

中学教材·创新讲解

高一数学

上

目

录

mu lu

第一章 集合与简易逻辑	1
一 集合	1
1.1 集合	1
1.2 子集、全集、补集	9
1.3 交集、并集	15
1.4 含绝对值的不等式解法	24
1.5 一元二次不等式解法	34
二 简易逻辑	49
1.6 逻辑联结词	49
1.7~1.8 四种命题 充分条件与必要条件	56
本章总结	68
本章检测	71
第二章 函数	76
一 函数	76
2.1~2.2 函数、函数的表示法	76
2.3 函数的单调性	94
2.4 反函数	106
二 指数与指数函数	117
2.5 指 数	117
2.6 指数函数	124
三 对数与对数函数	135

2.7 对数	135
2.8 对数函数	142
2.9 函数的应用举例	152
本章总结	168
本章检测	176
期中检测	181
第三章 数列	186
3.1 数列	186
3.2 等差数列	199
3.3 等差数列的前 n 项和	212
3.4 等比数列	226
3.5 等比数列的前 n 项和	240
研究性学习课题 数列在分期付款中的应用	256
本章总结	269
本章检测	275
期末检测	281

第一章 集合与简易逻辑

一 集 合

1.1 集 合

1. 集合与元素——在课堂上要记住它们的定义并明确二者的关系.
2. 常用数集及其专用记号——记牢.
3. 集合中元素的三个特性——不仅要透彻理解,而且要灵活运用它们解题.
4. 集合的分类及表示方法——要记住三种表示方法并能针对不同的问题选择合适的表示法,有时要注意它们之间的相互转化.

教材全解

知识点 1 集合

某些指定的对象集在一起就成为一个集合,也简称集.集合理论的创始人康托尔称集合为一些确定的不同的东西的总称.集合是数学中的原始概念,就像几何中的点、线、面等概念一样,不加定义,只作描述性说明.集合常用大写的拉丁字母 $A, B, C, \dots$ 表示.

知识点 2 集合的元素

集合中的每个对象叫做这个集合的元素.集合中的元素常用小写的拉丁字母 $a, b, c, \dots$ 表示.

知识点 3 元素与集合间的关系

如果 a 是集合 A 的元素,就说 a 属于集合 A ,记作 $a \in A$,读作 a 属于集合 A . 如果 a 不是集合 A 的元素,就说 a 不属于集合 A ,记作 $a \notin A$,读作 a 不属于集合 A .

提醒 (1) $a \in A$ 与 $a \notin A$ 取决于 a 是不是集合 A 中的元素.对于任何 a 与 A ,在 $a \in A$ 与 $a \notin A$ 这两种情况中必有一种且只有一种成立.

(2) 符号 ' $\in$ '、' $\notin$ ' 是表示元素与集合之间的关系的,别无它用,请大家要记准了!

知识点 4 集合的分类与几种常见的数集

(1) 含有有限个元素的集合叫做有限集;

(2) 含有无限个元素的集合叫做无限集；

(3) 不含任何元素的集合叫做空集. 例如, 方程 $x^2 + 1 = 0$ 在实数范围内解的集合就为空集, 空集记作 $\emptyset$;

为了书写的方便, 我们规定常见的数集用特定的字母表示, 下面是几种常见数集的记法, 请大家记住.

(4) 全体非负整数的集合简称非负整数集(或自然数集), 记作 N ;

(5) 非负整数集内排除 0 的集合, 简称正整数集, 记作 N^+ (或 N_+);

(6) 全体整数的集合简称为整数集, 记作 Z ;

(7) 全体有理数的集合简称为有理数集, 记作 Q ;

(8) 全体实数的集合简称为实数集, 记作 R .

知识点 5 集合中元素的特性

► 重点

(1) 确定性. 设 A 是一个给定的集合, a 是某一具体对象, 则 a 或者是 A 的元素, 或者不是 A 的元素, 两种情况必有一种且只有一种成立;

(2) 互异性. 集合中的元素必须是互异的, 也就是说, 对于一个给定的集合, 它的任何两个元素都是不同的;

(3) 无序性. 集合与其中元素的排列次序无关, 如集合 $\{a, b\}$ 与 $\{b, a\}$ 是同一集合.

知识点 6 集合的表示方法

► 难点

(1) 列举法

把集合中的元素一一列举出来, 写在大括号内表示集合的方法.

提醒 (1) 元素间用分隔号“,”;

(2) 元素不重复不遗漏;

(3) 元素可无顺序;

(4) 对于含较多元素的集合, 如果构成该集合的元素有明显规律, 可用列举法.

(2) 描述法

把集合中的元素的公共属性描述出来, 写在大括号内表示集合的方法. 它的一般形式是 $\{x | p(x)\}$, 其中 x 为代表元素, $p(x)$ 是集合中元素 x 所具有的特征性质.

提醒 使用描述法时:

(1) 写清楚该集合中元素的代号;

(2) 说明该集合中元素的性质;

(3) 不能出现未被说明的字母;

(4) 多层描述时, 要准确使用好“且”“或”等字眼;

(5) 所有描述的内容都要写在集合符号内;

(6) 用于描述的语句或符号力求简洁、准确.

(3) 图示法

为了形象地表示集合, 有时常画一条封闭的曲线, 用它的内部来表示一个集合.

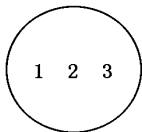


图 1-1-1

例如,如图 1-1-1 表示集合 $\{1,2,3\}$.

