
电子图书
信息技术的结晶
人类文明的载体
网络的基本资源

数学中的运动哲学
——函数的故事

永恒运动着的世界

天地之间的万物都在时间长河中流淌着，变化着。从过去变化到现在，又从现在变化到将来。静止是暂时的，运动却是永恒！

大概再没有什么能比闪烁在天空中的星星，更能引起远古人的遐想。他们想象在天庭上有一个如同人世间繁华的街市，那些本身发着亮光的星宿一直忠诚地守护在天宫的特定位置，永恒不动的。后来，这些星星便区别于月亮和行星，称之为恒星。其实，恒星的称呼是不确切的，只是由于它离我们太远了，以至于它们之间的任何运动，都慢得使人一辈子感觉不出来！

北斗七星，是北天最为明显的星座之一。在北天的夜空是很容易辨认的。

大概所有的人一辈子见到的北斗七星，总是如同上页图那般形状。人的生命太短暂了！几十年的时光，对于天文数字般的岁月，是几乎可以忽略不计的！然而有幸的是：现代科学的进展，使我们有可能从容地追溯过去和精确地预测将来。左图的（1）、（2）、（3）是经过测算，人类在十万年前、现在和十万年后应该看到和可以看到的北斗七星，它们的形状是大不一样的！

不仅天在动，而且地也在动。火山的喷发，地层的断裂，冰川的推移，泥石的奔流，这一切都还只是局部的现象。更令人不可思议的是；我们脚下站立着的大地，也像水面上的船只那样，在地幔上缓慢地漂移着！

由此可见，这个世界的一切量，都跟随着时间的变化而变化。时间是最原始的自行变化的量，其他量则是因变量。一般地说，如果在某一变化过程中有两个变量 X，y，对于变量 X 在研究范围内的每一个确定的值，变量 y 都有唯一确定的值和它对应，那么变量 X 就称为自变量，而变量 y 则称为因变量，或变量 X 的函数，记为：

$$y=f(x)$$

函数一语，起用于公元 1692 年，最早见自德国数学家莱布尼兹的著作。记号 f（x）则是由瑞士数学家欧拉于公元 1724 年首次使用的。上面我们所讲的函数定义，属于德国数学家黎曼（Riemann，1826～1866）。我国引进函数概念，始于 1859 年，首见于清代数学家李善兰（1811～1882）的译作。

一个量如果在所研究的问题中保持同一确定的数值，这样的量我们称为常量。常量并不是绝对的。如果某一变量在局部时空中，其变化是那样地微不足道，那么这样的量，在这一时空中便可以看成常量。例如读者所熟知的“三角形内角和为 180°”的定理，那只是在平面上才成立的。但绝对平的面是不存在的。即使是水平面，由于地心引力的关系，也是呈球面弯曲的。然而，这丝毫没有影响广大读者，去掌握和应用平几的这条定理！又如北斗七星，它前十万年与后十万年的位置是大不相同的。但在近几个世纪内，我们完全可以把它看成是恒定的，甚至可以利用它来精确判定其他星体的位置！

谈“守株待兔”

《守株待兔》这则寓言，出自先秦著作《韩非子》。家喻户晓，至今已经流传了二千二百多年。

两千年来，人们一直认为“待兔”不得，罪在“守株”！其实，抱怨“守株”是没有道理的。问题的关键在于兔子的运动规律。如果通往大树的路是兔子所必经的，那么‘守株”又将何妨？

然而世界是一个不断运动的世界。兔子的活动，在时空的长河中，划出一条千奇百怪的轨迹，希望这条轨迹能与树木在时空中的轨线再次相交，无疑是极为渺茫的，因此，这正是这位农人悲剧之所在！

下面一则更为精妙的例子，可以使人们生动地看到问题的症结。

意大利文艺复兴时期的艺术大师列奥纳多·达·芬奇（Le- onardo da Vinci， 1452～1519）曾提出过一个饶有趣味的“饿狼扑兔”问题：

一只兔子正在洞穴（C）南面 60 码的地方（o）觅食，一只饿狼此刻正在兔子正东 100 码的地方（A）游荡。兔子回首间猛然遇见了饿狼贪婪的目光，预感大难临头，于是急忙向自己的洞穴奔去。说时迟，那时快，恶狼见即将到口的美食就要失落，立即以一倍于兔于的速度紧盯着兔子追去。于是，狼与兔之间，展开了一场生与死的惊心动魄的追逐。

问：兔子能否逃脱厄运？

有人作过以下一番计算：

以 0 为原点，OA，OC 分别为 X，Y 轴，以 1 码为单位长。则 OA＝100，OC＝60。根据勾股定理，在 Rt△AOC 中

$$AC=\sqrt{OA^2+CO^2}=\sqrt{100^2+60^2}=116.6$$

这意味着；倘若饿狼沿 AC 方向直奔兔子洞穴，那么由于兔子速度只有狼速度的一半，当饿狼到达兔穴洞口时，兔子只跑了 116．6＋ 2＝ 58．3 码距离，离洞口尚差 1．7 码。这时先行到达洞口的饿狼，完全可以守在洞口，“坐等”美餐的到来！

以上计算似乎天衣无缝，结论只能是兔子厄运难逃。可实际上这是错误的！饿狼不可能未卜先知地直奔兔穴洞口去“坐守”，它的策略只能是死死盯住运动中的兔子，这样它本身也就运动成一条曲线，这条曲线可以用解析的方法推导出来：

$$y=\frac{1}{30}x^{\frac{3}{2}}-10x^{\frac{1}{2}}+\frac{200}{3}$$

当 $x=0$ 时，代入上式得 $y＝66\frac{2}{3}$

这意味着，如若北边没有兔子洞，那么当兔子跑到离原点 $66\frac{2}{3}$ 码的 B 点时，恰被饿狼逮住。然而有幸的是，兔子洞离原点仅有 60 码，此时此刻兔子早已安然进洞了！

