

## ◇ 第一章 绪论

当前，数学教育改革在素质教育思想的指导下正向纵深发展，数学教育理论研究也呈现出百花齐放的景象。数学教学为学生的身心发展服务，要培养学生的能力，特别是要培养学生的创新精神和实践能力的观点已被广大数学教育工作者所接受。然而，如何使数学能力培养、数学创新精神和实践能力的培养以及数学素质的提高真正落在数学课堂教学上，还需要我们进行积极的探索。数学教学心理学就是要通过对数学课堂教学客观规律的研究，为数学教学提供教学思想、教学策略等方面的理论和实践指导，以使数学教师能在自己的教学实践中认真落实提高学生素质、发展学生数学能力、创新精神和实践能力的任务。

本章将在阐述数学教学与心理学关系的基础上，探讨数学教学心理学的研究范围、任务和意义，以使读者对数学教学心理学的性质有一个比较全面的认识。

### 第一节 数学教学与心理学

人类社会向信息时代发展的过程中，教育的重要性已越来越被人们所认识。1993年，中共中央、国务院在《中国教育改革和发展纲要》中指出：“当今世界政治风云变幻，国际竞争日趋激烈，科学技术发展迅速。世界范围的经济竞争、综合

国力竞争，实际上是科学技术的竞争和民族素质的竞争。从这个意义上说，谁掌握了 21 世纪的教育，谁就能在 21 世纪的国际竞争中处于战略主动的地位。”党中央在“十五大”进一步提出了“科教兴国战略”，指出：“发展教育和科学，是文化建设的基础工程。培养同现代化要求相适应的数以亿计高素质的劳动者和数以千万计的专门人才，发挥我国巨大人力资源的优势，关系 21 世纪社会主义事业的全局。”显然，在“科教兴国战略”的实施过程中，教育的地位是举足轻重的。

作为国民教育的基础，中小学教育又有“重中之重”的地位。当前，各国对基础教育都给予了高度重视，这种状况不是偶然的。首先，基础教育是提高生产力的关键，这是因为世界上绝大多数人所受的教育都是基础教育，基础教育水平的高低决定着劳动力质量的高低；第二，基础教育是高等教育发展的基础；第三，基础教育关系到社会文明程度的提高，社会文明是由人来维持的，人的道德水准、文化修养和身心素质，是社会文明的基本标志，而人的品德发展、智力发展、知识学习和身体发育，都和接受基础教育的程度有关。总之，基础教育是关系到一个国家的社会发展、国际形象和国际地位的重大问题，未来的国际竞争将更多地依靠基础教育水平的提高。

数学在人类向知识经济社会迈进的进程中的地位是非常突出的。国家的繁荣昌盛关键在于高新科技和高效率的经济管理，“高新技术的基础是应用科学，而应用科学的基础是数学”。数学已经成为自然科学、社会科学和行为科学的基础，数学的内容、思想和方法在人类社会生活中已经得到广泛的应

用，数学的符号和句法、词汇和术语已经成为表述关系和模式的通用工具。数学在提高一个民族的科学和文化素质上起着非常关键的作用，她不但给人以实用的技术，而且也给人以能力，这些能力“包括直观思维、逻辑推理、精确计算以及结论的明确无误”。当今，数学已经同时具有科学与技术两种品质，这是其他学科所无法比拟的。因此，数学教育在教育特别是基础教育中的地位也是非常特殊的，人们对数学教育及其改革给予了特别的关注。从世界基础教育改革发展的历史看，数学教育改革历来是基础教育改革的重点和先行者。

