
电子图书
信息技术的结晶
人类文明的载体
网络的基本资源

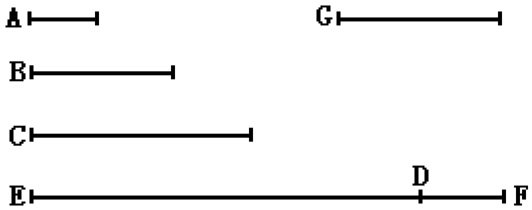
无限的交响乐

——极限的故事

“无限”的诞生

无限的思想诞生于何时何地，如今已难确切查考了。然而古希腊学者欧几里得（Euclid，公元前 330～前 275）的名著——《几何原本》第九卷中对质数无限性的认识十分精彩。

文中全部用几何的方式，表述了一个纯粹数的问题！其中“测量”一词，即算术中的“除尽”。



“质数比任何给定的一批质数都多。”

“假设 A，B，C 是指定的质数；我说除了 A，B，C 之外还有其他的质数。事实上，取 A，B，C 所能测量的最小数，设它为 DE；把单位 DF 加到 DE 上。于是 EF 或者是质数或者不是。首先，假设 EF 是质数，那么我们已得到了质数 A，B，C，EF，它比质数 A，B，C 要多。其次假设 EF 不是质数，从而它必能被某个质数所测量。假设它能被质数 G 测量。我说 G 和数 A，B，C，都不相同。因为，如果可能的话，假定 G 和 A，B，C 中的某个数相同。那么由于 A，B，C 能测量 DE，所以 G 也能测量 DE。但 G 还能测量 EF。所以 G 作为一个数，它就能测量余数，也就是单位 DF；而这是荒谬的！所以，G 与 A，B，C 当中的任何一个数都不相同。并且按照假设，G 是质数。所以我们就找到了质数 A，B，C，G，它比给定的一批质数 A，B，C 更多”。

这个证明可以推广到多个质数的情形，即若 2，3，5，7，11……，P 为所有不大于 P 的质数，则

$$2\times3\times5\times7\times11\times\cdots\cdots\times P+1=N$$

数 N 或者是质数，或者所有的质因子都大于 P。

在他之前约 200 年，另一位古希腊学者芝诺(Zenon，公元前 496～前 429）曾提出一个著名的“追龟”诡辩题。从中，我们可以看到当时人类对“无限”的认识，及理解上的局限。大家知道，乌龟素以动作迟缓著称，阿基里斯则是古希腊传说中的英雄，善跑的神。芝诺断言：阿基里斯与龟赛跑，将永远追不上乌龟！

芝诺的理由是：如图所示假定阿基里斯现在 A 处，乌龟现在 T 处。为了赶上乌龟，阿基里斯先跑到乌龟的出发点 T，当他到达 T 点时，乌龟已前进到 T1 点；当他到达 T1 点时，乌龟又已前进到 T2 点，如此等等。当阿基里斯到达乌龟前次到达过的地方，乌龟已又向前爬动了一段距离。因此，阿基里斯是永远追不上乌龟的！

芝诺的论断显然与常理相悖。由于当时人类只有粗糙的无限观念，数学家们曾经错误地认为：无限多个很小的量，其和必为无限大。芝诺正是巧妙地钻了这个空子：把有限长的线段分成无限多个很小线段的和；把有限的时间可以完成的运动，分成无限多段很短的时间来完成。芝诺的“追龟”问题，无疑是向当时错误的“无限”观念提出了挑战。数学家们感到数学面临着潜在的危机！

后来人们终于弄清楚，要克服上述危机，需要一场观念上的革命。即无

限多个很小的量的和，未必是无限大！“无限”地累加，也可能得出有限的结果！

让我们再看一看追龟问题。设阿基里斯的速度是乌龟的十倍，龟在前面 100 米。当阿基里斯跑了 100 米时，龟已前进了 10 米；当阿基里斯再追 10 米时，

龟又前进了1米；阿再追1米；龟又进了$\frac{1}{100}$米，……。于是：阿基里斯追上

乌龟所跑的路程 S：（单位米）

$$S=100+10+1+\frac{1}{10}+\frac{1}{100}+\cdots\cdots$$

上式右端是无限多个很小量的和，然而它却是有限的！为了让读者理解这一点，我们先从等比数列的知识讲起。

一个数列，如果从第二项起每项与前一项的比是个常数，我们把这个数列叫做等比数列，常数叫这个等比数列的公比，例如

①1，2，2^2，2^3，2^4，……2^{63}

②1，7，7^2，7^3，7^4……都是等比数列。

现在假定有一等比数列，第一项为 a，公比为 q：

a，aq，aq^2，……，aq^{n-1}

怎样去求它的前 n 项和 Sn 呢？一个颇为巧妙的办法是：把 Sn 乘以 q，然后错位相减，即：

$S_n=a+aq+aq^2+\cdots\cdots+aq^{n-1}$

$q\cdot S_n=aq+aq^2+aq^3+aq^n$

$S_n(1-q)=a-aq^n$

$$S_n=\frac{a(1-q^n)}{1-q}$$

这样，我们得出了一个很有用的公式。

当等比数列的公比 q 的绝对值小于 1 时，数列的项无穷递缩，越来越趋近于 0。此时，虽然项数有无限多个，但它们的和却是个有限的数。事实上，当 0＜｜q｜＜1 时：

