cap c = N$, 又 $a \cap$ 平面 $\alpha = A$, $b \cap \alpha = B$, $c \cap \alpha = C$, 求证: A, B, C 三点不共线.

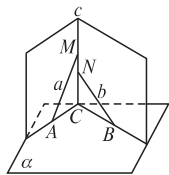


图 9-1-22

12. 单位正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, 点 Q 是棱 DD_1 上的动点.

(1) 判断过 A, Q, B_1 三点的截面图形的形状;

(2) 设 $D_1Q = x$, 过 A, Q, B_1 三点的截面面积为 $S(x)$, 求函数 $y = S(x)$ 的表达式.



应用样板

1. (2000 年全国高考题) 如图 9-1-23, E, F 分别为正方体的面 ADD_1A_1 、面 BCC_1B_1 的中心, 则四边形 BFD_1E 在该正方体的面上的射影可能是 _____.

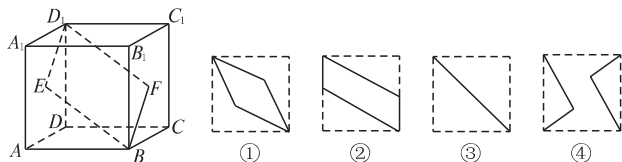


图 9-1-23

2. (2003 年山东高考模拟题) 两个不全等的三角形不在同一平面内, 它们的边两两对应平行, 求证: 三个对应顶点的连线交于一点.

名师解密

1. 解: 四边形 BFD_1E 在面 $ABCD$ 与面 $A_1B_1C_1D_1$, 在面 ABB_1A_1 与面 DCC_1D_1 的射影都是②, 四边形 BFD_1E 在面 ADD_1A_1 与面 BCC_1B_1 的射影是③, 答案为②③.

2. 已知 $\triangle ABC$ 与 $\triangle A'B'C'$ 不全等, 且 $AB \parallel A'B'$, $BC \parallel B'C'$, $CA \parallel C'A'$, 求证: AA', BB', CC' 交于一点.

证明: $\because \triangle ABC$ 与 $\triangle A'B'C'$ 不全等,

\therefore 至少有一组对应边不相等, 不妨设 $AB \neq A'B'$.

$\because AB \parallel A'B'$, 又 $AB \neq A'B'$, $\therefore AA'$ 与 BB' 必交于一点 O . $\because O \in AA'$, $\therefore O \in$ 面 $AA'C'C$.

同理, $O \in$ 面 $BB'C'C$, \therefore 点 O 在面 $AA'C'C$ 和面 $BB'C'C$ 的交线上, 即 $O \in CC'$.

$\therefore AA', BB', CC'$ 交于同一点 O .



拓展阅读

数学语言与立体几何入门的学习

同学们想学好数学就要学会正确、合理地使用数学语言. 通常情况下, 人们将数学语言分为文字语言、符号语言、图形语言这三种类型. 这三种语言在几何学习中尤为重要, 让我们回顾一下, 它们在平面几何学习中的应用.

首先, 我们回顾一下是怎样证明一个定理的. 平面几何中的定理都是用文字语言表述的, 一般情况下, 是先将文字语言转化为图形语言, 即画出符合题目条件的图形来; 进而参照文字语言和图形语言转化为有效的符号语言, 即按照定理条件、结论和所画的图形写出已知、求证; 再结合学习过的定义、定理等平面几何知识把证明思路用有效的符号语言表达出来.

其次, 我们回顾一下是如何记忆定理的. 有些同学是离开了图形背景单独地记忆定理的文字. 这样做不仅影响了空间想象能力的形成和发展, 还失去了识图、释图及与一些重要的基本图形打交道的好机会, 使得原本生动、有意思的图形语言在文字语言、符号语言的记忆中丧失其优势; 相反, 另有些同学在图形背景下记忆定理的文字和符号, 这样做大大增强了记忆定理的效果, 相应地也提高了对定理的灵活运用能力.

再次, 我们回顾一下是如何掌握定理的. 很多同学都知道掌握定理是在解决平面几何问题时表现出来的, 通常是在读懂了用文字语言或符号语言所描述的图形性质的前提下, 正确地画出与此问题相符合的图形来, 又在此图形中, 找出隐含着的各个定理所表现出来的基本图形, 即前面所说的“识图”, 然后, 准确地、有效地表达出此图形所反映的数学对象及其性质, 即前面所说的“释图”, 这一系列的思维活动说明你已经掌握定理了.

上述回顾告诉我们,会正确地运用三种数学语言进行数学思维是学好平面几何的关键.受此启发,在立体几何入门的学习中要注重文字语言、图形语言、符号语言的学习和运用.由于立体几何知识毕竟与平面几何知识有很大的不同之处,这表现在:文字语言更为复杂,二维平面内画出的三维空间图形,使图形语言的直观性不强,符号语言较多,易混乱.为此,在立体几何的学习中要注意以下几个问题:

1. 注意画图

认真上好立体几何的直观图画法课,使画出的直观图有立体感;多观察、模仿课本中的例题图形、老师黑板上板书的例题图形,对比自己画的立体图形,想一想,我画的图形与他们画的图形有何不同?他们为什么这样画?

2. 注意三种语言转化

在掌握立体几何公理的基础上,对表达定理的三种语言形式都要掌握,不偏废某种语言,达到快速地、准确地将一种语言转化为另两种语言.