解题能力培养

基础篇

例 1 下列各组对象能构成集合的是_____

(1)正三角形的全体;(2)充分接近于零的实数的全体;(3)血压很高的人;(4)“奥运会中的比赛项目”; (5)所有不大于 3,且不小于 0 的整数”.

[解] “充分接近”“很高”均无明确的标准,无法确切地辨别某个对象是或不是这个范畴的标准,因此构不成集合.而(1)、(4)、(5)都有明确的确定的对象,故可构成集合.

例 2 用列举法表示下列集合

(1) $A = \{(x, y) \mid x + y = 6, x \in \mathbf{N}, y \in \mathbf{N}\}$

(2)若 a, b, c 均不为零, A 的元素为:

$\frac{a}{|a|} + \frac{b}{|b|} + \frac{c}{|c|} + \frac{abc}{|abc|}$ 的值.

[解析] (1)二元一次方程 $x + y = 6$ 有无穷多解,因为 $x \in \mathbf{N}, y \in \mathbf{N}$,所以 $y = 6 - x$,

当 $x = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6$ 时, $y = 6, 5, 4, 3, 2, 1, 0$,故

$A = \{(0, 6), (1, 5), (2, 4), (3, 3), (4, 2), (5, 1), (6, 0)\}$.

(2)若 a, b, c 三数中三个都小于 0,则结果为 -4 ;

若一正二负,则结果为 0;

若二正一负,则结果为 0;

若三正,则结果为 4.

[解] (1) $A = \{(0, 6), (1, 5), (2, 4), (3, 4), (4, 2), (5, 1), (6, 0)\}$;

(2) $A = \{-4, 0, 4\}$.

例 3 用符号 $\in$ 或 $\notin$ 填空

(1) $2\sqrt{5}$ _____ $\{x \mid x < \sqrt{19}\}$, $\sqrt{2} + \sqrt{5}$ _____ $\{x \mid x \leq 2 + \sqrt{3}\}$;

(2) 3 _____ $\{x \mid x = n^2 + 1, n \in \mathbf{N}\}$, 5 _____ $\{x \mid x = n^2 + 1, n \in \mathbf{N}\}$.

[解] (1) $\because 2\sqrt{5} = \sqrt{20} > \sqrt{19}, \therefore 2\sqrt{5} \notin \{x \mid x < \sqrt{19}\}$;

$\because (\sqrt{2} + \sqrt{5})^2 = 7 + 2\sqrt{10} = 7 + \sqrt{40} < 7 + \sqrt{48} = 7 + 4\sqrt{3} = (2 + \sqrt{3})^2$,

$\therefore \sqrt{2} + \sqrt{5} < 2 + \sqrt{3}$.

故 $\sqrt{2} + \sqrt{5} \in \{x \mid x \leq 2 + \sqrt{3}\}$;

(2) 令 $n^2 + 1 = 3$,得

$n = \pm\sqrt{2} \notin \mathbf{N}$;

令 $n^2 + 1 = 5$,得

$$n = \pm 2, \pm 2 \in \mathbf{N},$$

故填 $\neq, \in$.

[点拨] 确定元素是否在集合中, 要根据元素是否满足代表元素所适合的条件来判定.

例 4 已知 $A = \{a - 3, 2a - 1, a^2 + 1\}$, 其中 $a \in \mathbf{R}$,

(1) 若 $-3 \in A$, 求实数 a 的值;

(2) 当 a 为何值时, 集合 A 的表示不正确.

[解] (1) 显然 $-3 \neq a^2 + 1$, $\therefore -3 = a - 3$ 或 $-3 = 2a - 1$

解得 $a = 0$ 或 $a = -1$;

(2) 当三个元素之间出现两个或两个以上的元素相等的情况时, A 的表示不正确, 由于 $a \in \mathbf{R}$

$\therefore$ 当 $a = -2$ 时, A 的表示不正确.

[点拨] 解(2)时充分利用集合元素的互异性.

综合创新与应用

提高篇

【综合思维培养】

集合与简易逻辑是高中数学的基础内容之一, 在高考中大多是与“集合”这一部分的内容知识综合.

例 5 设集合 $A = \{x \mid x = 2k, k \in \mathbf{Z}\}$, $B = \{x \mid x = 2k + 1, k \in \mathbf{Z}\}$, $C = \{x \mid x = 4k + 1, k \in \mathbf{Z}\}$, 又有 $a \in A, b \in B$, 试判断 $a + b$ 与 A, B, C 的关系.

[解] $\because a \in A, \therefore a = 2k_1 (k_1 \in \mathbf{Z})$,

又 $\because b \in B, \therefore b = 2k_2 + 1 (k_2 \in \mathbf{Z})$. $\therefore a + b = 2(k_1 + k_2) + 1$

又 $\because k_1 + k_2 \in \mathbf{Z}, \therefore a + b$ 为奇数

$\therefore a + b \in B, a + b \notin A$.

当 $k_1 + k_2$ 为偶数时, $a + b \in C$;

当 $k_1 + k_2$ 为奇数时, $a + b \notin C$.

例 6 设 A 是数集, 且满足条件 若 $a \in A, a \neq 1$, 则 $\frac{1}{1-a} \in A$.

(1) 若 $2 \in A$, 则 A 中必还有另外两个元素;

(2) 集合 A 不可能是单元素集;

(3) 集合 A 中至少有三个不同元素.

[解] 由 $a \in A, a \neq 1$, 则 $\frac{1}{1-a} \in A$.

(1) 若 $2 \in A$, 则 $\frac{1}{1-2} = -1 \in A$, 于是 $\frac{1}{1-(-1)} = \frac{1}{2} \in A$

故集合 A 中还有 $-1, \frac{1}{2}$ 两个元素.