$$\begin{aligned}S&=a+aq+aq^2+\cdots+aq^{n-1}+\cdots\\&=\lim_{n\to\infty}S_n\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{a(1-q^n)}{1-q}\\&=\frac{a}{1-q}\end{aligned}$$

上式中符号“lim”，“是英语 limit（极限）一词的缩写”。表示“当 n 趋于无穷时某式的极限”。

应用上述公式可以算得追龟问题中阿基里斯的追及路程：

$$S=100+10+1+\frac{1}{10}+\frac{1}{10^{2}}+\cdots\cdots$$
$$=\frac{100}{1-\frac{1}{10}}=\frac{1000}{9}(\text{米})$$

与古希腊相比，我们的祖先对“无限”的概念可要明确得多。几乎与芝诺处于同一时代的墨子（公元前 468～前 367）就曾提出过“莫不容尺，无穷也”的见解。这就是说，有这样一种量，用任意长的线段去量它，它都能容纳得下。这是明显的“无限”的思想。稍后于墨子的《庄子》一书，更提到“至大无外，至小无内”。前半句讲的是无限大，后半句讲的是无限小。该书《天下篇》中还有一句名言：

“一尺之棰，日取其半，万世不竭！”意思是，把长一尺的木棒，每天取下前一天所剩下的一半，如此下去，永远也不会取完。

若$S_n=\frac{1}{2}+\frac{1}{2^{2}}+\frac{1}{2^{3}}+\cdots\cdots+\frac{1}{2^{n}}$

则$\lim\limits_{n\to\infty}S_n=1$

分牛传说析疑

传说古代印度有一位老人，临终前留下遗嘱，要把 19 头牛分给三个儿子。

老大分总数的$\frac{1}{2}$；老二分总数的$\frac{1}{4}$；老三分总数的$\frac{1}{5}$。按印度的教规，牛被视为神灵，不能宰杀，只能整头分。先人的遗嘱更需无条件遵从。老人死后，三兄弟为分牛一事而绞尽脑汁，终于计无所出，最后决定诉诸官府。官府面对此事一筹莫展，便以“清官难断家务事”为由，一推了之！

话说邻村住着一位智叟。一天，他路过三兄弟家门，见三人愁眉不展，唉声叹气。动问之下，方知如此这般。但见老人沉思片刻说：“这好办！我有一头牛借给你们。这样，总共就有20头牛。老大分$\frac{1}{2}$可得10头；老二分$\frac{1}{4}$可得5头；老三分$\frac{1}{5}$可得4头。你等三人共分去19头牛。剩下的一头牛再还给我！”

真是妙绝了！一个曾经使人绞尽脑汁的难题，竟如此轻松巧妙地得以解决。这自然引起了当时人们的热议，并一时传为佳话，以至流传至今。

不过，后来人们在钦佩之余总带有一丝怀疑。老大似乎只该分 9.5 头，最后他怎么竟得了 10 头呢？

这件事终于惊动了数学家，他们决心对此弄个水落石出！数学家们进行了

如下计算：19头牛按老大$\frac{1}{2}$，老二$\frac{1}{4}$，老三$\frac{1}{5}$的份额去分，各人分别可得$\frac{19}{2}$头，$\frac{19}{4}$头和$\frac{19}{5}$头。这时显然没有分完，还剩下（$19-\frac{19}{2}-\frac{19}{4}-\frac{19}{5}$）$=\frac{19}{20}$头。

所剩的牛自然仍要按遗嘱分给各人。于是老大又得$\frac{1}{2}\times\frac{19}{20}$头；老二又得$\frac{1}{4}\times\frac{19}{20}$头；老三又得$\frac{1}{5}\times\frac{19}{20}$头。计算一下便知道，牛仍未被分完，还剩$\frac{19}{20^2}$头。于是还得再按遗嘱规定去分，如此等等。这个过程可以一直延续到无究，只是每次所剩越来越少罢了！