随着“饿狼扑兔”谜底的解开，“守株待兔”问题似乎明朗了。不料，后来又有人提出异议，对《守株待兔》故事的真实性表示怀疑，机灵的兔子怎么会自己撞到偌大的树桩上去？它那两只精灵的大眼睛干什么去了？！

说得不无道理！不过，要说清这一点，还得从眼睛的功能谈起。

眼睛的视觉功能是有趣的：一只眼睛能够看清周围的物体，但却无法准确判断眼睛与物体之间的距离。下面的实验可以证实这一点。

两只手各拿一支削尖了的铅笔，然后，闭上一只眼睛，让两支笔的笔尖

从远到近，对准靠拢。这时，你令发现一种奇怪的现象：任你怎么集中注意力，两支笔尖总是交错而过！然而，如若你睁着双眼，要想对准笔尖，那是很容易做到的。

由此可见：用两只眼看，能准确判断物体的位置，而用一只眼看却不能！那么，为什么用两只眼睛便能判定物体的准确位置呢？

原来，同一物体在人的两眼中看出来的图象是不一样的！左图是一个隧道分别在两眼中的图象，它们之间的不同是很明显的。为了证明这两侧图形确是由你左右两眼分别看出的，你可以把图 a 摆在你的面前，然后两眼凝视图中央空隙的地方，如此集中精力几秒钟，并全神贯注于一种要看清图后更远的意念。这样，无须很久，你的眼前便会出现一种神奇的景象：图中左右两侧的形象逐渐靠近，并最终融合在一起，变成了一幅壮观的立体隧道图形！

现在我们回到“守株待兔”这个问题上来。

仔细观察一下便会发现，人眼与兔眼的位置是不相同的：人的两眼长在前方，相距很近，而兔的两眼却长在头的两侧。又根据测定，兔子每只眼睛可见视野为 189°30′，而人的每只眼睛可见视野约 166°。不过，由于人的两眼长在前面，因此两眼同时能看到的视野有 124°左右。在这一区域内的物体，人眼能精确判定其位置。而兔眼虽说能看到周围的任何东西但两眼重合视野只有 19°，其中前方 10°，后方 9°。因此兔子只有在很小的视区内才能准确判断物体的远近！

由图 b 还能看出；纵然兔子对来自四方的威胁都能敏锐地感觉，但对鼻子底下的东西（图中“？”号区域），却完全看不到！况且在惊慌失措的奔命中，说不定早已昏了头脑，撞树的事情也就难保不会发生。

对闭眼打转问题的探讨

公元 1896 年,挪威生理学家古德贝尔对闭眼打转的问题进行了深入的研究。他收集了大量事例后分析说：这一切都是由于人自身两条腿在作怪！长年累月养成的习惯，使每个人一只脚伸出的步子，要比另一只脚伸出的步子长一段微不足道的距离。而正是这一段很小的步差 X，导致了这个人走出一个半径为 y 的大圈子！

现在我们来研究一下 x 与 y 之间的函数关系：

假定某个两脚踏线间相隔为 d。很明显，当人在打圈子时，两只脚实际上走出了两个半径相差为 d 的同心圆。设该人平均步长为 1。那么，一方面这个人外脚比内脚多走路程

$$2\pi\left(y+\frac{d}{2}\right)-2\pi\left(y-\frac{d}{2}\right)=2\pi d$$

另一方面，这段路程又等于这个人走一圈的步数与步差的乘积，即：

$$2\pi d=\left(\frac{2\pi y}{21}\right)\cdot x$$

化简得 $$y=\frac{2dl}{x}$$

对一般的人，d＝0.1 米，1＝0.7 米，代入得（单位米）

$$y=\frac{0.14}{x}$$

这就是所求的迷路人打圈子的半径公式。今设迷路人两脚差为 0.1 毫米，仅此微小的差异，就足以使他在大约三公里的范围内绕圈子！

上述公式中变量 x，y 之间的关系，在数学上称为反比例函数关系。所谓反比例函数，就是形如$y=\frac{k}{x}$，（k为常量）这样的函数。它的图象是两条弯曲的曲线，数学上称为等边双曲线，在工业、国防、科技等领域都很有用场。

下面我们看一个有趣的游戏：

在世界著名的水都威厄斯，有个马尔克广场。广场的一端有一座宽 82 米的雄伟教堂。教堂的前面是一片开阔地。这片开阔地经常吸引着四方游人到这里做一种奇特的游戏：把眼睛蒙上，然后从广场的一端向另一端教堂走去，看谁能到达教堂的正前面！

奇怪的是，尽管这段距离只有 175 米，但却没有一名游客能幸运地做到这一点！全都走成了弧线，或左或右，偏斜到了一边！

为什么是这样呢？我们就先来计算一下，当人们闭起眼睛，从广场一端中央的 M 点抵达教堂 CD 的最小的弧半径是多少。如下图，注意到矩形 ABCD 边 BC=175（米），AM＝MB= 41（米）。那么上述问题，无疑相当于几何中的以下命题：已知 BC 与 MB 求 $\overset{\frown}{MC}$ 的半径 R 的大小。