(2) 若 A 为单元素集, 则 $a = \frac{1}{1-a}$,

即 $a^2 - a + 1 = 0$ 方程无实数解, $\therefore a \neq \frac{1}{1-a}$.

$\therefore a$ 与 $\frac{1}{1-a}$ 都为集合 A 的元素, 则 A 不是单元素集.

(3) 由已知, $a \in A \Rightarrow \frac{1}{1-a} \in A \Rightarrow \frac{1}{1-\frac{1}{1-a}} \in A$

即 $\frac{1-a}{-a} \in A$. 现只需证明 $a, \frac{1}{1-a}, \frac{1-a}{-a}$ 三数互不相等, ①若 $a = \frac{1}{1-a} \Rightarrow a^2 - a + 1 = 0$, 此方程无解, $\therefore a \neq \frac{1}{1-a}$;

②若 $a = \frac{1-a}{-a}$ 则 $a^2 - a + 1 = 0$, 方程无解; $\therefore a \neq \frac{1-a}{-a}$;

③若 $\frac{1}{1-a} = \frac{1-a}{-a}$ 则 $a^2 - a + 1 = 0$, 方程无解, $\therefore \frac{1}{1-a} \neq \frac{1-a}{-a}$, 故集合 A 中至少有三个元素.

[点拨] 解此题的关键在于会应用集合中元素的互异性. 由已知 $a \in A$, 则 $\frac{1}{1-a} \in A \Rightarrow \frac{1}{1-\frac{1}{1-a}} \in A$, 即 $\frac{1-a}{-a} \in A \Rightarrow \frac{1}{1-\frac{1-a}{-a}} \in A$, 即 $a \in A$ 这样循环往返, 因此说明 $a, \frac{1}{1-a}, \frac{1-a}{-a}$ 互不相等.

【创新应用思维培养】

学好本节内容需做到如下三点:

一是加深对集合基本概念的理解和认识, 如集合的表示方法, 集合的三个特性、元素与集合的关系等; 二是集合的应用, 如方程的解, 不等式(组)的解用集合表示; 三是正确使用集合语言和符号解决相关问题.

例 7 已知集合 $A = \{x \in \mathbf{R} \mid ax^2 + 2x + 1 = 0\}$ 其中 $a \in \mathbf{R}$.

(1) 1 是 A 中的一个元素, 用列举法表示 A ;

(2) 若 A 中有且只有一个元素, 求 a 的值组成的集合 B ;

(3) 若 A 中至多有一个元素, 试求 a 的取值范围.

[解] (1) $\because 1 \in A$, $\therefore 1$ 是方程 $ax^2 + 2x + 1 = 0$ 的一个根.

$\therefore a \cdot 1^2 + 2 \times 1 + 1 = 0$. 即 $a = -3$.

$\therefore$ 方程为 $-3x^2 + 2x + 1 = 0$, 解得 $x_1 = 1, x_2 = \frac{1}{3}$.

$\therefore$ 此时集合 $A = \{-\frac{1}{3}, 1\}$.

(2) 若 $a = 0$, 方程化为 $2x + 1 = 0$, 此时有且仅有一个根 $x = -\frac{1}{2}$.

若 $a \neq 0$, 则当且仅当 $\Delta = 4 - 4a = 0$, 即 $a = 1$ 时
 方程有两个相等的实根 $x_1 = x_2 = -1$, 此时, 集合 A 中有且仅有一个元素,
 $\therefore$ 所求集合 $B = \{0, 1\}$;

(3) 集合 A 中至多有一个元素包括两种情况:

① A 中有且只有一个元素, 由(2)知此时 $a = 0$ 或 $a = 1$,

② $A = \emptyset$, 此时 $a \neq 0$, 且 $\Delta = 4 - 4a < 0 \quad \therefore a > 1$

综合①②知所求 a 的取值范围是 $\{a \mid a \geq 1 \text{ 或 } a = 0\}$



实 力 检 测

一、选择题

1. 数 0 与集合 $\emptyset$ 的关系是 ()

- A. $0 \in \emptyset$ B. $0 = \emptyset$ C. $\{0\} = \emptyset$ D. $0 \notin \emptyset$

[同类提高题] 已知平面内的点 $M(1, 2)$, $N(0, 3)$, 集合:

$A = \{(x, y) \mid 2x - y = 0\}$, $B = \{(x, y) \mid x + 2y = 5\}$, $C = \{(x, y) \mid 2x + 3y = 9\}$, 那么
 M, N 与 A, B, C 的关系是 ()

- A. $M \in A, N \in B$ B. $M \in B, N \in A$
 C. $M \in C, N \in C$ D. $M \in B, N \notin B$

2. 给出下列 5 种说法:

- (1) 任意一个集合的正确表示方法都是唯一的;
 (2) 集合 $\{0, -1, 2, -2\}$ 与集合 $\{-2, -1, 0, 2\}$ 是同一个集合;
 (3) 若集合 P 是满足不等式 $0 \leq 2x \leq 1$ 的 x 的集合, 则这个集合是一个无限集;
 (4) 若 $a \in \mathbb{R}$, 则 $a \in \mathbb{Q}$;
 (5) 集合 $\{x \mid x = 2k - 1, k \in \mathbb{Z}\}$ 与集合 $\{y \mid y = 2m + 1, m \in \mathbb{Z}\}$ 表示的是同一个集合.

其中正确的说法有 _____.