很明显，在上述过程中老大共分得牛数

$$S_1=\frac{19}{2}+\frac{1}{2}\times\frac{19}{20}+\frac{1}{2}\times\frac{9}{20^2}+\cdots\cdots$$

$$=\frac{\frac{19}{2}}{1-\frac{1}{20}}=10$$

同理，老二、老三所分牛数

$$S_2=\frac{19}{4}+\frac{1}{4}\times\frac{19}{20}+\frac{1}{4}\times\frac{19}{20^2}+\cdots\cdots$$

$$=\frac{\frac{19}{4}}{1-\frac{1}{20}}=5$$

$$S_3=\frac{19}{5}+\frac{1}{5}\times\frac{19}{20}+\frac{1}{5}\times\frac{19}{20^2}+\cdots\cdots$$

$$=\frac{\frac{19}{5}}{1-\frac{1}{20}}=4$$

数学家们终于用审慎的态度支持了智叟。他们宣告说：智叟的分牛结论是正确的！

没过多久，有人对智叟的“动机”提出了疑议，他们认为智叟的做法充其量只是“瞎猫碰上死老鼠”而已。他们举例说，倘若老人留下的只是 15 头牛

而不19头；遗嘱规定的是老大分$\frac{1}{2}$，老二分$\frac{1}{4}$头牛老三分$\frac{1}{8}$那么结果又将怎样呢？

设想智叟牵来一头牛，添成 16 头。按遗嘱：老大分 8 头，老二分 4 头，

老三分 2 头。三人共分去 14 头牛。那么，智叟是否要把剩下的两头牛都牵回去？谁敢保证智叟没有“渔利”之嫌？！

说的不无道理！于是一个即将偃旗息鼓的问题，又死灰复燃起来。经过几番争论，人们终于弄清楚，智叟的办法确实带有某种盲目性！问题的症结不在于智叟是否牵牛来，或牵几头牛来又牵几头回去，而在于按遗嘱三兄弟所获牛数的比：

$$\frac{1}{2}:\frac{1}{4}:\frac{1}{5}=10:5:4$$

只要最后这个简单的整数比，能够将 19 整分，那么结果必然皆大欢喜，又何须再牵一头牛来？反之，如若遗嘱中的简单整数比，不能将牛数整分的话，那么纵然智叟有再高十倍的智商，也只能是一阵空忙！

上述结论为人们提出了分牛问题的最佳解答：

$$\begin{cases} S_1=19\times\frac{10}{10+5+4}=10 \\ S_2=19\times\frac{5}{10+5+4}=5 \\ S_3=19\times\frac{4}{10+5+4}=4 \end{cases}$$

神奇的质数序列

瑞士数学家列昂纳德·欧拉（leonhard Euler，1707～1783）

从 19 岁开始发表论文，直至 76 岁。半个多世纪期间，共写出论文、论著 868 篇，其中有近 400 篇是在他双目失明的 17 年间靠心算和口述写成的。在欧拉逝世后，彼德堡科学院为整理他的遗稿，足足忙了 47 年！他勤勉而光辉的一生，为人类智慧的宝库增添了巨大的财富！

欧拉关于质数无限性的精彩证明，绝非欧几里德证明所能相比！

大家知道，当 o＜X＜1 时，我们有：

$1+x+x^2+x^3+\cdots\cdots=\frac{1}{1-x}$，从而

$$1+x+x^2+\cdots\cdots x^n<\frac{1}{1-x}$$

若P为任一质数，则$x=\frac{1}{P}<1$，有：

$$1+\frac{1}{p}+\frac{1}{p^2}+\cdots\cdots+\frac{1}{p^n}<\frac{p}{p-1}$$

另一方面，在非常著名的自然数倒数的求和式中

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\cdots\cdots$$

尽管后来的项越来越小，但其部分和却能无限地增大。事实上，令

$$A_m=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{2^m}$$

则有$A_{m+1}-A_m=\frac{1}{2^m+1}+\frac{1}{2^m+2}+\cdots+\frac{1}{2^{m+1}}$

$$>\frac{1}{2^{m+1}}\cdot 2^m=\frac{1}{2}$$

同理可得：$A_m-A_{m-1}>\frac{1}{2}$

$$A_{m-1}-A_{m-2}>\frac{1}{2}$$

$$\cdots\ \cdots\ \cdots$$

$$A_2-A_1>\frac{1}{2}$$

$$A_1-A_0\geq\frac{1}{2}$$

以上各式相加，并注意到$A_0=1$则得：

$$A_{m-1}>\frac{1}{2}m$$

这证明了A_m当m增大时，能够无限地增大。

下面我们回到欧拉关于质数无限性的讨论上来。用反证法，假设质数序列是有限的，它们依序是

2，3，5，7，11，……，P

于是，我们有：

$$A_m=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{2^m}$$

$$<(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^n})\cdot(1+\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{3^n})$$

$$\cdot(1+\frac{1}{5}+\frac{1}{5^2}+\cdots+\frac{1}{5^n})\cdots\cdots(1+\frac{1}{p}+\frac{1}{p^2}+\cdots+\frac{1}{p^n})$$

这是因为左式分母的每一个数，都可以唯一地分解为若干质数的积，而这些积都对应着右式展开后的某一个项。当然，在m确定之后，我们的n必须选择得足够大。显然，右式对任何的n都小于M_p

$$M_p=\frac{2}{2-1}\cdot\frac{3}{3-1}\cdot\frac{5}{5-1}\cdot\cdots\cdot\frac{P}{P-1}$$