$\because BC^2=R^2-(R-MB)^2=MB(2R-MB)$

$\therefore 175^2=41\times(2R-41)$

R=394 这就是说，游人要想成功，他所走的弧线半径必须不小于 394 米。那么就让我们再计算一下，要达到上述要求，游人的两脚的步差需要什么限制。根据公式：

$$y=\frac{0.14}{x}$$

$$\because y=R^1\geq 394$$

$$\therefore x\leq\frac{0.14}{394}=0.00035\text{（米）}$$

这表明游人的两只脚的步差必须小于 0.35 毫米，否则是不可能成功的！然而，在闭上眼睛的前提下，使两脚的步差这么小一般人是办不到的，这便是在游戏中为什么没有人能被蒙上眼睛走到教堂前面的道理。

“钟表定向”的科学原理

对于在沙漠，草原或雪野上迷了路的人，识别方向无疑是至关重要的。

我们设想一位迷失了方向的人，面临着一种艰难的境地，他在旅行中赖以辨认方向的罗盘，不幸丢失了！我们试图帮助他从这一困境中解脱出来。

倘若故事发生在晴天的夜晚，那是不用愁的，因为北天的那颗极星，可以准确地为你指示方向。

倘若故事发生在阴天，情况似乎比较棘手！不过，只要细心观察周围，还是有希望找到一些辨别方向的标志。如北半球树木的年轮一般是偏心的，靠北方向（N）年轮较密，而靠南方向（S）年轮较疏，这是由于树木向阳一

面生长较快的缘故。又如，有时在荒野中我们会看到一些残垣断壁、破寺败庙，按中国的习俗，这些建筑物一般是座北朝南的。

假如我们的主人公在一望无际的沙漠中迷失了方向。周围当然不可能奇迹般地出现庙宇和树桩。当空的烈日，正使他陷入一种茫然和绝望！此时，如果谁能告诉他，他手上戴着的手表，就是一只标准的“指北针”，那么他一定会为此而欣喜若狂！

也许你会疑虑重重，然而事实确是这样！钟表定向的方法是：把手表放平，以时针的时数（一天以 24 小时计）一半的位置对向太阳，则表面上“12 时”指的方向便是北方。例如表面上指的时间若是早上 8 时零 5 分，其时数一半的位置大约是“4.04 时”，以这个位置对向太阳，则“12 时”所指的方向即为北方。应当注意的是，对向必须准确。为了提高精度，我们可以用一根火柴立在“时数一半”的地方，让它的影子通过表面中心，这表明我们已经对准了太阳的方向！

我想你一定很想知道用钟表定向的科学道理，这是不难的！不过要彻底弄清它，还得先了解地球的自转。

众所周知，白天的出现和黑夜的降临，是由于地球的自转。然而，历史上有很长一段时间，人们对此半信半疑。迟至公元 1805 年，一位相当聪明的法兰西科学院院士梅西尔还这样写过：“天文学家要使我相信，我像一只烧鸡穿在铁棍上那样旋转，那真是用心枉然！”不过，这位学者的偏见，并没能阻止地球的旋转，从那时起地球又一如即往地转动了六万七千转！

公元 1851 年，法国科学家傅科在著名的巴黎国葬院，作了一个直接证明地球旋转的惊人表演：让一个大钟摆在地面的沙盘上不断划出纹道（左图）。虽说这个摆同其他自由摆一样，不停地在同一方向、同一平面上来回摆动。但地球及国葬院的地板，都在它底下极其缓慢地转动着，因此沙盘上划出的纹道，也一点点一点点由东向西缓慢而均匀地改变了方向。傅科摆的摆面旋转一周所用的时间与当地的纬度有关：在极点需要 24 小时时；在巴黎需 31 时 47 分；我国北京天文馆的傅科摆，摆面旋转一周约需 37 时 15 分。傅科的实验使我们亲眼见到了地球的均匀自转。地球自转一周，在人们的视觉假象中，太阳好像绕地球旋转了 360°。与此同时，手表面上的时针走了 24 小时，绕表心旋转了 720°。由于以上两者的转动都是均匀的，从而视觉中太阳绕地球旋转的角度 y，与表面上时针旋转的角度 x 的一半，应当是同步的。这表明，当选定各自计算的起始角后，应当有

$$y=\frac{1}{2}x+b$$

这是一个一次函数，它的图象是一条直线。上式右端 x 的系数 $k=\frac{1}{2}$ 称为直线的斜率；b 称为截距，恰等于直线截 y 轴的有向距离。

将上述一次函数式变形得：

$y-\frac{1}{2}x=b$（常量）

这意味着，视觉中太阳旋转的角与时针旋转的半角之间，相差是一个常量。这一变量中的常量说明，将“时数的一半”对向太阳时，手表面的位置是恒定的，不因时间的推移和太阳的升落而变化。当早晨 6 点太阳升起在东方时，我们用“6”的一半“3”去对准东方，那么“12 时”所指的方向自然

就是北方了！而这一方向，在太阳与时针同时运动中，保持恒定。这就是“钟表定向”的科学原理。

揭示星期几的奥秘

公元 321 年 3 月 7 日，古罗马皇帝君士坦丁，正式宣布采用“星期制”，规定每一星期为七天，第一天为星期日，尔后星期一、星期二直至星期六，尔后再回到星期日，如此永远循环下去！君士坦丁大帝还规定，宣布的那天日子为星期一。

一星期为什么定为七天？这大约是出自月相变化的缘故。天空中再没有别的天象变化得如此明显，每隔七天便一改旧貌！另外，“七”这个数，恰与古代人已经知道的日、月、金、木、水、火、土七星的数目巧合，因此在古代神话中就用一颗星作为一日的保护神，“星期”的名称也因之而起。