3. 注意交流

语言的功能在于交流.在阅读中,与书本交流,注意书上数学语言的规范使用;在课堂上,积极思考,回答老师提出的问题,注意使自己的回答使用合理的数学语言;在课间多与同学们用规范的数学语言进行交流、思考问题;在作业中,精心设计所学的数学语言的搭配.这样做是为了更进一步地学会用数学语言思考问题,体会涉及到的数学思想、方法,使数学学习达到一个新的高度.

9.2 空间直线



预习导航

● 要点扫描

1. 空间的两条直线有三种位置关系:_____.
2. 若 $a \parallel b, b \parallel c$, 则_____.
3. 如果一个角的两边与另一个角的两边分别_____, 并且_____, 那么这两个角相等.
如果两条相交直线和另两条相交直线分别平行, 那么这两组直线所成的_____相等.
4. _____的两条直线叫做异面直线.
5. 直线 a, b 是异面直线, 经过空间任意一点 O , 作直线 a', b' , 使_____, _____, 我们把直线 a' 和 b' 所成的_____叫做异面直线 a 和 b 所成的角.
如果两条异面直线所成的角是_____, 我们就说这两条异面直线垂直.
两异面直线所成角的范围是_____.
6. 和两条异面直线都_____的直线, 叫做两条异面直线的公垂线.
两条异面直线的公垂线_____一条.
两条异面直线的公垂线长是分别连结两条异面直线上两点的线段中_____的一条.
两条异面直线的_____, 叫做两条异面直线的距离.

关键信息

1. 相交、平行、异面
2. $a \parallel c$
3. 平行 方向相同
- 锐角(或直角)
4. 不同在任何一个平面内
5. $a' \parallel a$
 $b' \parallel b$ 锐角(或直角)
- 直角
($0^\circ, 90^\circ$)
6. 垂直相交
有且只有
最短
公垂线段的长度



重点、难点聚焦

● 重点、难点解析

1. 空间两条直线的位置关系
空间的两条直线有以下三种位置关系:
(1) 相交直线——有且仅有一个公共点;
(2) 平行直线——在同一平面内, 没有公共点;

● 学法指导

- 【例1】已知 a, b, c 是三条直线, 若 a 与 b 异面, b 与 c 异面, 判断 a 与 c 的位置关系, 并画图说明.
- 分析: 这是一道考查异面直线概念及空间直线位置关系的问题, 同时也考查了图形语言的表达能力.

(3) 异面直线——不同在任何一个平面内,没有公共点.

若从有无公共点的角度看,可分两类:

(1) 有且仅有一个公共点——相交直线;

(2) 没有公共点—— $\begin{cases} \text{平行直线,} \\ \text{异面直线.} \end{cases}$

若从是否共面的角度看,可分两类:

(1) 在同一平面内—— $\begin{cases} \text{相交直线,} \\ \text{平行直线.} \end{cases}$

(2) 不同在任何一个平面内——异面直线.

2. 异面直线

(1) 异面直线的定义

不同在任何一个平面内的两条直线叫做异面直线.

(2) 理解异面直线定义需要注意的问题

①“不同在任何一个平面内”是指这两条直线永不具备确定平面的条件,因此,异面直线既不相交,也不平行.要注意把握异面直线的不共面性.

②不能把异面直线误解为:分别在不同平面内的两条直线为异面直线.

如图 9-2-1,在长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, $A_1D_1 \subset$ 平面 $A_1B_1C_1D_1$, $BC \subset$ 平面 $ABCD$,但 A_1D_1 与 BC 的位置关系是平行,而不是异面.

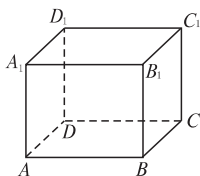


图 9-2-1

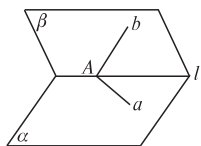


图 9-2-2

又如图 9-2-2,平面 $\alpha \cap$ 平面 $\beta = l$,

$a \subset \alpha, b \subset \beta, a \cap b = A, b \cap l = A$,

但 $a \cap b = A, a, b$ 并不是异面直线.

也就是说,在两个不同平面内的直线,它们既可以是平行直线,也可以是相交直线,还可以是异面直线.

(3) 异面直线的画法

画异面直线时,为了充分显示出它们既不平行又不相交的特点,常常需要以辅助平面为衬托,以加强直观性.

画平面衬托时,通常画成图 9-2-3 中的情形.

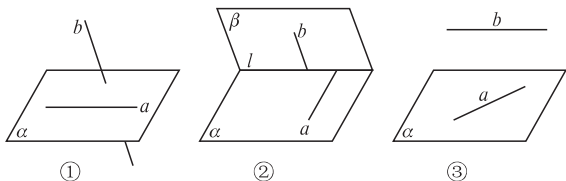


图 9-2-3

(4) 异面直线的判定方法

①定义法:由定义判定两直线永远不可能在同一平面内,常用反证法.

②判定定理:过平面外一点与平面内一点的直线和平面内不经过该点的直线是异面直线.

如图 9-2-4,已知 $a \subset \alpha, A \notin \alpha, B \in \alpha, B \notin a$.

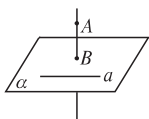


图 9-2-4

解:直线 a 与 c 的位置关系有以下三种情况:

直线 a 与 c 可能平行(9-2-8(1));可能相交(9-2-8(2));可能异面(9-2-8(3)).