而M_p是一个固定的数。当m取很大时必有

$$M_p<1+\frac{m}{2}$$

这样一来，我们同时有一串矛盾的不等式

$$1+\frac{m}{2}<A_m<M_p<1+\frac{m}{2}$$

这表明原先假定质数序列有限是错误的。这便是欧拉关于质数无限性的证明！这个证明过程，充分体现了无限中有限的思想。

当然，欧几里得的证法，也因首次冲破质数无规律的障碍而载入史册。相同的方法可以用来证明质数序列中存在着很大的间隙。事文上，我们可以随心所欲地挑出一串足够长的连续合数，并把它插在两个质数的间隙之中！

例如，我们希望插入 1000 个连续合数。我们可以先找出第一个大于 1000 的质数 1009，那么以下的 1000 个数：

$$2\times3\times5\times\cdots\times1009+2$$
$$2\times3\times5\times\cdots\times1009+3$$
$$2\times3\times5\times\cdots\times1009+4$$
$$2\times3\times5\times\cdots\times1009+5$$
$$\cdots\qquad\qquad\cdots$$
$$2\times3\times5\times\cdots\times1009+1001$$

显然便是连续的合数。这意味着我们在质数序列中，至少找到了 1000 个数的间隙！

虽然质数序列稀稀拉拉，但是，质数之间也不是个个都离得很开。人们也发现了不少紧挨在一起的质数，如：3，5；5，7；11，13；17，19；29，31；…；10016957，10016959；…；1000000007，1000000009；…。这使得质数序列显得更加神秘莫测。

公元 1830 年，法国数学家勒让德（Legendre，1752～1833）猜想，小于 N 的质数个数π（N）为

$$\pi(N)\sim\frac{N}{\ln N}$$

而号称“数学之王”的高斯（Gauss，1777～1855），也几乎同时独立地猜出了这一公式。勒让德和高斯的猜想，具有很高的精确度。

然而，在很长的一段时间里，勒让德和高斯的结论依然停留在猜想上。只是在 20 年之后，大约公元 1848 年，俄国数学家车比雪夫取得了一些积极成果，但此后又沉寂了半个世纪。直到上世纪末，公元 1896 年，智慧超群的法国数学家阿达玛（Hadamard，1865～1963）和比利时数学家布散（Poussin）同时独立地取得了这一猜想的严格证明，并称之为“质数定理”。

“质数定理”同时独立地被提出，又同时独立地被证明，这不能不成为数学史上的佳话！鉴于阿达玛的证明需要用到高深的知识，数学家们常常为此感到美中不足。人们为寻找更为简易的证明，又花去了半个世纪。公元 1949 年，质数定理的初等证明终于被找到。

大凡有关质数分布的命题，包括前面讲的质数定理，其证明大都使用到欧拉在证明质数无限性时所创造的方法，这大概就是数学家们为什么对欧拉的证明感到特别赞叹的原因！

“有限”的禁锢

有限，常常禁锢着人们的思想。大家习惯于把有限运算的法则，不知不觉地运用到运算中去。当人们为某些正确的成果而欢欣鼓舞的时候，往往忽略了思维中的潜在危险！

下面是一些十分有趣的循环算式计算：

如$\sqrt{3\sqrt{5\sqrt{3\sqrt{5\sqrt{\cdots\cdots}}}}}$，这类循环算式是可以直接加以计算的，事实上

$$x=3^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^5}+\cdots}\cdot 5^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2^4}+\frac{1}{2^6}+\cdots}$$

$$=3^{\frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{4}}}\cdot 5^{\frac{\frac{1}{4}}{1-\frac{1}{4}}}$$

$$=3^{\frac{2}{3}}\cdot 5^{\frac{1}{3}}=\sqrt[3]{45}$$

但如果注意到

$$x=\sqrt{3\sqrt{5x}}$$

则$x^4=45x$

立得$x=\sqrt[3]{45}$（舍去$x=0$），这显然要简单得多。

又如下面的无限分数

$$x=1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\text{O}}}}$$

易知有 $x=1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{x}}$

从而 $2x^2-2x-1=0$

$$x=\frac{1+\sqrt{3}}{2}\ (x>0)$$

读者中可能很少有人会对上面运算的正确性表示怀疑。其实，这些计算必须以“循环算式的值”存在为前提。倘若不是这样的话，我们甚至会得出荒谬的结果！下面的例子在历史上是颇为有名的：