我想读者一定很想知道历史上的某一天究竟是星期几的奥秘！为了揭开这个奥秘，我们先从闰年的设置讲起。

我们知道：一个回归年不是恰好 365 日，而是 365 日 5 小时 48 分 46 秒，或 365.2422 日。为了防止这多出的 0.2422 日积累起来，造成新年逐渐往后推移。因此我们每隔 4 年时间便设置一个闰年，这一年的二月从普通的 28 天改为 29 天。这样，闰年便有 366 天。不过，这样补来也不刚好，每百年差不多又多补了一天。因此又规定，遇到年数为“百年”的不设闰，扣它回来！这就是常说的“百年 24 闰”。但是，百年扣一天闰还是不刚好，又需要每四百年再补回来一天。因此又规定，公元年数为 400 倍数者设闰。就这么补来扣去，终于补得差不多刚好了！例如，1976、1988 这些年数被 4 整除的年份为闰年；而 1900、2100 这些年则不设闰；2000 年的年数恰能被 400 整除，又要设闰，如此等等。

闰年的设置，无疑增加了我们对星期几推算的难度。为了揭示关于星期几的奥秘，我们还要用到一个简单的数学工具——高斯函数。

公元 1800 年，德国数学家高斯（Gauss，1777～1855）在研究圆内整点问题时，引进了一个函数

$$y = [x]$$

后人称之为高斯函数。

[x]是表示数 X 的整数部分，如：

$$[\pi]=3$$

$$[-4.75]=-5$$

$$[\frac{\sqrt{5}-1}{2}]=0$$

$$[1988]=1988$$

高斯函数的图象如左图，像台阶般，不连续！

利用高斯函数，我们可以根据设闰的规律，推算出在公元 X 年第 y 天是星期几。这里变量 X 是公元的年数；变量 y 是从这一年的元旦，算到这一天为止（包含这一天）的天数。历法家已经为我们找到了这样的公式：

$$s = x-1+[\frac{x-1}{4}]-[\frac{x-1}{100}]+[\frac{x-1}{400}]+y$$

按上式求出 S 后，除以 7，如果恰能除尽，则这一天为星期天；否则余数为几，则为星期几！

例如，君士坦丁大帝宣布星期制开始的第一天为公元 321 年 3 月 7 日。容易算得：

$$\begin{cases} x-1=320 \\ y=66 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} s &= 320+[\frac{320}{4}]-[\frac{320}{100}]+[\frac{320}{400}]+66 \\ &= 320+80-3+0+66 \\ &= 463 \equiv 1 \pmod 7 \end{aligned}$$

最后一个式子的符号表示 463 除以 7 余 1。也就是说，这一天为星期一。这是可以预料到的，因为当初就是这么规定的！

又如，我们共和国成立于 1949 年 10 月 1 日：

$$\begin{cases} x-1=1948 \\ y=274 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} s &= 1948+[\frac{1948}{4}]-[\frac{1948}{100}]+[\frac{1948}{400}]+274 \\ &= 1948+487-19+4+274 \\ &= 2694 \equiv 6 \pmod 7 \end{aligned}$$

原来，这一普天同庆的日子为星期六。

公元 2000 年 1 月 1 日，人类跨进了高度文明的 21 世纪，那么这一天是星期几呢？

$$\begin{cases} x-1=1999 \\ y=1 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} s &= 1999+[\frac{1999}{4}]-[\frac{1999}{100}]+[\frac{1999}{400}]+1 \\ &= 1999+499-19+4+1 \\ &= 2484 \equiv 6 \pmod 7 \end{aligned}$$

计算表明：这一天也是星期六！

指数函数的威力

美国著名的科学家，避雷针的发明人，本杰明·富兰克林（Franklin·B，1706～1790）。一生为科学和民主革命而工作，他死后留下的财产只有一千英镑。令人惊讶的是，他竟留下了一份分配几百万英镑财产的遗嘱！这份有趣的遗嘱是这样写的：

"……一千英镑赠给波士顿的居民，如果他们接受了这一千英镑，那么这笔钱应该托付给一些挑选出来的公民，他们得把这钱按每年 5%的利率借给一些年轻的手工业者去生息。这款子过了 100 年增加到 131000 英镑。我希望，那时候用 100000 英镑来建立一所公共建筑物，剩下的 31000 英镑拿去继续生息 100 年。在第二个 100 年末了，这笔款增加到 4061000 英镑，其中 1061000 英镑还是由波士顿的居民来支配，而其余的 3000000 英镑让马萨诸州的公众来管理。过此之后，我可不敢多作主张了！"

富兰克林，留下区区的 1000 英镑，竟立了百万富翁般的遗嘱，莫非昏了头脑？！让我们按照富兰克林非凡的设想实际计算一下。请看下表：

从而 $$b_n = \frac{A_n}{A_0} = (1+5\%)^n$$

上式显然是函数$y=a^x$当$a=1.05$时的特例。在数学上形如$y = a^x$的函数称为指数函数，其中 a 约定为大于 0 且不等于 1 的常量。

下图画出了指数函数$y = 2^x$，$y = 10^x$，$y = (\frac{1}{2})^x$的图象。从图象容易看出：当底 a 大于 1 时，指数函数是递增的，而且越增越快；反之，当底 a 小于 1 时，指数函数递减。让我们观察故事中 $b_n=1.05^n$ 值的变化，不难算得：