数学教学是根据一定的社会要求以及学生的心理发展水平，有目的、有计划、有组织地开展数学知识的教学，使学生在获得数学知识的同时，智力、能力和情感等都获得发展的活动。辩证唯物主义告诉我们，事物的发展，内因是根据，外因是条件，外因通过内因而起作用。同样的，学生通过数学教学而获得的身心发展也有其本身的内因和外因。这里的“内因”，实际上就是学生学习数学所必须具备的数学知识基础和智力发展水平，以及学生在学习过程中表现出的动机、兴趣、情感、意志和性格等的水平。因此，心理学中对学习的心理条件的研究，实际上就是对学生学习内因的研究。学习是教学的基础，而心理学的主要研究分支之一——学习理论，则对学习的性质、过程和条件等问题都进行了深入细致的研究，因此，学习理论为我们提供了关于学生学习规律方面的全面知识，从而为我们的教学理论与实践奠定了坚实的基础。对教学中各种心理现象及其规律的研究也是心理学的重要甚至是主要的研究课题之一，心理学对各科教学中学生的知识获得、技能和能力的形成与发展、智力的组成与发展等都进行了深入研究，对各科教学在促进学生的行为规范及品德形成和发展上的关系与作用问

题也进行了深入研究，并形成了专门的心理学研究分支，即教学心理学。与教育学一样，教学心理学对（1）教学的要素，即教师、学生和教学内容；（2）认知及其与教学的关系；（3）发展及其与教学的关系；（4）师生在教学中的作用与地位；（5）教学评估；（6）教学策略等课题都十分关注。不过，教学心理学研究的不是教学本身，而是通过研究教学活动来揭示学生心理发展变化的特点和规律。数学教师通过研究学习理论，可以掌握学生的数学学习规律，深入了解学生在数学学习过程中的心理条件的组成因素、它们之间的关系以及它们影响数学学习的方式等。在此基础上，通过有的放矢地安排数学教学情境，激发学生的数学学习情感，调动起学生的观察力、记忆力、想象力、思维力和注意力，使学生积极主动、能动自主地进行创造性学习。通过学习教学心理学理论，数学教师可以深入了解教学过程各要素的性质和特点，学生的认知过程和规律、心理发展的过程和规律，在此基础上，组织恰当的教学内容，采取相应的教学策略，对学生进行有目的的适度指导，以促使学生心理产生质的发展。

中学数学教学的目的是要使学生在数学知识技能、能力等方面都获得发展，非智力因素得到培养，这些目的的实现依赖于广大数学教师对数学课堂教学客观规律的把握。数学课堂教学规律，从学生的学来说，包括数学学习的性质、数学学习的过程、数学学习的迁移以及数学学习中的非智力因素等；从教师的教来看，包括数学教学任务的分析和安排、数学教学传播媒介的分析和选择、教学模式的分析和使用、教学环境的分析和控制、教学结果的测量评价和利用，以及教师自身心理素质问题等。其中，对学生数学学习规律的掌握是基础和关键，因为学生的数学学习规律是任何数学教学措施及教法与学法的依

据。“只有依据学生数学学习规律的措施或方法才是必要的、有效的，由此而构建起来的数学系统才是有效的。”<sup>①</sup>因此，数学教学与心理学（特别是教育心理学和发展心理学）之间的关系是实践与理论基础的关系，只有在心理学理论的指导下，数学教学才能取得成功。

## 第二节 数学教学心理学研究的范围、任务及意义

教学心理与学习心理是教学这个复杂过程的两个不同侧面。学习心理是从学的角度对教学的心理学问题所进行的研究，而教学心理则是从教的角度对教学中心理学问题所进行的探讨。

### 一、数学教学心理学的研究范围

教学心理学是教育心理学的一个重要研究方面，20世纪70年代它才成为教育心理学的一个独立研究领域，这是心理学家重视学校教育中学与教两个方面的结果。它主要以教学活动中学生心理的发展变化规律为基础，对如何设计适当的教学条件，以使學生掌握知识、形成技能、发展智力和能力的问题进行研究。因此，对学生学习的基本规律进行研究是教学心理学的基础，而这又要以对学生学习的本质的认识为前提，也即学生学习本质的研究也是教学心理学的课题。由于学生的学习主要是指学校教学环境下的学习，因此，教学心理学对学校教学的本质也要进行研究。另外，教学的目的是使学生习得知

冯忠良：《结构化与定向化教学心理学原理》，北京师范大学出版社，1998年版，第18页。

识、形成能力和品德、发展智力，因此，对知识、能力和智力的本质的研究也是教学心理学的基础。

教师在进入课堂之前，必须根据相应的教学目的，分析学生状况，明确教学任务和教学内容，选择教学模式，安排教学进程，并对教学结果的测量作出安排，所有这些活动都是教师根据教学目的对教什么和怎么教所进行的设计，即所谓的教学设计。从心理学角度对教学设计的规律进行探索是教学心理学的重要内容之一。