三个学生用三种不同的方法，计算式子

1-1+1-1+1-1+……

竟然得出各不相同的结果！

某甲：原式＝（1-1）＋（1+1）＋（1-1）＋……

＝0＋0＋0＋……＝0；

某乙：原式＝1+（-1＋1）＋（-1＋1）＋（-1＋1）+……

＝1+0+0+0＋……＝1；

某丙：令 X＝1－1＋1－1＋1-1＋……

∵X＝1－（1－1＋1-1+1-1＋……）

＝1-X

∴$2X=1$，$X=\frac{1}{2}$。

亲爱的读者，依你之见，他们三人谁是对的呢？

要跨越有限的栏栅，需要一种异乎寻常的思考，下面一道问题的最终结果，可能会大大出乎人们的意料！

公元 1799 年，德国数学家高斯证明了代数学的一个基本定理。即 n 次方程必有 n 个根。对于一个简单的方程

$$x^2=x$$

我想读者都能准确无误地求出它的根来：$x_1=1$，$x_2=0$。倘若有人告诉你，你所求的只是有限根，还有两个“无限”解没求出哩！对此，你一定会大感惊讶，然而这是确实的！

显然，要使 $x_2=x$，x 的个位数字只能是 1，5，6 三个。如果同时考虑十位数的话，那么只有以下的两种可能：

$$\begin{cases} x_1=\cdots\cdots 25 \\ x_2=\cdots\cdots 76 \end{cases}$$

为求 x_1 的百位数字，可令（k_1 为 0 至 9 的数字）：

$x_1=\cdots\cdots k_1 25$

$x_1^2=(\cdots\cdots k_1)^2\times 10^4+2\times(\cdots\cdots k_1)\times 10^2\times 25+25^2$

$=\cdots\cdots 625$

$\because x_1^2=x_1$

$\therefore k_1=6$ 接下去再令 $x_1=\cdots\cdots 1_1 625$

$x_1^2=(\cdots\cdots 1_1)^2\times 10^6+2\times(\cdots\cdots 1_1)\times 10^3\times 625+625^2$

$=\cdots\cdots 0625$

又得 $1_1=0$

以上步骤可以一步一个脚印地做下去，得出一个满足“$x_1^2=x$”的无限长的“数”

$x_1=\cdots\cdots 2890625$

从推导的过程容易看出，这个无限长的“数”等于$(((5^2)^2)^2)^{2N}$

求 x_2 的过程稍微复杂一些，但方法是一样的。令

$x_2=\cdots\cdots k_2 76$

$x_2^2=(\cdots\cdots k_2)^2\times 10_4+2\times(\cdots\cdots k_2)\times 10^2\times 76+76^2$

$=(\cdots\cdots k_2)^2\times 10_4+15200\times(\cdots\cdots k_2)+5776$

$\because x_2^2=x_2$

$\therefore 2k_2+7=K_2+10$，$k_2=3$

从而 $X_2=\cdots\cdots 376$

同样，我们可以求出 x_2 的后四位数为 9376；后五位数为 09376；再下去又有 109376；如此等等，一位一位数字地往前算，便得到另一个无限长的“数”

$X_2=\cdots\cdots 7109376$

至此，一个极为普通的二次方程“$x_2=x$”除通常的 X=0，x＝1 两个解外，居然又找到了两个“无限”的解：

$$\begin{cases} x_1=\cdots\cdots 2890625 \\ x_2=\cdots\cdots 7109376 \end{cases}$$

对此有趣的结沦，聪明的读者难免感到意外，并对如今的方程理论，重作一番认真的思考。

由于 X_1 的右起各位数字，可以通过下面的计算求得：

5	5
5^2	25
$(5^2)^2$	625
$((5^2)^2)^2$	**0625
$(((5^2)^2)^2)^2$	*******90625
…	…
$(((5^2)^2)^2)^2$	…2890625

因此，我们完全不必一位接一位地推算。上表的右边便是直接得到的结果。“＊”是无效的数字。但求 X_2 却没有相应于上述的那种捷径。不过，下面的表却可以帮助你很快地通过 X_1 求得它！

右起位数	x_1 的右起数字	X_2 的右起数字	左两栏和
1	5	6	11
2	25	76	101
3	625	376	1001
4	0625	9376	10001
5	90625	09376	100001
M	M	M	M
n	…	…	(10^n+1)

康托的“无限理论”

倘若有人告诉你，一根头发丝上的点，和我们生活着的宇宙空间里的点一样多。对此，你可能感到不可思议！其实，只要挣脱“有限”观念的束缚，上面讲的一切都可能发生！

虽说人类早在二千年前就认识“无限”，但真正接触无限本质的却鲜有其人。第一个有意识触及“无限”实质的，大约要算意大利科学家伽俐略，他把全体自然数与它们的平方一个对一个对应起来：

1　2　3　4　5　6

β　β　β　β　β　β　……

1^2　2^2　3^2　4^2　5^2　6^2……

它们谁也不多一个，谁也不少一个，一样多！然而，后者很明显只是前者的一部分。部分怎么能等于整体呢？伽俐略感到迷惑了，但他至死也没能理出一个头绪来！

真正从本质上认识“无限”的，是年轻的德国数学家，29 岁的伯林大学教授乔治·康托（G·Gantor，1845～1918）。他的出色的工作，起于公元 1874 年。