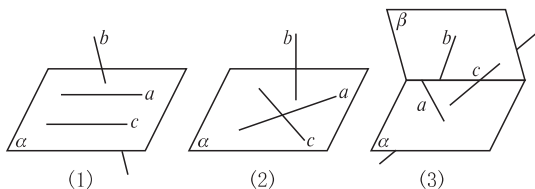


图 9-2-8

【例 2】如果两条异面直线称作“一对”,那么在正方体的十二条棱中,共有__对异面直线……()

- A. 12
- B. 24
- C. 36
- D. 48

分析:立体几何中的计数问题,是由所数的量的性质确定的规律,然后按此规律进行计数.正方体的各棱具有相同的位置关系,故以一条棱为基量,考查与其异面的对数,问题可解.

解:如图 9-2-9,正方体中与 AB 异面的有 C_1, D_1, D, B_1C_1 及 A_1D_1 .

∴各棱具有相同的位置关系,且正方体有 12 条棱,排除两棱的重复计算.

∴异面直线共有 $\frac{12 \times 4}{2} = 24$ 对. 故选 B.

注:分析清楚几何体的特点,是避免重复计数的关键.计数问题必须避免盲目乱数,做到“不重不漏”.

【例 3】如图 9-2-10,已知直线 a, b 是异面直线, A, B 是 a 上相异两点, C, D 是 b 上相异两点,求证: AC, BD 是异面直线.

证明:假设直线 AC, BD 不是异面直线,则它们必共面.

∴ A, B, C, D 在同一平面 α 内, ∴ $AB \subset \alpha, CD \subset \alpha$.

即 $a \subset \alpha, b \subset \alpha$.

这与 a, b 是异面直线矛盾,

∴ AC, BD 是异面直线.

【例 4】如图 9-2-11,空间四边形 $ABCD$ 中, $AB \neq AC$, AE 是 $\triangle ABC$ 的 BC 边上的高, DF 是 $\triangle BCD$ 的 BC 边上的中线,求证: AE 和 DF 是异面直线.

分析:要证两条直线异面,可用定义法及定理法.

证法一:(定理法)由题设条件知点 E, F 不重合,

设 $\triangle BCD$ 所在平面为 α .

∴ $DF \subset \alpha, A \notin \alpha, E \in \alpha, E \notin DF$.

∴ AE 和 DF 是异面直线.

证法二:(反证法)若 AE 和 DF 不是异面直线,则 AE 和 DF 共面,设过 AE, DF 的平面为 β .

(1)若 E, F 重合,则 E 是 BC 中点,这与题设 $AB \neq AC$ 相矛盾;

(2)若 E, F 不重合, ∴ $B \in EF, C \in EF, EF \subset \beta$,

∴ $BC \subset \beta$. 又 ∴ $A \in \beta, D \in \beta$, ∴ A, B, C, D 四点共面.

这与题设四边形 $ABCD$ 是空间四边形相矛盾.

综上, AE 和 DF 不是异面直线不成立.

故 AE 和 DF 是异面直线.

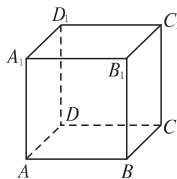


图 9-2-9

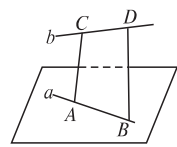


图 9-2-10

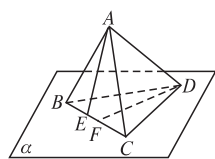


图 9-2-11

求证:直线 AB 与 a 是异面直线.

分析:证明两条直线异面,如果从定义出发直接证明,即不同在任何一个平面内的“任何”,若一个平面一个平面地寻找是不可能实现的.因此,必须找到一种间接法来证明,反证法即为一行之有效的好方法.

证明:假设直线 AB 与 a 在同一个平面内,那么这个平面一定经过点 B 和直线 a .

$\because B \notin a$, 经过点 B 和直线 a 只有一个平面 α .

\therefore 直线 AB 与 a 应在平面 α 内. $\therefore A \in \alpha$, 这与已知

$A \notin \alpha$ 矛盾. \therefore 直线 AB 与 a 是异面直线.

3. 平行直线

(1) 平行公理(公理 4)

平行于同一条直线的两条直线平行.

平行公理(公理 4)反映了平行线的传递性,它是证明等角定理的基础,也是论证平行问题的主要依据之一.

如图 9-2-5,三棱镜的三条棱,如果满足 $AA_1 \parallel BB_1, BB_1 \parallel CC_1$, 这时必有 $AA_1 \parallel CC_1$.

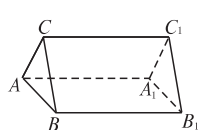


图 9-2-5

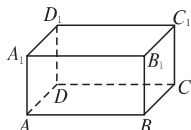


图 9-2-6

又如如图 9-2-6,在长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中,

\because 各面为长方形, $\therefore A_1D_1 \parallel B_1C_1, B_1C_1 \parallel BC$.

$\therefore A_1D_1 \parallel BC$.

同理可证 $AA_1 \parallel BB_1 \parallel CC_1 \parallel DD_1, AB \parallel DC \parallel D_1C_1 \parallel A_1B_1$.

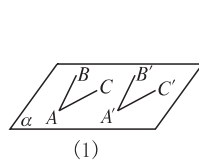
(2) 等角定理及其推论

① 等角定理:如果一个角的两边和另一个角的两边分别平行并且方向相同,那么这两个角相等.