[同类提高题] 下列语句① $\emptyset$ 中与 $\{0\}$ 表示同一集合; ② 由 $1, 2, 3$ 组成的集合可表示为 $\{1, 2, 3\}$ 或 $\{2, 3, 1\}$; ③ 方程 $(x - 1)^2(x - 2) = 0$ 的所有解的集合可表示为 $\{1, 1, 2\}$; ④ 集合 $\{x \mid 1 < x < 3\}$ 是有限集, 其中正确的是 ()

- A. ①与② B. ②与③ C. ② D. 以上语句都不对.

二、填空题

3. 集合 $\{x, x^2 - 2x\}$ 中, x 应满足的条件是 _____.

[同类提高题] 已知集合 $M = \{a, a + d, a + 2d\}$, $N = \{a, aq, aq^2\}$, 且 M, N 为同一集合, 试求实数 d, q , 并写出集合 M .

4. 用列举法表示

(1) $A = \{x \mid x = \frac{|a|}{a} + \frac{|b|}{b}, a, b \text{ 为非零实数}\}$;

(2) $A = \{x \mid \frac{6}{3-x} \in \mathbb{Z}, x \in \mathbb{N}\}$.

5. 若集合 $A = \{x | x^2 + ax + b = x\}$ 中仅有一个元素 a , 求 a, b 的值.

【同类提高题】 已知集合 $A = \{x | ax + b = 1\}$, $B = \{x | ax + b > 4\}$, 其中 $a \neq 0$. 若 A 中的元素必为 B 中的元素, 求实数 b 的取值范围.

6. 设 $A = \{2, 3, a^2 + 2a - 3\}$, $B = \{a + 3, 2\}$, 若已知 $5 \in A$ 且 $5 \notin B$, 求实数 a 的值.

【同类提高题】 已知 $M = \{a, b\}$, $N = \{a, 2, b^2\}$ 且 $M = N$, 求 a, b 的值.

7. 已知集合 $M = \{p \in \mathbb{R} | \text{关于 } x \text{ 的方程 } x^2 + 2(p-1)x + 1 = 0 \text{ 有实数解}\}$, 求函数 $y = 2x - 1 (x \in M)$ 的取值范围.

【同类提高题】 已知数集 M 满足条件: 若 $a \in M$, 则 $\frac{1+a}{1-a} \in M$ ($a \neq \pm 1, a \neq 0$)

(1) 设 $3 \in M$, 试把由此确定的 M 的其它元素全部求出来, 并指出这时 M 中共有多少元素;

(2) 自己设计一个数属于 M , 再把由此确定的 M 中其他元素全部求出来;

(3) 比较(1)(2)的结论, 你能悟出什么道理吗? 试写出你的发现, 并大胆尝试如何给出证明.



实力检测参考答案

1. D 点拨: 数 0 为元素, $\emptyset$ 为空集且不含任何元素, 故选 D.

【同类提高题】 D 点拨: 集合 A, B, C 都为点集, 因此只要将 M, N 两点的坐标分别代入方程即得 $M \in B, N \notin B$, 故选 D.

2. (2)、(3)、(5) 点拨: 由于集合 $\{x | x - 1 = 0\}$ 可知(1)是错误的; 再从无限集合及集合中元素的无序性分析可知(2)、(3)正确; a 为实数, 依然有可能为无理数, (4)是错误的; 而(5)中的两个集合, 它们都表示由全集奇数组成的集合, (5)是正确的, 故正确的说法有(2)、(3)、(5).

【同类提高题】 ② 点拨: 由集合元素的互异性、无序性及集合的分类知正确语句只有②

3. $x \neq 0$ 且 $x \neq -1$ 且 $x \neq 3$. 点拨: 由集合元素的互异性知, x 应满足 $\begin{cases} x \neq 3, \\ x^2 - 2x \neq 3, \text{ 解} \\ x^2 - 2x \neq x. \end{cases}$

之, 得 $\begin{cases} x \neq 0, \\ x \neq -1, \\ x \neq 3. \end{cases}$

$\therefore x$ 应满足的条件是: $x \neq 0$ 且 $x \neq -1$ 且 $x \neq 3$.

【同类提高题】 点拨: 由集合元素的互异性知, $a \neq a + d, a \neq aq^2$, 得 $a \neq 0, d \neq 0, q \neq \pm 1$, 再由集合元素的特性得:

(1) $\begin{cases} a + d = aq, \\ a + 2d = aq^2, \end{cases}$ 或 $\begin{cases} a + d = aq^2, \\ a + 2d = aq. \end{cases}$

解(1) $\begin{cases} d = a(q-1), \\ 2d = a(q^2-1). \end{cases} \therefore \frac{2d}{d} = \frac{a(q^2-1)}{a(q-1)}, \text{即 } 2 = q+1, q=1, \because q \neq \pm 1, \therefore \text{舍去.}$

解(2) $\begin{cases} d = a(q^2-1) & \text{①} \\ 2d = a(q-1) & \text{②} \end{cases} \Rightarrow \frac{d}{2d} = \frac{a(q^2-1)}{a(q-1)}, \text{即 } \frac{1}{2} = q+1, \text{解得 } q = -\frac{1}{2}, \text{代入①得}$
 $d = -\frac{3}{4}a.$

于是 $M = N = \{a, -\frac{1}{2}a, \frac{1}{4}a\}.$

4. 点拨 : (1) $x = \frac{|a|}{a} + \frac{|b|}{b}$, 当 $a > 0, b > 0$ 时, $x = 2$, 当 $a < 0, b < 0$ 时 $x = -2$; 当 a, b 异号时, $x = 0$. 故 $A = \{-2, 0, 2\}.$