康托的研究是从计数开始的。他发现人们在计数时，实际上应用了一一对应的概念。譬如教室里有 50 个座位，老师走进教室，一看坐满了人，他再也无须张三李四地一个个点数，即知此时听课人数为 50。这是因为每个人都

占一个座位，而每个座位都坐着一个人，两者成一一对应。倘若此时空了一些座位，我们立即知道，听课学生少于 50，这是因为“ 部分小于整体 ”的缘故。然而这只是有限情形下的规律。对于无限的情形，就像前面讲到的伽俐略例子一样，部分可能等于整体！这，正是无限的本质！

经过深刻的思考，康托教授得出一个重要结论：即如果一个量等于它的一部分量，那么这个量必是无限量；反之，无限量必然可以等于它的某一部分量。

接着，康托教授又引进了无限集基数的概念。他把两个元素间能建立起一一对应的集合，称为有相同的基数。例如伽俐略的例子，自然数集与自然数平方的数集，有着相同的基数。康托教授正是从这些简单的概念出发，得出了许多惊人的结论。

例如，康托证明了在数轴上排得稀稀疏疏的自然数，能够与数轴上挤得密密麻麻的有理数全体，建立起一一对应。也就是说，自然数集与有理数集有相同的基数！

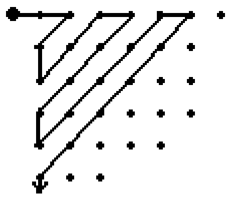
下面是康托的证明。

先把全体有理数按表 1 排列，表中的每一个数都对应着唯一的一个有理数。反之，任何一个有理数也都可以在下表中找到。表的构造细看自明：

现在我们把表中的数，按下页图箭号方向的顺序排成一串长队，删去与前面重复的数后，便得出已经排了队的全体有理数。

0，1，2，−1，$\frac{1}{2}$，−2，3，4，-3，……它显然可以与自然数建立一一对应。因此有理数集与自然数集基数相同。

由于自然数集的元素是可以从一开始逐个点数的，所以凡是与自然数集基数相同的集合，都具备可数的特性。显然，可数集基数是继有限数之后紧挨的一个超限数。为叙述方便，康托教授用希伯莱字母“ 阿列夫 ”卍，加上下标 0 来表示它。于是，我们有以下的基数序列：



1，2，3，4，5，……卍。

这一序列后面还有没有其他的超限基数？答案是肯定的。因为倘若所有的无限集基数都相同，那么康托教授的理论也就无足轻重了！

下面我们再看一些令人惊异的例子。

下图可能是读者所熟悉的，它建立了圆周与直线上点的一一对应。这表明一个有限长圆周上的点，可同无限长直线上的点一样多！

更为神奇的是，我们还能得出，单位线段内的点，能与单位正方形内的点建立起一一对应。这一点远不是人人都很清楚的。大约读者中也会有不少人对此表示诧异！

其实，道理也很简单。设单位正方形内点的坐标（α，β）其 K 中α，β写为十进小数是：

$$\begin{cases}\alpha=0.a_1a_2a_3a_4a_4\cdots\cdots\\ \beta=0.b_1b_2b_3b_4\cdots\cdots\end{cases}$$

令 $\gamma=0.a_1b_1a_2b_2a_3b_3\cdots\cdots$

则 γ 必为（0，1）内的点。反过来，单位线段内部的任一点 γ^*：

$\gamma^*=0.c_1c_2c_3c_4c_5c_6c_7c_8\cdots\cdots$ 它对应着单位正方形内部的唯一一个点（$\alpha^*\beta^*$）。

$$\begin{cases}\alpha^*=0.c_1c_3c_5c_7\cdots\cdots\\ \beta^*=0.c_2c_4c_6c_8\cdots\cdots\end{cases}$$

这样，我们也就证明了一块具有一定面积的图形上的点，可同面积为零的线段上的点一样多！

瞧！康托的“无限理论”是多么地奇特，多么地与众不同，又多么地与传统观念格格不入？！难怪康托的理论从诞生的那一天起，便受到了习惯势力的抵制。有人甚至骂他是疯子。连他所敬重的老师，当时颇负盛名的数学家克朗涅克（Krone－cker，1823～1891），也宣布不承认康托是他的学生！精神上的巨大压抑，激烈论战的过度疲劳，终于超出康托所能忍受的限度。1884 年，康托的精神崩溃了！此后他时时发病，并于公元 1918 年 1 月 6 日逝世于萨克逊州的一所精神病医院。

然而，历史是公正的。康托的理论并没有因歧视和咒骂而泯灭！如今康托所创立的集合论，已成为数学发展的基础。康托使人类从本质上认识了“无限”。人们将永远缅怀他的不朽功绩！