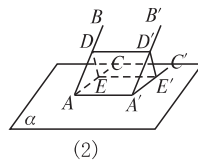
已知 $\angle BAC$ 和 $\angle B'A'C'$ 的边 $AB \parallel A'B', AC \parallel A'C'$, 并且方向相同. 求证: $\angle BAC = \angle B'A'C'$.

分析:证明角相等的方法在立体几何中还没有涉及,但在初中,常利用三角形全等或三角形相似来证明.现在题目条件中临时并不具备三角形全等或相似,必须借助条件进行构造.

证明:对于 $\angle BAC$ 与 $\angle B'A'C'$ 都在同一平面内的情形,如图 9-2-7(1),在平面几何中已经证明,下面给出两个角不在同一平面内的证明,如图 9-2-7(2).



(1)



(2)

图 9-2-7

如图 9-2-7(2),在 $AB, A'B', AC, A'C'$ 上分别取 $AD=A'D', AE=A'E'$, 连结 $AA', DD', EE', DE, D'E'$.

$\because AD \parallel A'D', AD=A'D'$. \therefore 四边形 $AA'D'D$ 为平行四边形. $\therefore AA' \parallel DD'$. 同理 $AA' \parallel EE'$.

由公理 4 可得 $DD' \parallel EE'$, \therefore 四边形 $DEE'D'$ 为平行四边形. $\therefore DE=D'E'$. $\therefore \triangle ADE \cong \triangle A'D'E'$. (SSS)

$\therefore \angle BAC = \angle B'A'C'$.

注:①证明两直线是异面直线常用反证法.反证法是一种间接证法,在立体几何证明中经常用到.

②利用反证法证明两条直线异面,有两种假设:一是假设两直线共面;二是假设两直线平行或相交,前一种假设较好.

③定理法也是判断两直线异面的一种重要方法,运用时,应积极寻找定理的条件.

【例 5】已知棱长为 a 的正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, E, F 分别为 CD, AD 的中点.

求证:四边形 A_1C_1EF 是梯形.

分析:要证明四边形是梯形,必须找平行,由图 9-2-12 知 A_1F 与 C_1E 不可能平行,需证 $EF \parallel A_1C_1$, 由中点联想到中位线,此题可证.

证明:连结 AC .

$\because E, F$ 分别为 CD, AD 中点, $\therefore EF \parallel \frac{1}{2}AC$.

由正方体性质知 $AC \parallel A_1C_1$, $\therefore EF \parallel \frac{1}{2}A_1C_1$.

\therefore 四边形 A_1C_1EF 是梯形.

注:要证梯形,必须证明有两边平行且不相等,平行的证明要善于联想平面几何知识.

【例 6】如图 9-2-13,已知 E, E_1 是正方体 AC_1 的棱 AD, A_1D_1 的中点, 求证: $\angle C_1E_1B_1 = \angle CEB$.

分析:要证两个角相等,可通过等角定理或其推论来完成,其关键在于寻找或创造定理的条件.

证明:连结 EE_1 .

$\because E_1, E$ 分别 A_1D_1, AD 中点, $\therefore A_1E_1 \parallel AE$.

\therefore 四边形 A_1E_1EA 为平行四边形. $\therefore A_1A \parallel E_1E$.

又 $\because A_1A \parallel B_1B$, 由公理 4 知 $B_1B \parallel E_1E$.

\therefore 四边形 E_1EBB_1 是平行四边形. $\therefore E_1B_1 \parallel EB$.

同理 $E_1C_1 \parallel EC$.

又 $\angle C_1E_1B_1$ 与 $\angle CEB$ 两边的方向相同, $\therefore \angle C_1E_1B_1 = \angle CEB$.

注:有关证明角相等,一般采用下面三种途径:

①利用等角定理及其推论;

②利用三角形全等;

③利用三角形相似.

本例还可通过证明 $\triangle B_1C_1E_1 \cong \triangle BCE$ 来证明两角相等,同学们不妨一试.

【例 7】在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, E, F 分别为 BB_1, CC_1 的中点, 求 AE, BF 所成角的余弦值.

分析:采用直接平移法,把 BF 平移至 EC_1 , 则角可找到,再解三角形即可.

解法一:如图 9-2-14, 连结 EC_1 , 则 $EC_1 \parallel BF$.

由定义可知, AE 与 EC_1 所成的锐角或直角, 就是 AE 与 BF 所成的角.

连结 AC_1 , 设正方体的棱长为 a , 则 $AE=EC_1=$

$$\frac{\sqrt{5}}{2}a, AC_1=\sqrt{3}a.$$

在 $\triangle AEC_1$ 中, $\cos \angle AEC_1 = \frac{2AE^2 - AC_1^2}{2AE^2} = 1 -$

$$\frac{AC_1^2}{2AE^2} = 1 - \frac{6}{5} = -\frac{1}{5}.$$

故 $\angle AEC_1$ 为异面直线 AE 与 BF 所成角的补角.

因此 AE, BF 所成角的余弦值是 $\frac{1}{5}$.