(2) 由 $\frac{6}{3-x} \in \mathbb{Z}$ 且 $x \in \mathbb{N}$, 得到 x 的值, x 所取的自然数, 要使 $3-x$ 整除 6, 故 $3-x = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6$, 所以 $x = 2, 4, 1, 5, 6, 0, -3, 9$. 而 $x = -3 \notin \mathbb{N}$, 故舍去, 因此 $A = \{0, 1, 2, 4, 5, 6, 9\}.$

5. 点拨 : 由题意知, a 为方程 $x^2 + (a-1)x + b = 0$ 的相等实根.

$$\therefore \begin{cases} (a-1)^2 - 4b = 0, \\ a^2 + (a-1)a + b = 0. \end{cases} \text{解得} \begin{cases} a = \frac{1}{3}, \\ b = \frac{1}{9}. \end{cases}$$

[同类提高题] 点拨 : A 中的元素是 $x = \frac{1-b}{a}$, 由 $\frac{1-b}{a} \in B, \therefore a \cdot \frac{1-b}{a} - b > 4.$
 $\therefore b < -\frac{3}{2}$, 即为所求范围.

6. 点拨 : $\because 5 \in A$ 且 $5 \notin B, \therefore \begin{cases} a^2 + 2a - 3 = 5, \\ |a+3| \neq 5. \end{cases}$

即 $\begin{cases} a = -4 \text{ 或 } a = 2, \\ a \neq 2 \text{ 且 } a \neq 8. \end{cases} \therefore a = -4.$

[同类提高题] 点拨 : $\because M = N \therefore \begin{cases} a = 2a, \\ b = b^2, \end{cases} \text{或} \begin{cases} a = b^2, \\ 2a = b. \end{cases}$

$\therefore \begin{cases} a = 0, \\ b = 0, \end{cases} \text{或} \begin{cases} a = 0, \\ b = 1, \end{cases} \text{或} \begin{cases} a = \frac{1}{4}, \\ b = \frac{1}{2}, \end{cases}; \text{而} \begin{cases} a = 0, \\ b = 0 \end{cases} \text{不符合集合元素的互异性.}$

$\therefore \begin{cases} a = 0, \\ b = 1, \end{cases} \text{或} \begin{cases} a = \frac{1}{4}, \\ b = \frac{1}{2}. \end{cases}$

7. 点拨 : 由已知, 得 $\Delta = 4(p-1)^2 - 4 \geq 0$, 解得 $p \geq 2$ 或 $p \leq 0$.

$\therefore M = \{p \mid p \geq 2 \text{ 或 } p \leq 0\}.$

$\because x \in M, \therefore x \geq 2 \text{ 或 } x \leq 0.$

$\therefore 2x-1 \geq 3 \text{ 或 } 2x-1 \leq -1.$

$\therefore y$ 的取值范围是 $\{y | y \leq -1 \text{ 或 } y \geq 3\}$.

[同类提高题] 点拨:(1)若 $3 \in M$, 则 $\frac{1+3}{1-3} = -2 \in M$, 则 $\frac{1+(-2)}{1-(-2)} = -\frac{1}{3} \in M$,

$$\frac{1+(-\frac{1}{3})}{1-(-\frac{1}{3})} = \frac{1}{2} \in M, \frac{1+\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}} = 3 \in M, \text{以后循环, 于是 } M = \{3, -2, -\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\}, \text{共4个}$$

元素.

(2)取 $a = 4 \in M$, 仿上得 $M = \{4, -\frac{5}{3}, -\frac{1}{4}, \frac{3}{5}\}$.

(3)猜想 集合 M 只含 4 个元素, 证明如下 因为若 $a \in M$, 则 $\frac{1+a}{1-a} \in M (a \neq 0, a \neq \pm 1)$

$$\text{所以对 } \frac{1+a}{1-a} \in M, \text{ 有 } \frac{1+\frac{1+a}{1-a}}{1-\frac{1+a}{1-a}} = -\frac{1}{a} \in M.$$

$$\frac{1+(-\frac{1}{a})}{1-(-\frac{1}{a})} = \frac{a-1}{a+1} \in M, \frac{1+\frac{a-1}{a+1}}{1-\frac{a-1}{a+1}} = a \in M \text{ 以后循环, 故 } M \text{ 中只有以下四个元素, 即}$$

$$M = \{a, \frac{1+a}{1-a}, -\frac{1}{a}, \frac{a-1}{a+1}\}.$$

1.2

子集、全集、补集

教材全解

知识点 1 子集、真子集的概念

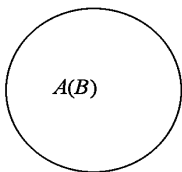
► 重点

一般地, 对于两个集合 A 与 B , 如果集合 A 的任何一个元素都是集合 B 的元素, 我们说集合 A 包含于集合 B , 或集合 B 包含集合 A , 记作 $A \subseteq B$ (或 $B \supseteq A$), 这时我们也说集合 A 是集合 B 的子集.

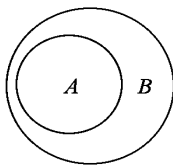
对于两个集合 A 与 B , 如果 $A \subseteq B$, 并且 $A \neq B$ 我们就说 A 是 B 的真子集, 记作 $A \subsetneq B$ (或 $B \supsetneq A$)

提醒 (1) 子集、真子集这两个概念是由讨论集合与集合间关系引起的, 它们的定义是从元素的从属关系角度叙述的, 两个集合 A 与 B , 当 A 是 B 的子集时, 有如下关系如图 1-2-1、图 1-2-2.