奇妙的无限大算术

为 20 世纪数学的攻坚吹响进军号的德国数学家大卫·希尔伯特，曾经讲过一个关于无限的非常精彩的故事：

我们设想有一家旅店，内设有限个房间，而所有的房间都已客满。这时来了一位新客，想订一个房间。旅店老板会怎么说呢？他只好讲：

“对不起，房间都住满了，请另想办法吧！”

现在再设想另一家旅店，内设无限个房间，所有房间都住满客人。这时也有一位新客来临，想订个房间。这时却听到旅店老板说：

“不成问题！”

接着，他就把一号房间的旅客移到二号；二号房间的旅客移到三号；三号房间的旅客移到四号；如此等等。在经过一场大搬家之后，一号房终于被腾出来，新客就被安排在一号房里。

不久，突然来了无穷多位要求订房间的客人。怎么办呢？老板急中生智，又想了妙法：

“好的，先生们，请稍等一会”老板说。

接着，他通知一号房间的旅客搬到二号房；二号房间的旅客搬到四号房；三号房间的旅客搬到六号房；四号房间的旅客搬到八号房；如此等等。

现在，所有单号的房间都腾出来了！新来的无穷多位旅客，便可以安稳地住进去了！

希尔伯特的这个故事，把无限的特性刻划得维妙维肖！它说明了下面的

真理：即可数集加一个或几个元素仍是可数集；可数集加上可数个元素还是可数集。用符号表示就是：

卍$_0$+1=卍$_0$

卍$_0$+n=卍$_0$

卍$_0$+卍$_0$=卍$_0$

这便是无限大的加法。

下面我们再研究卍$_0$的乘法运算。

假定有两个无限集合

{○，△，▽，□，……}；

{白，重边，阴影，阴阳，黑}

它们的元素个数，分别等于已知的基数。那么很自然，两个基数的积，可以定义为由两个集合元素配合而得到的新集合的基数。下表列出了新集合的所有无素。这个新集合的基数

（○，白），（○，重边），（○，阴影），……

（△，白），（△，重边），（△，阴影），……

（▽，白），（▽，重边），（▽，阴影），……为卍$_0$，写成式子是：卍$_0$卍$_0$=卍$_0$。

由于 2×卍$_0$、3×卍$_0$。等等，不可能有比卍$_0$×卍$_0$更大的基数，从而也就意味着对于正整数 n 有：n×卍$_0$=卍$_0$

下面是一道明显的错题，它可以帮助人们弄清有限算术和无限算术的界限。

有人作了以下推理：

∵2 卍$_0$=卍$_0$

∴2=卍$_0$/卍$_0$=1

亲爱的读者，你知道错在哪里吗？

为了让读者一睹卍在应用上的风采，我们介绍一个数学史上的重大发现。

公元 1851 年，法国数学家刘维尔（Liouville，1809～1882）首次证明了“超越数”的存在。

什么是超越数？如果一个实数，满足形如

$a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots\cdots+a_2x^2+a_1x+a_0=0$

的整系数代数方程（$a_n\neq0$）。那么，这个实数就叫“代数数”。实数中除代数数之外，其余的数都是超越数。代数数范围很广，像$\frac{3}{5}$，$\sqrt[3]{7}$，$\sqrt{2+\sqrt{2}}$，……都是代数数。超越数为人类所认识的第一个数，是刘维尔找到的，后来就叫刘维尔数。它是一个无限小数，其中的 1 分布在小数后第 1，2，6，24，120，720，5040，……等等处：

L＝0.110001000000000000000001000……

刘维尔的论证是艰难的。不过，在一个半世纪后的今天，应用神奇的无限大算术，人们可以相当轻松地证明超越数的存在！事实上，在整系数代数方程

$a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots\cdots+a_1x+a_0=0$，（$a_n\neq0$）

中（n＋1）个系数都只能取整数值，因此这样方程集合的基数当为：卍$_{0}^{n+1}$，（n＝1，2，3，……）
而对于全部的整系数代数方程，其集合的基数当为：

$$\text{卍}_0+\text{卍}_0^2+\text{卍}_0^3+\cdots\text{卍}_0^{n+1}+\cdots$$
$$=\text{卍}_0+\text{卍}_0+\text{卍}_0+\cdots+\text{卍}_0+\cdots$$
$$=\text{卍}_0\times\text{卍}_0=\text{卍}_0$$

另一方面，每个 n 次方程最多只能有 n 个根。因而代数的基数，当不大于

$$\text{卍}_0\times\text{卍}_0=\text{卍}_0$$

也就是说，代数数是可数的！

超越数虽然很多很多，但具体的超越性判定，却很难很难！在中学中最常见的两个超越数是，自然对数的底 e 和圆周率π：

e＝2.71828182……

π＝3.14159265……

他们的超越性，是由法国数学家埃尔米 Hermit，1822～1901）和德国数学家林德曼（Lindemann，1852～1939），分别于公元 1873 年和 1882 年证明的！