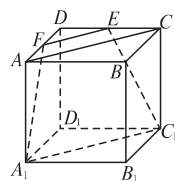


图 9-2-12

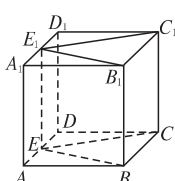


图 9-2-13

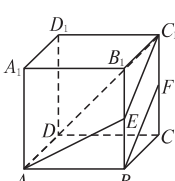


图 9-2-14

②推论:如果两条相交直线和另两条相交直线分别平行,那么这两组直线所成的锐角(或直角)相等.

需要说明的是:对于等角定理中的条件“方向相同”.
①若仅将它改成“方向相反”,则这两个角也相等;
②若仅将它改成“一边方向相同,而另一边方向相反”,则这两个角互补.

4. 两条异面直线所成的角

(1) 两条异面直线所成的角的定义

直线 a, b 是异面直线,经过空间任意一点 O ,分别引直线 $a' \parallel a, b' \parallel b$,相交直线 a', b' 所成的锐角(或直角)叫做异面直线 a, b 所成的角.

(2) 对“异面直线所成的角”概念的理解

异面直线所成的角定量地反映了异面直线在方向上的差异.异面直线所成角的大小是由两直线的相互位置所确定的,与定义中点 O 的位置选择无关.故 O 点常取在直线 a 或 b 上,或取一特殊点,如某线段的端点、中点、分点等.

将两条异面直线所成的角转化为平面上的相交直线的夹角,实现了空间问题向平面问题的转化,使平面几何与立体几何建立了联系,促进了学科间的知识渗透.

(3) 异面直线所成角 θ 的范围是 $0^\circ < \theta \leq 90^\circ$.

(4) 两条异面直线垂直

如果两条异面直线所成的角是直角,则称这两条异面直线互相垂直.

(5) 求异面直线所成角的一般步骤

①选择适当的点,平移异面直线中的一条或两条成为相交直线,这里的点通常选择特殊位置的点,如线段的中点或端点,也可以是异面直线中某一条上的特殊点.

②求相交直线所成的锐角(或直角).通常在三角形中利用余弦定理计算这个角的大小,但应注意:若用余弦定理求出 $\cos\alpha < 0$ (α 是平移后相交直线的交角),则异面直线所成的角应为 $\pi - \alpha$.

5. 两条异面直线的距离

(1) 两条异面直线的公垂线

和两条异面直线都垂直相交的直线叫做两条异面直线的公垂线.

两条异面直线的公垂线不仅与异面直线都垂直,而且与这两条直线都相交.两条异面直线的公垂线有且只有一条,但与两条异面直线都垂直的直线有无数条.

(2) 两条异面直线的距离

两条异面直线的公垂线夹在这两条异面直线间的线段(公垂线段)的长度,叫做这两条异面直线的距离.

实际上,异面直线间的距离是异面直线上任意两点间距离的最小值.

两条异面直线的位置关系,必须用两个因素来表示,一是它们之间所成的角,另一个是它们的距离,所以两条异面直线的距离是它们位置关系的重要因素.

(3) 求两条异面直线的距离的步骤

①找(或作);②证明;③指(指出转化成平面图形中的什么距离);④计算(借助有关知识计算出它们的公垂线段的长度).

分析二:连结 DB, FD , 可得 $\angle DFB$ 即为异面直线 AE 和 BF 所成的角,进而求其余弦值.

解法二:连结 DB, FD , 可证得 $FD \parallel AE$ ($\because EF \parallel AD$), $\angle DFB$ (或其补角)即为异面直线 AE, BF 所成的角.

$$DF = BF = \frac{\sqrt{5}}{2}a, BD = \sqrt{2}a.$$

在 $\triangle DFB$ 中,由余弦定理知

$$\begin{aligned} \cos DFB &= \frac{(\frac{\sqrt{5}}{2}a)^2 + (\frac{\sqrt{5}}{2}a)^2 - (\sqrt{2}a)^2}{2 \cdot (\frac{\sqrt{5}}{2}a) \cdot (\frac{\sqrt{5}}{2}a)} \\ &= \frac{\frac{5}{4} + \frac{5}{4} - 2}{\frac{5}{2}} = \frac{1}{5}, \end{aligned}$$

$\therefore AE, BF$ 所成角的余弦值为 $\frac{1}{5}$.

注:①异面直线所成角的范围是 $(0^\circ, 90^\circ]$, 当求得某角的余弦值为负值时,则此角的补角才是异面直线所成的角.

②还可取 D_1D 中点 G , 则 $\angle GAE$ 为所求,或在平面 A_1ABB_1 中,过 B 作 AE 的平行线也可找到所求的角.

【例 8】如图 9-2-15, P 是 $\triangle ABC$ 所在平面外的一点, M, N 分别是 AB 和 PC 的中点, $PA = BC = m$, $PB = AC$.

(1) 求证: MN 是 AB 和 PC 的公垂线;

(2) 当 PA, BC 成 90° 角时,求 AB 和 PC 间的距离.

分析:要证明 MN 是 AB 和 PC 的公垂线,必须说明两个问题:一是 MN 和 AB, PC 都垂直,二是 MN 和 AB, PC 都相交.

(1) 证明:连结 AN 和 BN .

在 $\triangle PAC$ 和 $\triangle CBP$ 中, $PA = BC, AC = PB, PC = PC$,

故 $\triangle PAC \cong \triangle CBP$.

由 N 是公共线 PC 的中点,知 $AN = BN$.

由 M 是 AB 的中点,知 $MN \perp AB$.

同理 $MN \perp PC$. 又 MN 与 AB, PC 都相交,

因此, MN 是 AB 和 PC 的公垂线.