当 $x = 1$时，$b_1 = 1.05$；

当 $x = 2$时，$b_2 = 1.103$；

当 $x = 3$时，$b_3 = 1.158$；

…… ……

当 $x = 100$时，$b_{100} = 131.501$。

这意味着，上面的故事中，在头一个 100 年末富兰克林的财产应当增加到

$A_{100} = 1000 \times 1.05^{100} = 131501$（英镑）

这比富兰克林遗嘱中写的还多出 501 英镑哩！在第二个 100 年末，他拥有的财产就更多了

$A'_{100} = 131501 \times 1.05^{100} = 4142421$（英镑）

可见富兰克林的遗嘱在科学上是站得住脚的！

由此可见，指数函数的威力。

历史上因此而吃了亏的，也不乏其人，大名鼎鼎的拿破仑就是其中的一位。

公元 1797 年，当拿破仑参观国立卢森堡小学的时候，赠送了一束价值三个金路易的玫瑰花，并许诺说，只要法兰西共和国存在一天，他将每年送一束价值相等的玫瑰花，以作两国友谊的象征。此后，由于火与剑的征战，拿破仑忘却了这一诺言！当时间的长河向前推进了近一个世纪之后，公元 1894 年，卢森堡王国郑重向法兰西共和国提出了"玫瑰花悬案"要求法国政府在

拿破仑的声誉和 1375596 法郎的债款中，二者选取其一。这笔高达百万法郎的巨款，就是三个金路易的本金，以 5%的年利率，在 97 年的指数效应下的产物。这一历史公案使法国政府陷入极为难堪的局面，因为只要法兰西共和国继续存在，此案将永无了结的一天！

不过，指数效应更多是积极的方面。

指数函数不仅在数学、物理、天文上应用极广，而且在其他自然科学甚至社会科学上也大有用场！以指数规律变化的自然现象和社会现象，有一种极为重要的特性：即量 A 的变化量△A，总是与量 A 本身及其变化时间△t 成正比

$$\triangle A \propto A \triangle t$$

事实上，令 $A=f(t)=a^t$，则

$$\triangle A=a^{t+\triangle t}-a^t=a^t(a^{\triangle t}-1)$$

$$=A\triangle t\left(\frac{a^{\triangle t}-1}{\triangle t}\right)$$

数学上可以证明，上式右端括号内的量，当变化时间很短时，趋向一个极限 K（实际上等于 lna），从而证得：

$$\triangle A \approx KA\triangle t$$

反过来，数学家也已经证明：如果量 A 的变化量与它本身及变化时间成正比（比例系数为 K），那么此时必有

$$A=A_0e^{kt}$$

这里 A_0 是变量 A 的初始值（t＝0），数 e＝2.718……则是一个与圆周率π一样重要的数学常量。

对数的发现过程

16 世纪的欧洲随着资本主义的迅速发展，科学和技术也一改中世纪停滞不前的局面。天文、航海、测绘、造船等行业不断向数学提出新的课题。有一个集中暴露出来令人头痛的问题是：在星体的轨道计算，船只的位置确定，大地的形貌测绘，船舶的结构设计等一系列课题中，人们所遇的数据越来越宠杂，所需的计算越来越繁难！无数的乘除、乘方、开方和其他运算，耗费了科学家们大量的极为宝贵的时间和精力。

面对这种局面，数学家们终于出来急其所难，各种门类的表格：平方表、立方表、平方根表、圆面积表等等，便应运而生，人类就这么在表格的海洋中茫然地行驶了半个多世纪，直至 16 世纪 40 年代，才迎来了希望的曙光。

公元 1544 年，著名的哥尼斯堡大学教授，德国数学家斯蒂费尔（Stiefel，1487～1567），在简化大数计算方面迈出了重要的一步。在《普通算术》一书中，斯蒂费尔宣布自己发现了一种有关整数的奇妙性质，他认为：“为此，人们甚至可以写出整本整本的书……”

那么，斯蒂费尔究竟发现了什么呢？原来他如同下表比较了两种数列：等比数列和等差数列。

斯蒂费尔把等比数列的各数称为“原数”，而把等差数列的对应数称为“代表者”（即后来的“指数”）。他惊奇地发现：等比数列中的两数相乘，其乘积的“代表者”，刚好等于等差数列中相应两个“代表者”之和；而等

比数列中的两数相除，其商的“代表者”，也恰等于等差数列中两个“代表者”之差。斯蒂费得出的结论是：可以通过如同上面那样的比较，把乘除运算化为加减运算！

可以说斯蒂费尔已经走到了一个重大发现的边缘。因为他所讲的“代表者”y，实际上就是现在以 2 为底 x 的对数

$$v=\log_2 x$$

而使斯蒂费尔惊喜万分的整数性质就是：

$$\log_2 (M \cdot N) = \log_2 M + \log_2 N$$

$$\log_2 \left(\frac{M}{N}\right) = \log_2 M - \log_2 N$$

历史常常惊人地重复着这样的人和事：当发现已经降临到眼皮底下，只缘一念之差，却被轻轻错过！斯蒂费尔大约就是其中令人惋惜的一个。他困惑于自己的表格为什么可以算出 16×256＝4096，却算不出更简单的 16×250=4000。他终于没能看出在离散中隐含着的连续，而是感叹于自己研究问题的“狭窄”。从而在伟大的发现面前，把脚缩了回去！