“连续统”之谜

在学习代数中都有体会，乘方运算要比加法和乘法运算有力得多，那么在集合中这种乘方是什么含义呢？

先让我们看看有限的情形吧！大家知道，一个单元素的集合，其子集共有两个，即空集φ和本身；一个双元素的集合，易知其子集有 4 个，即 2^2 个；而一个有三个元素的集合｛a，b，c｝，它的全部子集可以求得，共有 8＝2^3 个，那么，一个具有 n 个元素的集合

P＝｛a_1，a_2，a_3，…，a_n｝

它的全部子集是否有 2^n 个呢？我们说：是的！事实上，可以这样来构造 P 的子集：

元素 a_1 要么取，要么不取；

元素 a_2 要么取，要么不取；

元素 a_3 要么取，要么不取；

元素 a_n 要么取，要么不取。

由于每个元素都有“取”与“不取”两种可能，因此它们之间共有 2^n 种不同的组合。每种元素的组合都构成了一个子集，所以集合 P 共有 2^n 个子集。以这 2^n 个子集为元素的大集合，我们称为集合 P 的幂集。显然，如果集合 P 的基数为有限数 n，则幂集的基数为 2^n。

现在我们把幂集的概念推广到无限集去，把无限集的全体子集构成的集合也称为幂集。假定某无限集的基数为卍$_0$，那么它的幂集的基数也可以形式地写为 2 卍$_0$。问题在于 2 卍$_0$ 等于多少？它能比卍$_0$ 更大吗？

公元 1874 年，康托论证了幂集的无穷大级别大于原集的无穷大级别。特别地：

$2^{\text{卍}_0}>\text{卍}_0$

康托教授终于使我们跳出了卍$_0$的圈子。

这样一来，我们得到了一个比卍$_0$更大的数 $2^{\text{卍}_0}$，康托把它记为卍$_1$。利用求幂集的手段，我们又可以得到比卍$_1$更大的超限基数卍$_2$，卍$_3$等等。

$$\text{卍}_2 = 2^{\text{卍}_1} = 2^{2^{\text{卍}_0}}$$

$$\text{卍}_3 = 2^{\text{卍}_2} = 2^{2^{\text{卍}_2}} = 2^{2^{2^{\text{卍}_0}}}\cdots\cdots。$$

就这样，康托找到了一个“青出于蓝而胜于蓝”的无穷大家族：

卍$_0$，卍$_1$，卍$_2$，卍$_3$，卍$_4$，……

阿列夫家族的第一代卍$_0$，便是大家熟知的可数集基数；阿列夫家族的第二代卍$_1$表示什么呢？读者很快便会看到，卍$_1$相等于全体实数的数目。

因为：任何一个实数都可以写成二进制数。反之，任何一个二进制数都表示一个实数。特别，一个二进制小数，表示[0，1]区间内的一个数。例如：

0.1101001…（2）

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + 0 + \frac{1}{2^4} + 0 + 0 + \frac{1}{2^7} + \cdots\cdots$$

$$= 0.5 + 0.25 + 0.0625 + 0.0078125$$

$$= 0.82\cdots\cdots$$

很明显，在可数集

Q＝ $\{a_1，a_2，a_3，\cdots\cdots\}$

的子集和二进制小数之间，我们能够建立起一一对应。办法是：如果某子集包含 Q 中的某个元素，则在与该元素对应的小数位上写“1”，否则写“0”。如 Q 的子集

$\{a_1，a_3，a_4，a_8，a_{10}\cdots\}$

则与其对应的二进制小数为

0.1011000101……（2）

反过来，任一个二进制小数，也对应着一个确定的 Q 的子集。如 0.1101001……（2）

它对应着 Q 的子集

$\{a_1，a_2，a_4，a_7，\cdots\cdots\}$

以上表明：Q 所有子集与二进制小数有相同的数目。这一结论，换成另一种表述即：[0，1]线段上的点的数目有 $2^{\text{卍}_0}$=卍$_1$个卍$_0$。

我们将从不同的角度，重新证实这一结果。

新的证明依然用反证法。假定区间△＝[0，1]上的点是可数的，它们已按某种规则排成一列：

$\alpha_1，\alpha_2，\cdots，\alpha_n，\cdots$

把△分为相等的三部分$[0，\frac{1}{3}]$、$[\frac{1}{3}，\frac{2}{3}]$、$[\frac{2}{3}，1]$。显然，这三部分中至少有一部分不含$\alpha_1$点。我们选定一个不含$\alpha_1$点的部分，记为△1。接下

去我们又把$\triangle_1$分成三个小、部分，又取其中不含α_2的一小部分，记为$\triangle_2$。如此等等，这样的过程可以无限地延续下去，结果得出一串一个套着一