课堂教学是一种有目的、有组织的活动，这一活动是由师生配合共同完成的，是教与学的有机统一。从教师的教这一侧面来看，“教师是教育者、影响者、变革者和促进学生发展的实践者，是教的活动的主体，学生则是受教育者，是教师实践的对象，是教的客体。教学内容则是联结主客体的中介，这是教师作用于学生的媒体和工具。”<sup>①</sup>从学生的学这一侧面来看，学生是知识经验的接受者。由于知识经验是主客体相互作用的过程中，主体对客体的一种反映，具有主观性，必须赋予它一定的物质形式才能传递（传递知识经验的载体称为媒体）。在教学过程中，教师把所要传授的知识经验赋予一定的物质形式，借助于一定媒体（如言语、实物、模型、图象、表格、手势、表情等等）的作用传输给学生，学生则必须把接收到的媒体，通过自己已有的经验结构及信息加工机制，转换成为传送来的信息，并使之与已有知识经验相整合，才能增进自己的内在调节机制，从而形成和发展自己的能力和品德。因此，学生在教学过程中的学习活动是一种重建经验结构的过程，学生必须处于十分积极主动的状态，积极地进行一系列复杂的生理与

<sup>①</sup> 林崇德著：《学习与发展》，北京教育出版社，1992年版，第5页。

心理水平的变换，即能动的反映活动才能实现。在这个意义上我们说学生是学的活动的主体。但是，由于学生处于身心发展阶段，他们在教学活动中的主体性的发挥是有条件的，他们学习的主动性和积极性受到教师的教的直接影响，在这个意义上我们说教师是教学活动的主导者。教学实践表明，教学取得成功的关键在于教师能够对教学内容和教学方法作出合理的组合，也即能够采取有效的教学模式进行教学，而选择恰当的教学模式的过程就直接体现了教师对教学活动的主导作用，也是教师发挥教的主体性的体现。从心理学的角度对教学模式的内涵、教学模式的构成、教学模式的应用以及如何根据具体内容选择教学模式等进行研究，是教学心理学的又一重要内容。

另外，对教学结果的测量和评价，对教学环境方面的心理学问题的研究（如教室、温度、声音、颜色、光线等物理环境对教学的影响），对“教学共同体”中成员间的相互影响的研究，对教学过程中发生的各种问题的调控方式的研究，对教师心理如教师的社会角色、人际关系、教学风格、心理素质、人格特点、教育能力等方面的研究等等，都是教学心理学的内容。

与此相对应，数学教学心理学涉及的主要内容有：

1. 关于学校数学教学、数学学习、数学能力等的实质的心理学问题，这是数学教学心理学的理论基础。

2. 关于学生数学学习的基本规律，其中包括数学学习动机的形成和发展规律，数学知识的掌握、数学技能和数学能力的形成的规律等，这也是数学教学心理学的理论基础。

3. 关于数学课堂教学设计方面的心理学问题。

(1) 对数学教学任务的分析。这种分析主要是循着教师的数学教学过程展开的：数学教学目标的分类；教学活动的组成要素；数学教材的组织 and 呈现；数学教学形式、方法以及教学

策略的选择；数学教学结果的测量与评价。

(2) 各种数学课堂教学模式及其应用。主要是以不同的数学教学任务为依据，对应当采取的教学模式进行理论研究。例如，应该如何根据不同的数学概念的特点，建立相应的概念教学模式，这种模式的理论依据是什么，结构怎样，适用范围是什么，有哪些特点等等；又如，如何根据某种数学能力的本质构建相应的教学模式；为了培养学生的创造性，可以构建怎样的教学模式，等等。

#### 4. 关于数学教学环境方面的心理学问题。

主要研究有效的数学教学对声、光、色等物理变量的要求；“数学教学共同体”成员间关系，这是造成数学教学环境的某种心理气氛的重要根源；控制数学教学过程中的问题行为，问题行为既有人格方面的，又有品行方面的，学生在教学过程中的问题行为对整个教学活动会产生极大的危害，因此控制问题行为非常重要。