由(1)知 不能把子集理解为由一个集合的部分元素组成的新集合. 其后两种情况时: $A \subsetneq B$, 即在 B 中至少存在一个元素不在 A 中, “ $\subsetneq$ ”也可理解为“ $A \subseteq B$ 且 $A \neq B$ ”.



$A = B$
图 1-2-1



A, B 非空
图 1-2-2

(2) 空集与其他集合的关系：

- ① 空集是任何集合的子集；
- ② 空集是任何非空集合的真子集。

知识点 2 子集的性质

- (1) 自反性： $A \subseteq A$ ；
 - (2) 传递性：若 $A \subseteq B$ 且 $B \subseteq C$ 则 $A \subseteq C$ ；
若 $A \subsetneq B$ 且 $B \subsetneq C$ 则 $A \subsetneq C$ ；
 - (3) 集合相等：若 $A \subseteq B$ 且 $B \subseteq A$ ，则 $A = B$ 。
- 该性质常用于判断集合相等。

知识点 3 子集个数问题

单个元素集 $\{a\}$ 有两个子集： $\emptyset, \{a\}$ ；两个元素集合 $\{a, b\}$ 有四个子集： $\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}$ ；三个元素的集合 $\{a, b, c\}$ 有八个子集： $\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{b, c\}, \{a, c\}, \{a, b, c\}$ ；……，可归纳出：若一个集合共有 n 个元素，则它有 2^n 个子集，有 $2^n - 1$ 个真子集，有 $2^n - 2$ 个非空真子集。

知识点 4 全集与补集的概念

如果集合 S 含有我们要研究的各个集合的全部元素，这个集合就可以看作一个全集，常用 U 来表示。

提醒 全集是把所有的要研究的对象集在一起组成的大集合，它是相对的，人为规定的概念，不能理解为最大的集合。

一般地设 S 是一个集合， A 是 S 的一个子集（即 $A \subseteq S$ ），由 S 中所有不属于 A 的元素组成的集合，叫做 S 中子集 A 的补集（或余集），记作 $\complement_S A$ ，即 $\complement_S A = \{x \mid x \in S, \text{ 且 } x \notin A\}$ 。

提醒 (1) 在谈补集时，一定要清楚是在哪个全集中的补集，对不同的全集，同一个集合的补集也不同。例如：

$U = \{1, 2, 3, 4\}$, $S = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $A = \{1, 2, 3\}$ 则 $A \subseteq U$ 且 $A \subseteq S$ 但是 $\complement_U A = \{4\}$, $\complement_S A = \{4, 5\}$ 。

(2) 要注意 A 一定要是 S 的子集方可有 $\complement_S A$ 概念.

知识点 5 全集与补集的性质

$$(1) \complement_U U = \emptyset \quad (2) \complement_U \emptyset = U \quad (3) \complement_U (\complement_U A) = A.$$

知识点 6 子集、全集、补集与逻辑知识的联系

(1) A 中元素具备性质 p , 若 $A \supseteq B$, 则 B 中元素也具备性质 p , 反之不然.

(2) A 与 $\complement_U A$ 中元素同时具备 U 中元素性质 p , 但是对性质 q , A 中元素具备性质 q , 但 $\complement_U A$ 中元素不具备性质 q , 因而 $\complement_U A$ 有时也称非 A , 即补集具有否定含义.

知识点 7 补集既可以认为是集合与集合的关系, 也可以认为集合与集合的运算, 因此常会已知两个集合, 求一个集合在另一个集合中的补集, 此时要注意全集范围.

如 $A = \{x \mid x = 2n, n \in \mathbb{N}\}$,

则 $\complement_{\mathbb{N}} A = \{x \mid x = 2n + 1, n \in \mathbb{N}\}$;

$\complement_{\mathbb{Z}} A = \{x \mid x = 2n + 1 \text{ 或 } x = -k, n \in \mathbb{N}, k \in \mathbb{N}_+\}$.

知识点 8 符号

(1) “ $\subseteq$ ”与“ $\subset$ ”是完全相同的符号, 表示“包含于”用于集合和集合之间.

(2) “ $\subseteq$ ”“ $=$ ”“ $\supseteq$ ”“ $\subsetneq$ ”“ $\subset$ ”都用于集合与集合之间要区分出“ $\subsetneq$ ”与“ $\subset$ ”.

(3) $\complement_S A$ 中读法为“集合 S 中子集 A 的补集”.

解题能力培养

基础篇

例 1 设 $I = \{1, 4, 1-a\}$, $A = \{1, a^2 - a + 2\}$, 若 $\complement_I A = \{-1\}$, 求 a .

分析 此题既要用到补集知识得知 -1 在 I 中而不属于 A , 又要注意集合元素的互异性防止 I 或 A 中元素重复.

解 方法一: $\because \complement_I A = \{-1\} \therefore -1 \in I \therefore 1-a = -1 \therefore a = 2$ 代入 A 得 $A = \{1, 4\}$, $\therefore a = 2$.

方法二: $\because \complement_I A = \{-1\} \therefore -1 \notin A \therefore a^2 - a + 2 = 4$, 解得 $a = 2$ 或 -1 , 把 $a = -1$ 代入 A 中得 $a^2 - a + 2 = 2$ 不满足 A 中元素的互异性, 故 $a = 2$.

例 2 设集合 $A = \{x, y, x+y\}$, $B = \{0, x^2, 2x+y\}$, 且 $A = B$. 求实数 x, y 的值.