正当斯蒂费尔感慨于自己智穷力竭之际，在苏格兰的爱丁堡诞生了一位杰出人物，此人就是对数的发明人纳白尔（Napier， 1550～1617）。

纳白尔出身于贵族家庭，天资聪慧，才思敏捷，从小又受家庭的良好熏陶，十三岁便进入了圣安德鲁斯大学的一个学院学习。十六岁出国留学，学识因之大进。公元 1571 年，纳白尔抱志回国。先是从事于天文、机械和数学的研究，并深为复杂的计算所苦恼。公元 1590 年，纳白尔改弦更张，潜心于简化计算的工作。他匠心独运，终于在斯蒂费尔的足迹上，向前迈出了具有划时代意义的一步！

说来也算简单！纳白尔只不过是让任何数都找到了与它对应的“代表者”。这相当于在斯蒂费尔离散的表中，密麻麻地插进了许多的中间值，使人看去宛如无数的纬线穿行于经线之中，显示出布匹般的连续！

公元 1594 年，纳白尔开始精心编制可供实用的对数表。在经历了 7300 个日日夜夜之后，一本厚达 200 页的八位对数表终于诞生了！公元 1614 年，纳白尔发表了《关于奇妙的对数法则的说明》一书，书中论述了对数的性质，给出了有关对数表的使用规则和实例。纳白尔终于用自己 20 年的计算，换来了人世间无数寿命的延续！法国大数学家拉普拉斯说得好：“如果一个人的生命是拿他一生中的工作多少来衡量，那么对数的发明，等于延长了人类的寿命！”

不幸的是，纳白尔的工作虽然延长了他人的寿命，却没能使自己的生命得以延长。就在纳白尔著作发表后的第三个年头，公元 1617 年，这位永受后人缅怀的杰出数学家，终因劳累过度，不幸谢世。

纳白尔的对数发明颇具传奇性。当时的欧洲，代数学仍处于十分落后的状态，甚至连指数概念尚未建立。在这种情况下先提出对数概念，不能不说是一种奇迹！纳白尔的对数是从一个物理上的有趣例子引入的：两个质点 A、B 有相同的初速度 v。质点 A 在线段 OR 上作变速运动，其速度与它到 R 的距离成正比；质点 B 作匀速直线运动。今设 AR＝ X， O′B＝y，试求 X，y 之间的关系？

纳白尔经过仔细分析后发现；质点 A 的瞬时末速度是一个无穷递缩等比数列

$$v，v\left(1-\frac{1}{n}\right)^{1}，v\left(1-\frac{1}{n}\right)^{2}，v\left(1-\frac{1}{n}\right)^{3}，\cdots v\left(1-\frac{1}{n}\right)^{i}，\cdots$$

从而量 x 在变化时也可以看成是一个无穷递缩等比数列；而 Y 在变化时显然可以看成是一个无穷递增的等差数列 0，v，2v，3v，4v，…，tv，…这样一来，在变量 y 与变量 X 之间便建立起了函数关系。纳白尔把 y 称为 X 的对数，用现在的式子来写就是：

$$y=\log_{\frac{1}{e}}x=\ln\left(\frac{1}{x}\right)$$

这里符号“ ln ”表示“ 自然对数 ”，对数的底就是上一节故事中讲的 e。这与今天课本上讲的“ 常用对数 ”有所不同，后者是以 10 为底的。

在数学上，对数函数的一般表示式为

$$y=\log_{a}x$$

改写成指数形式便有

$x=a^{y}$

在上式中，如果把变量 X 看成变量 y 的函数，并改用常用的函数和自变量符号，则有

$y=a^{x}$

这样得到的函数，我们称为原函数的反函数。两个互为反函数的图象，在同一坐标系里，关于第 I 、III象限的角平分线为轴对称。反函数图象的这一特性，在上图中可以看得很明显。

对数是十七世纪人类最重大的发现之一。在数学史上，纳白尔的对数、笛卡儿的解析几何及牛顿莱布尼兹的微积分三者齐名，被誉为“ 历史上最重要的数学方法 ”！

对数于 1653 年传入我国。公元 1664 年，我国学者薛风祚（？～1680）编译了《天学会通》丛书。在国内，这是第一部介绍对数和对数表的著作。

不朽的功绩

斯蒂费尔的“ 指数 ”思想，实际上早在 2200 年前就已有过！公元前 3 世纪，古希腊数学家阿基米德（Archimedes，公元前 287～前 212），在他名著《计砂法》中，就曾研究过以下两个数列：

1， 10， 10^2， 10^3，10^4， 10^5，……；

0，1， 2， 3， 4， 5，……。

并发现了幂的运算与指数之间的联系。然而，在阿基米德死后，因后继无人而湮灭了！

在斯蒂费尔发现对数后不到 60 年，在英吉利海峡两边的不同国度里，却几乎同时出现两位新秀：一位是纳白尔，另一位是聪明绝顶的瑞士钟表匠标尔格。后者是著名天文学家开普勒的助手。出于天文计算的需要，他于公元 1611 年，制成了世界上第一张以 e 为底的四位对数表。

不过，纳白尔的工作是无与伦比的。他的非凡成果，惊动了一位住在伦敦的天文数学家，牛津大学教授布里格斯（Briggs，1561～1631）。布里格斯几乎陶醉于纳白尔奇特而精妙的对数理论，渴望能亲睹这位创造者的容颜！

公元 1616 年初夏，布里格斯去信给纳白尔，希望能有机会亲自拜访他。纳白尔久仰布里格斯大名，立即回信，欣然应允，并订下了相会的日期。不久，布里格斯便登上了前往爱丁堡的旅途。