#### 5. 数学教师心理方面的问题。

主要研究数学教师的人格特点、能力、心理素质、教学风格、处事风格等等。

由于数学教学心理学的研究刚刚起步，根据当前数学教学中贯彻素质教育思想的要求，为数学教学中培养学生的数学能力、应用数学解决实际问题的能力，以及培养学生的创新精神和实践能力等服务，我们在本书中将着重针对不同的数学内容的教学分别阐述相应的心理学原理，并最后落实在相应的数学能力培养模式上。

## 二、数学教学心理学的任务

数学教学心理学担负着为数学教学实践服务和发 展数学教育理论的双重任务，既有理论性，又有鲜明的实践性。

首先，数学教学心理学要为数学教学提供理论基础，做到既为教学活动提供理论指导，又能解决数学教学中的具体问题。这就要求数学教学心理学在为数学教学的有效进行提供有关知识和技能时，还要阐明知识和技能的理论背景，从心理学的角度说明其来源，必要时还应讲清需要进一步研究的问题。

其次，数学教学心理学还要就有关数学教学中的各种心理学问题进行研究，这一工作是理论性的，是数学教育研究中的“基础研究”。例如，对数学教学实质的研究，对数学能力实质的研究，对学生数学学习本质的研究，对学生数学学习规律的研究等等。显然，这种研究是数学教育理论研究的最重要的组成部分之一。

### 三、数学教学心理学研究的意义

数学教学心理学研究对搞好数学教学工作、提高数学教学质量、提高数学教师的教学水平等都有很大的意义。

首先，基础教育是提高中华民族素质的奠基性工程，应使全体学生的素质得到提高，使他们获得全面发展（所谓“人的整体教育”、“全人化教育”都是这个意思）。数学既是一种有广泛应用性的工具，是提高学生思维能力的有力手段，又是一种文化素养，在人格品质形成方面有不可替代的作用。学生从中学到的不仅仅是知识，更重要的是受到了数学思维的训练、数学思想方法的熏陶；从而在面临生活或实际问题时能从数学的角度来思考，用数学的方法进行分析、探索 and 解决。通过数学教学，使学生深刻认识数学的价值、形成数学意识，并能够用数学语言进行交流。而数学教学心理学就是从心理学的角度对教学中涉及的各种因素进行探索，为数学教学达到上述目标提供心理学方面的理论依据和科学的实践操作手段，从而增强数学教学的自觉性、科学性。因此，数学教学心理学是促进和

保证数学教学科学化的重要基础学科之一。

其次，从数学教学心理学的学科性质来看，它揭示的是数学教学中的心理现象和心理规律，了解和把握这些心理现象和规律，对数学教师搞好数学教学工作意义重大。它能够帮助数学教师认识清楚教学过程中出现的各种问题的原因，为寻找解决这些问题的方法提供指导，使教师能够比较准确地预见数学教学中可能出现的种种现象，从而使教学活动具有更强的针对性，使教师更加自觉地发挥教学中的主导作用。如对数学教学任务作出科学分析，对数学教学的传播媒介作出恰当选择，针对不同的数学内容和教学要求运用不同的教学模式，合理地安排教学环境以促使数学教学活动的高效进行，利用自己的人格力量和组织才能营造良好的班级文化，使学生在一种既相互竞争又和谐相处的气氛中学习数学，等等。另外，数学教学心理学能够帮助教师客观、科学地评价自我，了解自己的长处和不足，做到“自知之明”。

第三，学习数学教学心理学是数学教师加强教学理论修养和进行教学研究的重要组成部分。我们认为，数学教师要真正提高教学水平，就必须要有教学理论素养，必须结合自己的数学教学开展“教科研”。由于数学教学心理学是联系普通教育学、心理学理论与数学课堂教学之间的桥梁，既有理论性又有实践性，因此是广大数学教师学习教育学、心理学，提高理论素养的好素材，同时它也是指导数学教师开展教学研究的直接、有力的武器。例如，当前数学教育研究中有许多“热点问题”，有的人打着改革的旗号提出这样那样的“口号”，掌握数学教学心理学的基本原理就有助于教师对它们作出正确的辨别，对它们的功能和局限作出客观的评判，并在自己的教学实践中作出正确的取舍。