解 当 $x = 0$ 时, $x^2 = 0$, 根据集合元素的互异性, $x = 0$ 不合题意, 舍去. 同理 y

$= 0$ 舍去, 因此只有 $x+y=0$ 于是得:
$$\begin{cases} x+y=0 \\ y=x^2 \\ x=2x+y \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} x+y=0 \\ x=x^2 \\ y=2x+y \end{cases} \text{ 解之得:}$$

$$\begin{cases} x = -1 \\ y = 1 \end{cases}.$$

[点拨] 关于已知两个集合相等求它们元素问题,主要是根据集合相等定义列方程组解决,但还应注意集合中元素的互异性和无序性.对于 A 与 B 相等的证明问题既要证明 $A \subseteq B$,同时还要证明 $B \subseteq A$.

例 3 设集合 $A = \{-1, 1\}$, 集合 $B = \{x | x^2 - 2ax + b = 0\}$, 若 $B \neq \emptyset, B \subseteq A$, 求 a, b 值.

[解] $\because B \neq \emptyset, B \subseteq A, \therefore$ 集合 B 为集合 A 的非空子集.

$$\text{当 } B = \{1\} \text{ 时, } \begin{cases} \Delta = 4(a^2 - b) = 0 \\ 1^2 - 2a \times 1 + b = 0 \end{cases} \text{ 解之得 } a = b = 1;$$

$$\text{当 } B = \{-1\} \text{ 时, } \begin{cases} \Delta = 4(a^2 - b) = 0 \\ (-1)^2 - 2a \times (-1) + b = 0 \end{cases} \text{ 解之得 } a = -1, b = 1;$$

$$\text{当 } B = \{-1, 1\} \text{ 时, } \begin{cases} 1^2 - 2a \times 1 + b = 0 \\ (-1)^2 - 2a \times (-1) + b = 0 \end{cases} \text{ 解之得 } a = 0, b = -1;$$

$$\text{综上所述 } a, b \text{ 值为 } \begin{cases} a = 1 \\ b = 1 \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} a = -1 \\ b = 1 \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} a = 0 \\ b = -1 \end{cases}.$$

[点拨] 分类讨论是处理集合与子集之间关系的常用方法.

例 4 已知全集 $U = \{1, 2, x^2 + x\}$, $A = \{1, x^2 - 2\}$, $\complement_U A = 6$, 求实数 x 的值.

[分析] $\complement_U A = \{6\}$ 有两层意义, 第一层含义是 $6 \in U$, 第二层是 $6 \notin A$.

[解] $\because \complement_U A = \{6\}, \therefore 6 \in U$ 且 $6 \notin A \therefore x^2 + x = 6$ 解之得 $x = 2$ 或 $x = -3$. 当 $x = 2$ 时, $x^2 - 2 = 2$ 符合题意; 当 $x = -3$ 时, $x^2 - 2 = 7 \notin U, \therefore x = -3$ (舍去). 综上所述, $x = 2$.

[点拨] 本题中验证结果是否符合隐含条件 $A \subseteq U$ 是必要的步骤.

综合创新与应用

提高篇

【综合思维培养】

本节首先掌握基础性知识, 深刻理解本单元的基本知识点, 本节一般都是基本题, 综合性题目少, 且综合性的深度较小, 本节涉及到的数学思想有数形结合思想、等价转化思想、分类讨论思想.

例 5 设 $U = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $A = \{x | x^2 - 5x + a = 0\}$, 且 $\emptyset \subsetneq A \subsetneq U$ 求 a 的值及 $\complement_U A$.

[解] 若 A 是单元素集合, 则 $\Delta = (-5)^2 - 4a = 0, a = \frac{25}{4}, x = \frac{5}{2} \notin U \therefore a = \frac{25}{4}$ 舍去. 若 A 是两个元素的集合, 则这两个元素之和为 5, $\therefore A = \{1, 4\}$, 此时 $a = 4, \complement_U A = \{2, 3, 5\}$ 或 $A = \{2, 3\}$ 此时 $a = 6, \complement_U A = \{1, 4, 5\}$.

例6 已知集合 $A = \{x | x^2 + 2ax + (a^2 - 4) < 0\}$, $B = \{x | x^2 - (a+2)x + 2a < 0\}$, 若 $B \subseteq A$, 求实数 a 的取值范围.

[解] 设 $f(x) = x^2 + 2ax + (a^2 - 4)$,

$$g(x) = x^2 - (a+2)x + 2a = (x-2)(x-a),$$

由 $B \subseteq A$, 得 $\begin{cases} f(a) \leq 0 \\ f(2) \leq 0 \end{cases}$

$$\text{即} \begin{cases} 4a^2 - 4 \leq 0 \\ a^2 + 4a \leq 0 \end{cases} \quad \text{解得: } -1 \leq a \leq 0.$$

$\therefore$ 所求 a 的范围是 $-1 \leq a \leq 0$.

[点拨] 运用函数思想解决形如 $B \subseteq A$ 的问题, 可避免分类讨论, 解法新颖、巧妙.



实力检测

一、选择题

1. 满足条件 $\{a, b\} \subseteq M \subsetneq \{a, b, c, d, e\}$ 的集合 M 共有 () 个.

A. 8 B. 7 C. 6 D. 5

[同类提高题] 写出满足条件

$\{b, 1\} \subseteq M \subsetneq \{b, 1, 2, 3\}$ 的集合 M .