(2) 解:取 PB 的中点 D , 连结 DM, DN ,

于是 $DM \parallel PA$, 且 $DM = \frac{1}{2}PA = \frac{1}{2}m$.

同理 $DN \parallel BC$, 且 $DN = \frac{1}{2}BC = \frac{1}{2}m$.

于是 $\angle MDN$ 是异面直线 PA, BC 所成的角,

故 $\angle MDN = 90^\circ$.

在 $\text{Rt}\triangle MDN$ 中, $MN = \sqrt{DM^2 + DN^2} = \frac{\sqrt{2}}{2}m$,

即 AB 和 PC 间的距离为 $\frac{\sqrt{2}}{2}m$.

注:求线段的长度一般地要把该线段放到一个三角形中去求解,尤其是放到特殊三角形中去求解,如直角三角形、等腰三角形等.

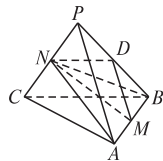


图 9-2-15

整合与扩展

1. 反证法

反证法的实质是证明命题的逆否命题成立, 因为原命题与它的逆否命题是互为等价的命题.

(1) 反证法证题的一般步骤

① 反设: 作出与命题结论相反的假设;

② 归谬: 从假设出发, 推导出一个与已知条件或某一公理、定理, 或某一已获证的命题相抵触的结论, 从而得到一对逻辑矛盾;

③ 断言: 断定产生矛盾的原因在于作出的假设是错误的, 从而断定原命题正确.

(2) 宜用反证法证明的几类问题

① 有些问题, 仅从条件出发, 能推出什么所知甚少, 对这类命题往往感到无从下手, 如果用反证法否定了结论, 添加了新的假设, 相当于增加了条件.

② 结论是“唯一”的有些命题.

③ 命题的结论以是否定形式(“没有”“不是”“不能”“不存在”等)出现的.

④ 有些命题的结论数量上是无限的(“至少……”或“至多……”).

⑤ 已知有些命题的逆命题正确, 证明原命题成立.

2. 求异面直线所成的角

求两条异面直线所成的角, 关键在于找到恰当的点 O , 通过平移, 作出异面直线所成的角.

在平移直线寻找异面直线所成的角时, 线的平移必在某个面中进行, 该面具有两个特点: (1) 该平面包含其中的一条异面直线; (2) 该平面与另一条异面直线相交.

如: 在图 9-2-16 所示的正四面体(四个面是全等的等边三角形的四面体) $ABCD$ 中, E, F 分别是棱 BC, AD 的中点, CF 与 DE 是一对异面直线, 在图形中适当地选取一点作出异面直线 CF, DE 的平行线, 找出异面直线 CF 与 DE 成的角.

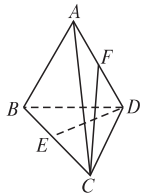


图 9-2-16

思路一: 选取平面 ACD , 该平面有以下两个特点: (1) 它包含直线 CF ; (2) 它与 DE 相交于点 D , 延展平面 ACD , 在该平面中, 过点 D 作 $DM \parallel CF$, 交 AC 的延长线于 M , 连结 EM , 可知 DE 与 DM 所成的角, 即为异面直线 DE 与 CF 所成的角, 如图 9-2-17 所示.

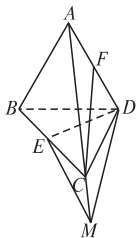


图 9-2-17

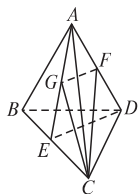


图 9-2-18

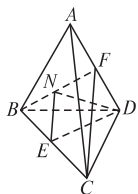


图 9-2-19

思路二: 选取平面 ADE , 该平面有如下两个特点: (1) 它包含直线 DE ; (2) 它与 CF 相交于点 F . 在

【例 9】如图 9-2-21, a, b 是异面直线, $A, B \in a, C, D \in b, E, F$ 分别是线段 AC 和 BD 的中点, 判断 EF 和 a, EF 和 b 的位置关系, 并证明你的结论.

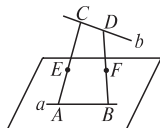


图 9-2-21

分析: 本题是探索性问题. EF 和 a 的关系如何? 题目中没有给出, 需要我们去探求, 而空间两直线的位置关系可分为两类, 即共面直线和异面直线, 所以我们可以先假设 EF 和 a 共面, 看是否成立. 若成立, 再进一步考查 EF 和 a 是平行还是相交; 若不成立, 则说明 EF 和 a 异面.

解: 假设 EF 和 a 共面, 设这个平面为 α ,

则 $EF \subset \alpha, a \subset \alpha. \therefore A, B, E, F \in \alpha,$

$\therefore BF \subset \alpha, AE \subset \alpha.$

又 $\because C \in AE, D \in BF,$

$\therefore C, D \in \alpha.$ 于是 $b \subset \alpha.$

从而 a, b 共面于 α , 这与题设条件 a, b 是异面直线相矛盾.

$\therefore EF$ 和 a 共面的假设不成立.

$\therefore EF$ 和 a 是异面直线.

同理可得 EF 和 b 也是异面直线.

【例 10】如图 9-2-22, 正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为 a , 求异面直线 BD_1 和 B_1C_1 所成的角.