## ◇ 第二章 中学数学学科的性质、作用和目的要求

中学数学教学有自己的特点，这是由数学学科的性质所决定的，而数学学科又必须反映出数学的特点。认识清楚这些特点，对于教师在数学教学中把握如何使学生掌握数学知识、应当培养学生的哪些能力以及怎样培养这些能力、如何结合数学教学内容进行思想品德教育等问题，都有非常重要的意义。

本章在讨论数学的本质、数学的特点的基础上，对中学数学学科的性质和数学教学的目的要求进行探索，并就数学学科在社会及人的发展中的作用进行概括。

### 第一节 中学数学学科的性质和作用

#### 一、中学数学学科的性质

要了解中学数学学科的性质，必须首先了解数学的性质。

##### 1. 什么是数学。

这是一个不太好回答的问题。数学，其英文是 *mathematics*，这是一个复数名词，“数学曾经是四门学科：算术、几何、天文学和音乐，处于一种比语法、修辞和辩证法这三门学科更

高的地位。’<sup>①</sup> 自古以来，多数人把数学看成是一种知识体系，是经过严密的逻辑推理而形成的系统化的理论知识总和，既反映了人们对“现实世界的空间形式和数量关系”的认识，又反映了人们对“可能的量的关系和形式”的认识。数学既可以来自现实世界的直接抽象，也可以来自人类思维的能动创造。从人类社会发展的历史看，人们对数学本质的认识在不断演变和深化。“数学的根源在于普通的常识，最显著的例子是非负整数。”“欧几里德的算术来源于普通常识中的非负整数，而且直到19世纪中叶，对于数的科学探索还停留在普通的常识。”另一个例子是几何中的相似性，“在个体发展中几何学甚至先于算术”，其“最早的征兆之一是相似性的知识，”相似性知识被发现得如此之早，“就像是天生的。’<sup>②</sup> 因此，19世纪以前，人们普遍认为数学是一门自然科学、经验科学，因为那时的数学与现实之间的联系非常密切。随着数学研究的不断深入，从19世纪中叶以后，数学是一门演绎科学的观点逐渐占据主导地位，这种观点在布尔巴基学派的研究中得到发展，他们认为数学是研究结构的科学，一切数学都建立在代数结构、序结构和拓扑结构这三种母结构之上。与这种观点相对应，从古希腊的柏拉图开始，许多人认为数学是研究模式的学问。数学家怀特海（A. N. Whitehead, 1861 ~ 1947）在《数学与善》中说，“数学的本质特征就是：在从模式化的个体作抽象的过程中对模式进行研究。”“数学对于理解模式和分析模式之间的关系，是最强有力的技术。”1931年，哥德尔（K. Gödel, 1906 ~

① [荷兰 弗赖登塔耳：《数学教育再探——在中国的讲学》，上海教育出版社，1999年版，第1页。

② 同上，第9~13页。

1978) 不完备性定理的证明, 宣告了仅仅用逻辑演绎方法解决数学的可靠性问题的不可能, 这样, 人们又想到了数学是经验科学的观点, 著名数学家冯·诺伊曼 (J. Von. Neumann, 1903 ~ 1957) 就认为, 数学兼有演绎科学和经验科学两种特性。

对于上述关于数学本质的看法, 我们应当从历史的眼光来分析。实际上, 对数学本质的认识是随数学的发展而发展的。由于数学源于分配物品、计算时间、丈量土地和容积等实践, 因而这时的数学对象 (作为抽象思维的产物) 与客观实在是非常接近的, 人们能够很容易地找到数学概念的现实原型, 这样, 人们自然地认为数学是一种经验科学; 随着数学研究的深入, 非欧几何、抽象代数和集合论等的产生, 特别是现代数学向抽象、多元、高维发展, 人们的注意力集中在这些抽象对象上, 数学与现实之间的距离越来越远, 而且数学证明 (作为一种演绎推理) 在数学研究中占据了重要地位, 因此, 人们认为数学是人类思维的自由创造, 是研究量的关系的科学, 是研究抽象结构的理论, 是关于模式的学问, 等等。这些认识, 既反映了人们对数学本质理解的深化, 也是人们从不同侧面对数学本质进行认识的结果。正如有人所说的, “恩格斯的关于数学是研究现实世界的数量关系和空间形式的提法与布尔巴基的结构观点是不矛盾的, 前者反映了数学的来源, 后者反映了现代数学的水平。现代数学是一座由一系列抽象结构建成的大厦。”<sup>①</sup> 而关于数学是研究模式的学问的说法, 则是从数学的抽象过程和水平的角度对数学本质的阐释。另外, 从思想根源上来看, 人们之所以把数学看成是演绎科学、研究结构的科