伦敦与爱丁堡之间路遥千里，而当时最快的交通工具只有马车，虽然日夜兼程，也需要数天时间。而两位科学家却早已心驰神往，大家都极为盼望着这次会面时刻的到来！

俗话说得好：“ 佳期难得，好事多磨 ”，偏偏在这节骨眼上，布里格斯的马车中途因故抛锚。布里格斯心急如焚，却又无可奈何！此后虽则加速行程，但终因此番耽搁，以致没能如期抵达爱丁堡。

话说另一头，在约定的日子里，纳白尔左等右等，终不见布里格斯的身影，焦虑和不安使这位年近古稀的老人，似乎显得更加苍老！时间过去了一天，正当纳白尔望眼欲穿之际，突然门外响起了阵阵铃声。纳白尔喜出望外，急忙向大门奔去……　。当风尘仆仆的布里格斯出现在纳白尔面前时，两位初次见面的数学家，像老朋友般紧紧地握住对方的双手，嘴唇颤动着，却久久说不出话来！

在很长一段时间之后，布里格斯终于先开了口：“ 此番我乐于奔命，唯一的目的是想见到您本人，并想知道，是什么样的天才使您第一次发现了这个对天文学妙不可言的方法。 ”

这次会面使两位数学家结成了莫逆之交。布里格斯根据自己在牛津大学的讲学经验，建议纳白尔把对数的底数改为 10，主张

$$\log_{10}l=\lg l=0$$

$$\log_{10}10=\lg 10=1$$

这样，一个数 N 的对数，便可明确地分成两个部分：一部分是对数首数，只与数 N 的整数位数有关；另一部分是对数尾数，则由数 N 的有效数字确定。这就是说，若

$$\mathrm{lo}N=\alpha．\times\times\times\times$$

$$则\begin{cases}\alpha=[\lg N]\\ 0．\times\times\times\times=\lg N-[\lg N]\end{cases}$$

有道是：“ 英雄所见略同。 ”纳白尔对布里格斯的建议大为赞赏，认为这种以 10 为底的对数，对于通常的计算更为实用！

就这样，纳白尔又以全部的精力投入了新对数表的制作，直至不幸逝世。

纳白尔的未竟事业，由布里格斯继承了下去。经历了艰难的八年之后，公元 1624 年，世界上第一本 14 位的常用对数表终于问世。不过，布里格斯的对数表实际上并不完全，只有 1～2000 及 90000～100000 各数的对数。这一对数表的空隙部分，四年后由荷兰数学家符拉克补齐。

随着对数应用的扩大，各类精密度更高的对数表，像雨后春笋般相继出现，蔚为壮观！其中有 20 位的；48 位的；61 位的；102 位的；而如今雄踞位数榜首的，是亚当斯的 260 位对数！

随着对数表位数的增加，表格的厚度也越来越厚：四位对数表只需 3 页；

5 位对数表就要 30 页；而 6 位对数表则需 182 页，……面对着这一本厚似一本的表格，人们终于引起了反思。实践使他们意识到，表的位数如果多于计算量的度量精度，那么表的位数越高，造成的时间和精力的浪费也就越大！于是，在实用的指导下，人们又逐渐从高位对数表，退回到低位对数表上来。目前全世界的教科书，采用的几乎都是四位对数表，这种表的使用，读者想必是很熟悉的！

对多位对数表反思的另一个结果，是更为快速计算工具的诞生。下图是一把常见的计算尺式样，标尺上的读数分为三级，因此可以读出三个有效数字（如下图）。对精度要求不太高的计算，计算尺是十分方便的！

计算尺的前身是纳白尔算筹，它是纳白尔于公元 1617 年发明的。那是在一些长方形的板片上刻写数码，对起来进行乘除、乘方、开方运算。纳白尔算筹于公元 1645 年由我国学者汤若望引进国内，当时国内学者对此兴趣颇高。这种算筹目前北京故宫博物馆仍然藏有数套。

对数表和计算尺源出同宗，但优劣各异：精度高的速度慢；速度快的精度低。是否存在得兼两者长处的计算工具呢？几个世纪来，科学家们用自己的聪明才智，进行着努力的探索！

公元 1642 年，法国数学家帕斯卡（Pascal，1623～1662）制造出了世界上第一台加法计算机，打响了攻坚的第一炮。

公元 1677 年，著名的德国数学家莱布尼兹发明了乘法计算机。

公元 1847 年,俄国工程师奥涅尔研制成了世界上第一部功能完善的手摇计算机。

我国人工计算机的研制工作起于清初康熙年间。公元 1685 年至公元 1722 年期间我国自行制造的原始手摇计算机，至今仍有十台，保存于故宫博物馆。

世界上第一台电子计算机，是公元 1946 年，在美籍匈牙利数学家冯·诺依曼（Von Neumann，1903～1957）领导下制成的。它标志着人类开始走进一个光辉的时代——电子时代！

今天，电子计算机已经更新了好几代，面目远非半个世纪前所能相比，各式各样先进的电子计算工具，也早已替代了计算尺和对数表。然而，对数表的发明和它在历史上的功绩，将永不磨灭！

并非危言耸听

公元 1972 年，尼克松被再次当选为美国总统后，建议美苏两国联合攻克癌症。建议立即被采纳。美方赠送了供研究的 23 种致癌病毒；苏方回赠了六名癌症患者的癌细胞标本。