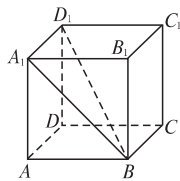


图 9-2-22

分析: 可利用直接平移法作出异面直线所成的角, 结合图形易知 $\angle A_1D_1B$ 为所求的角.

解: 在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中,

$\because B_1C_1 \parallel A_1D_1,$

$\therefore A_1D_1$ 与 BD_1 所成的锐角或直角就是异面直线 B_1C_1 和 BD_1 所成的角.

连结 A_1B , 在 $Rt\triangle BD_1A_1$ 中,

$$A_1D_1 = a, A_1B = \sqrt{2}a, \tan \angle BD_1A_1 = \frac{BA_1}{D_1A_1} = \sqrt{2}.$$

$\therefore \angle BD_1A_1 = \arctan \sqrt{2}.$

即异面直线 BD_1 和 B_1C_1 所成的角为 $\arctan \sqrt{2}.$

【例 11】四面体 $A-BCD$ 的棱长均为 a, E 为棱 BC 的中点, 求异面直线 AE 和 BD 所成角的余弦值.

分析: 可在平面 BCD 内过 E 作 BD 的平行线, 然后在 $\triangle AEF$ 中求出所成角的余弦值.

解: 如图 9-2-23, 取 CD 中点 F , 连结 $EF, AF,$

$\because E$ 为 BC 的中点, $\therefore EF$ 为 $\triangle BCD$ 的中位线,

$\therefore EF \parallel BD.$

$\therefore AE$ 与 EF 所成的锐角或直角就是异面直线 AE 和 BD 所成的角.

由正三角形的性质知 $AE = AF = \frac{\sqrt{3}}{2}a, EF = \frac{1}{2}a.$

$$\text{在 } \triangle AEF \text{ 中, } \cos \angle AEF = \frac{\frac{1}{2}EF}{AE} = \frac{\sqrt{3}}{6},$$

即异面直线 AE 和 BD 所成角的余弦值为 $\frac{\sqrt{3}}{6}.$

注: 本题是利用三角形中位线达到平移的目的. 这种作异面直线所成角的方法称为中位线平移法.

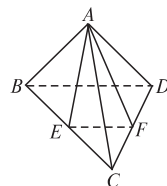


图 9-2-23

10. 如图 9-2-26, A 是平面 BCD 外的一点, $AD=BC=2a$, E, F 分别是 AB, CD 的中点, $EF=\sqrt{3}a$, 求 AD, BC 所成的角.

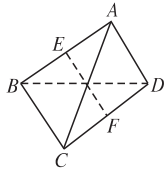


图 9-2-26

11. 如图 9-2-27, 已知在空间四边形 $ABCD$ 中, $AB=CD=3$, E, F 分别是 BC, AD 上的点, 且 $BE:EC=AF:FD=1:2$, $EF=\sqrt{7}$, 求 AB 和 CD 所成角的大小.

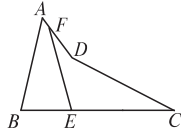


图 9-2-27

12. 如图 9-2-28, 在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, O, M 分别是 BD_1, AA_1 的中点.

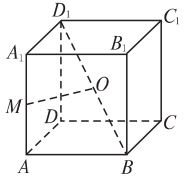


图 9-2-28

- (1) 求证: MO 是异面直线 AA_1 和 BD_1 的公垂线;
- (2) 求异面直线 AA_1 和 BD_1 所成角的余弦值;
- (3) 若正方体的棱长为 a , 求异面直线 AA_1 和 BD_1 的距离.

B 组

一、选择题

- 1. a 与 b, b 与 c 都是异面直线, 且 a 与 b 的公垂线同时也是 b 与 c 的公垂线, 那么 a 与 c 的位置关系是 ()
 - A. 平行或相交
 - B. 异面
 - C. 平行或异面
 - D. 平行、相交或异面
- 2. 下面四个命题中, 错误命题的个数是 ()
 - ① 若两条直线和第三条直线成等角, 则这两条直线平行
 - ② 若两条直线都和第三条直线垂直, 则这两条直线平行
 - ③ 若两条直线都和第三条直线平行, 则这两条直线平行
 - ④ 若两条直线分别在两个相交平面内, 则这两条直线不可能平行

- A. 1
- B. 2
- C. 3
- D. 4
- 3. 在长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, $\angle BAB_1 = \angle B_1A_1C_1 = 30^\circ$, 则 AB 与 A_1C_1 所成的角、 AA_1 与 B_1C 所成的角、 AB_1 与 A_1C_1 所成的角的余弦值分别是 ()
 - A. $30^\circ, 45^\circ, \frac{1}{4}$
 - B. $30^\circ, 30^\circ, \frac{1}{4}$
 - C. $30^\circ, 45^\circ, \frac{3}{4}$
 - D. $30^\circ, 30^\circ, \frac{3}{4}$

- 4. 已知 AB 是异面直线 a, b 的公垂线段, $AB=2$ cm, a, b 成 30° 角, 在直线 a 上取一点 P , 使 $PA=4$ cm, 则点 P 到直线 b 的距离为 ()
 - A. $2\sqrt{2}$ 或 $2\sqrt{14}$
 - B. $2\sqrt{14}$
 - C. $2\sqrt{2}$
 - D. $2\sqrt{5}$

二、填空题

- 5. 异面直线 $a, b, a \perp b, c$ 与 a 成 $\frac{\pi}{6}$ 角, 则 c 与 b 所成角 θ 的范围是 _____.
- 6. 在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, M, N 分别为棱 A_1A, B_1B 的中点, 若 θ 为直线 CM 与 D_1N 所成的角, 那么 $\sin\theta =$ _____.