<sup>①</sup> H.N. 茹科夫:《数学的哲学问题》, 自然科学哲学问题丛刊, 1983年第3期。

学，是基于人类对数学推理的必然性、准确性的那种与生俱来的信念，是对人类自身理性的能力、根源和力量的信心的集中体现。因此人们认为，发展数学理论的这套方法，即从不证自明的公理出发进行演绎推理，是绝对可靠的，也即如果公理是真的，那么由它演绎出来的结论也一定是真的。通过应用这些看起来清晰、正确、完美的逻辑，数学家们得出的结论显然是毋庸置疑的、无可辩驳的。

事实上，上述对数学本质的认识只是从数学的来源、存在方式、抽象水平等方面进行的，并且主要是从数学研究的结果来看数学的本质。显然，结果（作为一种理论的演绎体系）并不是数学，至少不是数学的全部，而是数学的产物。组成数学整体的另一个非常重要的方面是数学研究的过程，而且从总体上来说，数学是一个动态的过程，是一个“思维的实验过程”，是数学知识的抽象概括过程。逻辑演绎体系则是这个过程的一种自然结果。波利亚（G. Polya, 1888 ~ 1985）认为：“数学有两个侧面，它是欧几里德式的严谨科学，但也是别的什么东西。由欧几里德方法提出来的数学看来像是一门系统的演绎科学，但在创造过程中的数学看来却像是一门实验性的归纳科学。”弗赖登塔尔说，“数学是一种相当特殊的活动”，这种观点“是区别于数学作为印在书上和铭记在脑子里的东西”。实际上这是在说数学的形式与内容之间的关系。他认为，数学家或者数学教科书喜欢把数学表示成“一种组织得很好的状态”，也即“数学的形式”是数学家将数学（活动）内容经过自己的组织（活动）而形成的；但对大多数人来说，他们是把数学当成一种工具，他们不能没有数学是因为他们需要应用数学，这就是，对于大众来说，是要通过数学的形式来学习数学的内容，从而学会相应的（应用数学的）活动。这大概就是弗赖登

塔尔所说的“数学是在内容和形式的互相影响之中的一种发现和组织的活动”的含义。菲茨拜因（Efraim Fischbein）说：“数学家的理想是要获得严谨的、条理清楚的、具有逻辑结构的知识实体，这一事实并不排除必须将数学看成是个创造性过程：数学本质上是人类活动，数学是由人类发明的。”数学活动由形式的、算法的与直觉的等三个基本成分之间的相互作用构成。考伦特和罗宾逊（Courant & Robbins）也说，“数学是人类意志的表达，反映积极的意愿、深思熟虑的推理，以及精美而完善的愿望。它的基本要素是逻辑与直觉、分析与建造、一般性与个别性。虽然不同的传统可能强调不同的侧面，但只有这些对立势力的相互作用，以及为它们的综合所作的奋斗，才构成数学科学的生命、效用与高度的价值。”

另外，对数学还有一些更加广义的理解。如：有人认为，“数学是一种文化体系”；“数学是一种语言”数学活动是社会性的，它是在人类文明发展的历史进程中，人类认识自然、适应和改造自然、完善自我与社会的一种高度智慧的结晶。数学对人类的思维方式产生了关键性的影响。也有人认为，数学是一门艺术，“和把数学看作一门学科相比，我几乎更喜欢把它看作一门艺术，因为数学家在理性世界指导下（虽然不是控制下）所表现出的经久的创造性活动，具有和艺术家的，例如画家的活动相似之处，这是真实的而并非臆造的。数学家的严格的演绎推理在这里可以比作专门性技巧。就像一个人若不具备一定量的技能就不能成为画家一样，不具备一定水平的精确推理能力就不能成为数学家。这些品质是最基本的……它们与其