2. 设集合 $A = \{x | x = 2k + 1, k \in \mathbb{N}\}$, $B = \{x | x = 2k - 1, k \in \mathbb{N}\}$, 则有 ()

A. $A = B$ B. $A \subsetneq B$ C. $A \supsetneq B$ D. 以上都不对

[同类提高题] 已知集合 $M = \{x | x = m + \frac{1}{6}, m \in \mathbb{Z}\}$, $N = \{x | x = \frac{n}{2} - \frac{1}{3}, n \in \mathbb{Z}\}$, $P = \{x | x = \frac{p}{2} + \frac{1}{6}, p \in \mathbb{Z}\}$, 则 M, N, P 满足关系 ()

A. $M = N \subsetneq P$ B. $M \subsetneq N = P$ C. $M \subsetneq N \subsetneq P$ D. $N \subsetneq P \subsetneq M$

3. 设 $x, y \in \mathbb{R}$, $A = \{(x, y) | y = x\}$

$B = \{(x, y) | \frac{y}{x} = 1\}$, 则 A, B 的关系为 ()

A. $A \subsetneq B$ B. $A \supsetneq B$ C. $A = B$ D. 以上都不对.

[同类提高题] 已知 $M = \{(x, y) | y = |x|\}$, $N = \{(x, y) | |y| = |x|, y \geq 0\}$, 那么 ()

A. $N \subsetneq M$ B. $N \subseteq M$ C. $M = N$ D. $M \subsetneq N$

4. 已知全集 $U = \mathbb{R}$, $A = \{x | x > 3\sqrt{2}\}$, $a = \frac{1}{2 - \sqrt{3}}$, 则 ()

A. $a \notin \complement_U A$ B. $a \in \complement_U A$ C. $\{a\} \in A$ D. $\{a\} \subsetneq \complement_U A$

[同类提高题] 已知全集 $U = \{x \in \mathbb{R} | -1 \leq x \leq 3\}$, $A = \{x \in U | -1 < x < 3\}$, $B = \{x \in \mathbb{R} | x^2 - 2x - 3 = 0\}$, $C = \{x | -1 \leq x < 3\}$, 则有 ()

A. $\complement_U A = B$ B. $\complement_U B = C$ C. $\complement_U A \supseteq C$ D. $A \supseteq C$

二、解答题

5. 已知 $A = \{x | x < -1 \text{ 或 } x > 2\}$, $B = \{x | 4x + p < 0\}$, 当 $A \supseteq B$ 时, 求实数 p 的取值范围.

[同类提高题] 已知集合 $A = \{x | -x^2 + 3x + 10 \geq 0\}$, $B = \{x | m + 1 \leq x \leq 2m - 1\}$, 若 $B \subseteq A$, 求实数 m 的取值范围.

6. 已知集合 $A = \{x | |x - a| = 4\}$, 集合 $B = \{1, 2, b\}$

(1) 是否存在实数 a 的值, 使得对于任意实数 b 都有 $A \subseteq B$? 若存在, 求出对应的实数; 若不存在, 试说明理由;

(2) 若 $A \subseteq B$ 成立, 求出对应的实数对 (a, b) .

7. 设集合 $A = \{x | x^2 + 4x = 0, x \in \mathbf{R}\}$, $B = \{x | x^2 + 2(a + 1)x + a^2 - 1 = 0, x \in \mathbf{R}, a \in \mathbf{R}\}$, 若 $B \subseteq A$, 求实数 a 的取值范围.



实力检测参考答案

一、选择题

1. B 点拨: M 应是 $\{a, b, c, d, e\}$ 中含有 $\{a, b\}$ 的真子集, 即求 $\{c, d, e\}$ 的真子集个数, 共有 $2^3 - 1 = 7$ 个.

[同类提高题] 点拨: 由于 $\{0, 1\} \subseteq M$, 故 M 中必有 $0, 1$, 又由于 $M \subsetneq \{0, 1, 2, 3\}$, 故 M 应是 $\{0, 1, 2, 3\}$ 中含有 $0, 1$ 的真子集, 它们是 $\{0, 1\}$, $\{0, 1, 2\}$, $\{0, 1, 3\}$

2. B

[同类提高题] B 点拨: $\because M = \{x | x = \frac{6m+1}{6}, m \in \mathbf{Z}\}; N = \{x | x = \frac{3n-2}{6} = \frac{3(n-1)+1}{6}, n \in \mathbf{Z}\}; P = \{x | x = \frac{3p+1}{6}, p \in \mathbf{Z}\}$. 由于 $3(n-1)+1$ 和 $3p+1$ 都表示被 3 除余 1 的数, 而 $6m+1$ 表示被 6 除余 1 的数, 因此 $M \subsetneq N = P$.

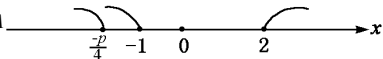
3. B 点拨: $(0, 0) \notin B$.

[同类提高题] C

4. D 点拨: $a = \frac{1}{2 - \sqrt{3}} = 2 + \sqrt{3} < 3\sqrt{2}$, $\therefore a \in \mathbb{I}_U A$.

[同类提高题] A

二、解答题

5. $p \geq 4$ 点拨: $B = \{x | x < -\frac{p}{4}\}$ 又 $\because$ 
 $= \{x | x < -1, \text{ 或 } x > 2\}$, $A \supseteq B$. $\therefore -\frac{p}{4} \leq -1$, 即 $p \geq 4$.

[同类提高题] 点拨: 分 $B \neq \emptyset$ 和 $B = \emptyset$ 两种情况进行讨论.

[解] $A = \{x | -x^2 + 3x + 10 \geq 0\} = \{x | -2 \leq x \leq 5\}$

(1) 当 $m+1 \leq 2m-1$, 即 $m \geq 2$ 时, $B \neq \emptyset$,