7. E, F, G, H 是空间四边形 $ABCD$ 各边 AB, BC, CD, DA 的中点, 若对角线 $BD=2, AC=4$, 则 $EG^2 + HF^2$ 的值是 _____.

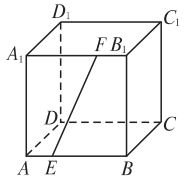


图 9-2-29

8. 如图 9-2-29, 在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, $AB=1, AE=B_1F=\frac{1}{3}$, 则异面直线 BC, EF 的距离是 _____.

三、解答题

- 9. 如图 9-2-30, A 是 $\triangle BCD$ 所在平面外一点, M, N 分别是 $\triangle ABC$ 和 $\triangle ACD$ 的重心.
 - (1) 求证: $MN \parallel BD$;
 - (2) 若 $BD=6$, 求 MN 的长.

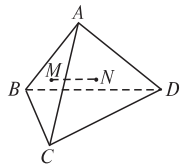


图 9-2-30

10. 在长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, 已知 $AB=a, BC=b, AA_1=c(a>b)$, 求异面直线 D_1B 与 AC 所成角的余弦值.

11. 如图 9-2-31, 在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, M, N, O 分别是 BB_1, BC, B_1D_1 的中点, 求异面直线 OB 与 MN 所成角的余弦值.

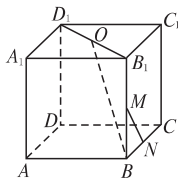


图 9-2-31

12. 如图 9-2-32, $SA \perp AB, SA \perp SC, SB \perp SC, AB = BC = CA = \sqrt{2}a, SA = SB = SC, M, N$ 分别是 AB, SC 的中点, 求异面直线 SM 和 BN 所成角的余弦值.

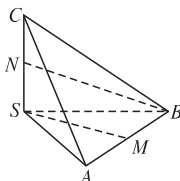


图 9-2-32

应用样板

1. (2001 年北京春季高考题) 如图 9-2-33 为正方体的平面展开图, 在这个正方体中, 以下四个命题中, 正确命题的序号是

- ① $BM \parallel ED$ ② CN 与 BE 是异面直线 ③ CN 与 BM 成 60° 角 ④ DM 与 BN 垂直

- A. ①②③ B. ②④ C. ③④ D. ②③④

2. (2002 年全国高考题) 如图 9-2-34 所示, 正六棱柱 $ABCDEF-A_1B_1C_1D_1E_1F_1$ 的底面边长为 1, 侧棱长为 $\sqrt{2}$, 则这个棱柱的侧面对角线 E_1D 与 BC_1 所成的角是 ...

- A. 90° B. 60° C. 45° D. 30°

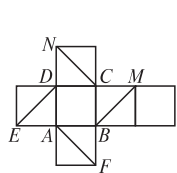


图 9-2-33

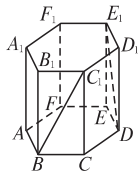


图 9-2-34

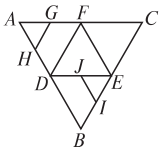


图 9-2-35

3. (2003 年北京春季高考) 如图 9-2-35, 在正 $\triangle ABC$ 中, D, E, F 分别为所在边的中点, G, H, I, J 分别为 AF, AD, BE, DE 的中点, 将 $\triangle ABC$ 沿 DE, EF, DF 折起成三棱锥后, GH 与 IJ 所成的角为

- ()

名师解密

1. 答案: C

解析: 把平面展开图折回原正方体如图 9-2-38, 易知 $BM \parallel ED, CN \parallel BE$, 故①②不正确.

连结 $AN, AC, \angle ANC$ 即为 CN 与 BM 所成的角,

而 $AN = NC = AC$,

$\therefore \angle ANC = 60^\circ$. 命题③正确. 故选 C. (④正确, 还可

由三垂线定理得出).

2. 答案: B

解析: 如图 9-2-34, 连结 FE_1 , 可知 $FE_1 \parallel BC_1$, 再连结 DF , 得 $\triangle DE_1F$.

由已知得 $DF = \sqrt{3}, E_1F = DE_1 = \sqrt{3}$,

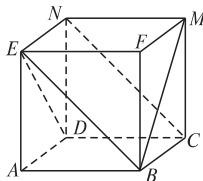


图 9-2-38

$\therefore \triangle DE_1F$ 为正三角形.

$\therefore E_1D$ 与 BC_1 所成的角是 60° . 故选 B.

3. 答案: B

解析: 折起后的图形如图 9-2-39, 其中 A, B, C 合于一点 A .

$\therefore HG \parallel DF, IJ \parallel DA$,

$\therefore HG$ 与 IJ 所成的角即为 $\angle ADF$, 而 $\triangle ADF$ 为等边 \triangle , 故 GH 与 IJ 成 60° 角, 选 B.

4. 答案: B

解析: 取 BC 中点 G , 连结 FG , 则 $O \in FG$.

$\therefore F$ 为 AD 中点,

$\therefore FG \parallel DC \parallel D_1C_1$.

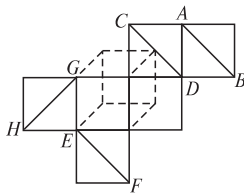


图 9-2-39