① [德] Rolf Biehler 等，《数学教学理论是一门科学》，上海教育出版社，1998年版，第265页。

他一些要微妙得多的品质共同构成一个优秀的艺术家或优秀的数学家的素质，其中最主要的一条在两种情况下都是想象力。’<sup>①</sup>“数学是推理的音乐”，而“音乐是形象的数学”。这是从数学研究的过程和数学家应具备的品质来论述数学的本质。还有人把数学看成是一种对待事物的基本态度和方法，一种精神和观念，即数学精神、数学观念和态度。尼斯（Mogens Niss）等在《社会中的数学》一文中认为，数学是一门学科，“在认识论的意义上它是一门科学，目标是要建立、描述和理解某些领域中的对象、现象、关系和机制等。如果这个领域是由我们通常认为的数学实体所构成的，数学就扮演着纯粹科学的角色。在这种情况下，数学以内在的自我发展和自我理解为目标，独立于外部世界……另一方面，如果所考虑的领域存在于数学之外……数学就起着应用科学的作用……数学的这两个侧面之间的差异并非数学内容本身的问题，而是人们所关注的焦点不同。无论是纯粹的还是应用的，作为科学的数学有助于产生知识和洞察力。数学也是一个工具、产品以及过程构成的系统，它有助于我们作出与掌握数学以外的实践领域有关的决定和行动……数学是美学的一个领域，能为许多醉心其中的人们提供对美感、愉悦和激动的体验……作为一门学科，数学的传播和发展都要求它能被新一代的人们所掌握。数学的学习不会同时而自动地进行，需要靠人来传授。所以，数学也是我们社会的教育体系中的一个教学科目。’<sup>②</sup>

从上所述可以看出，人们是从数学内部（又从数学的内

① J. N. Kapur, 《数学家谈数学本质》，北京大学出版社，1989年版，第24页。

② 同上，第423~424页。

容、表现形式及研究过程等几个角度)、数学与社会的关系、数学与其他学科的关系、数学与人的关系等几个方面来讨论数学的性质的。它们都从一个侧面反映了数学的本质,为我们全面认识数学的本质提供了一个视角。

基于对数学本质的上述认识,人们也从不同侧面讨论了数学的特点。比较普遍的观点是,数学有抽象性、精确性和应用的广泛性等特点,而最本质的特征是抽象性。A. П. 亚历山大洛夫说,“甚至对数学只有很肤浅的知识就能容易地觉察到数学的这些特点:第一是它的抽象性,第二是精确性,或者更好地说是逻辑的严格性以及它的结论的确定性,最后是它的应用的极端广泛性。”<sup>①</sup>王梓坤说,“数学的特点是:内容的抽象性、应用的广泛性、推理的严谨性和结论的明确性。”<sup>②</sup>这种看法主要是从数学的内容、表现形式和数学的作用等方面来谈数学的特点,是数学特点的一个方面。另外,从数学研究的过程方面、数学与其他学科之间的关系方面来看,数学还有形象性、似真性、拟经验性、“可证伪性”的特点。例如,关于数学的严谨性这一特点,在数学历史的发展过程中,随着非欧几何的出现,人们发现数学中竟然有几种不同的几何同等地与空间经验相吻合,这自然使人们对这些几何的真理性产生怀疑。既然数学的这种“绝对真理性”是不存在的,那么数学的严谨性也是相对的。哥德尔的“不完备性定理”表明,即使是公理化这一被人们极度推崇的严谨的科学方法也是有缺陷的。因此,数学的严谨性是在数学发展历史中表现出来的,具有相对

<sup>①</sup> [苏] A. П. 亚历山大洛夫等:《数学——它的内容、方法和意义》,科学出版社,1988年版,第1页。

王梓坤:《今日数学及其应用》,《数学通报》,1994年第4期,第2页。