翌年一月，美国国立癌采研究中心决定，将苏联的癌细胞标本分送给几位科学家研究。其中的一份，送到了加州细胞培养所长实验所所长尼尔森芮斯博士手上。

尼尔森芮斯经过几番周折，终于弄清了，所有苏方赠送的六各标本，全是二十多年前死去的美国黑人拉克丝的细胞。

原来拉克丝 1951 年 10 月死于一种罕见的子宫颈癌。这种特殊的癌细胞具有极强的繁殖力和生命力。拉克丝从发现第一个病灶到死亡，整个过程不足八个月。科学家们提取这种癌细胞加以培养，发现这些癌细胞竟以

$$y=A_0\cdot 2^x$$

这样的指数曲线疯狂地生长！每 24 小时便增加一倍（上式中 A_0 为原始数量，X 为天数）。就这样，这种新发现的癌细胞被命名“海拉”，并被严格控制于实验室。

“海拉”细胞在不足一个月时间内，便能增加数千万倍，这使过去一直认为的，健康细胞“自发”转变为癌细胞的神秘现象，得到了新的解释。原来所谓“自发”转变，只不过是“海拉”细胞消灭并占领了整个培养物！

然而事过二十多年，“海拉”细胞不仅没有死亡，而且还令人费解地流到国外，出现在莫斯科！于是，尼尔森芮斯博士撰文向全世界敲起了警钟：“如果听任‘海拉’细胞在最适宜的情况下毫无抑制地生长，那么到现在为止，它们很可能已经占领整个世界！”

这是危言耸听吗？不！这是科学的结论！

如果任其疯狂生长，那么按理论计算，一年后将达到

$$y=A_0\cdot 2^{365}$$

现在，我们已经有了对数工具，让我们计算一下，这个数字究竟有多大

$$\because\quad \lg y=\lg A_0+\lg 2^{365}$$
$$=\lg A_0+365\times\lg 2$$
$$=\lg A_0+365\times 0.3010$$

$$\therefore \lg\left(\frac{y}{A_0}\right)=109.865$$

从而　　$y=7.328\times 10^{109}A_0$

这样多的细胞，不必说占领整个地球，就是占领整个宇宙也不算过分！

好在人类已经学会了对生物的有效控制，才制止了这种有害生物指数般的繁殖和生长。

具有讽刺意味的是：人类虽然很早就注意控制生物，却迟迟才注意控制人类自己，世界人口依然按一条可怕的指数曲线在增长着！

公元初地球上的人口不足 2 亿 5 千万人,到公元 1650 年世界人口也才达到 5 亿，让我们计算一下这段期间世界人口的增长率 P：

$\because 5\times 10^8=2.5\times 10^8(1+P)^{1650}$

$\therefore\quad 2=(1+P)^{1650}$

$\lg 2=1650\lg(1+P)$

$\because \lg(1+P)=0.3010\div 1650=0.0001824$

$\therefore 1+P=1.00042$

$P=0.042\%$

这就是说，在公元后的 1600 年里，人类人口每年只平均增长万分之四多一些。然而，从公元 1650 年到公元 1800 年，仅一个半世纪，世界人口又翻了一番。可以算出这期间世界人口增长率为 0.46%，比前面高了十倍！而从 1800 年到 1930 年，世界人口再次翻番，达 20 亿。1960 年达 30 亿，1975 年达 40 亿，1987 年达 50 亿，……世界人口沿着一条越来越陡峭的曲线直指上方！

科学家们告诫说：我们这个赖以生存的地球，最多只能养活 80～100 亿人类。然而，按目前世界人口的增长速度，公元 2000 年，世界人口将达 65 亿，而公元 2025 年将突破 100 亿！再下去地球将无法承担这一负荷，人类将最终毁灭自己！

这是危言耸听吗？不！这是科学向人类提出的警告！

公元 1987 年 7 月 11 日，生活在这个星球上的第 50 亿个人，在南斯拉夫的萨格勒布市诞生了！这一天联合国人口活动基金会组织，向世界各国首脑，分别赠送一台特制的“人口钟”。这是一种奇异的计时器，除通常钟表功能外，还能显示该时刻该世界总人口的预测数，及每分钟各国人口的变化，它将随时提醒各国首脑重视人口问题。

追溯和预测

公元 1896 年，法国物理学家贝克勒尔发现，铀的化合物能放射出一种肉眼看不见的射线，这种射线可以使它在黑纸里的照相底片感光。这种现象引起了女科学家玛丽·居里的注意。居里夫人想，该不是只有铀才能发出射线吧！经她悉心研究，终于又发现了一些放射性更强的元素。

公元 1903 年，杰出的英国物理学家卢瑟福，设计了一个极为巧妙的实验，证实了放射性物质放出的射线有三种，而且在放出射线的同时，本身有一部分蜕变为其他物质。蜕变的速度不受冷热变化、化学反应及其他外界条件的影响。

经科学家们不懈努力，人们终于弄清了放射性蜕变的量的规律：即蜕变的变化量$\triangle m$，与当时放射性物质的质量 m 及蜕变时间成正比。也就是说

$$\triangle m \propto -m\triangle t$$

右端的负号是因为蜕变后放射性物质减少的缘故。

上式写成等式便是：

$$\triangle m=-km\triangle t$$

其中 $m=m_0e^{-kt}$

下面我们计算一下，究竟需要多长时间，才能使放射性物质蜕变为原来的一半。为此，令$m=\frac{1}{2}m_0$，于是

$$\frac{1}{2}=e^{-kt}$$

$$\lg\frac{1}{2}=-kT\lg e$$

从而

$$T=\frac{\lg 2}{k\lg e}=0.693\times\frac{1}{k}$$

这是一个常量，这个常量只与放射性物质本身有关，称为该放射性物质的半衰期。右上图画的是镭的衰变情况：每隔 1620 年质量减为原来一半。下表列的是一些重要放射性物质的半衰期。