

中国数学双基教学

张奠宙 编

上海教育出版社

本书的编写工作得到以下研究活动的支持：

教育部批准的

“数学教育高级研讨班”

(2002, 苏州; 2004, 南宁);

宁波市教委组织、宁波市教育学院承办的

“宁波数学教师高级研修班”

(2005)

第五节	变式教学:促进有效的数学学习的中国方式 (顾泠沅、黄荣金、Marton)	72
第六节	数学问题结构性变式的研究(孙旭花、黄毅英、 林智中)	86
第七节	记忆形成直觉的范例:“九九表”的认识及教学 研究(黄荣良、娄亚敏)	95
第八节	数学双基教学的高效益策略(刘静)	102
第三章	中国学生数学双基的测量	121
第一节	四川省小学生数学基本计算技能调查报告(张 晓霞、何立新、郑大明)	122
第二节	江苏省农村中学生计算能力调查(田中)	132
第三节	中国“九九表”的调查与研究(黄荣良、娄亚敏)	138
第四节	初中生理性思维能力的调查(余长岳、吴小平)	154
第五节	“字母表示数”理解水平研究(毛志挺)	165
第六节	函数图像知识与技能的测试量表(李左杰) ..	174
第七节	中学生对“无限”认识的调查(蔺云)	187
第八节	职业学校综合高中学生数学双基调查(王增良、 陈建生)	190
第四章	数学双基教学的文化渊源(张奠宙)	200
第一节	精耕细作的农耕文化的影响	200
第二节	儒家文化和数学双基	204
第三节	考试文化和数学双基	207
第四节	考据文化和双基教学	210
第五节	教育文化中的双基成分	215



第五章 双基数学教育理论的心理学研究.....	219
第一节 双基与双基教学：认知的观点(郑毓信、谢明初)	219
第二节 “熟能生巧”是通向牢固双基的一条途径(李 士錡、黄兴丰).....	230
第三节 ACT—R 理论与双基教学(鲍建生、王萍萍)	241
第四节 代数教学中的模式直观(张广祥、张奠宙).....	255
第五节 概念——命题系统结构与数学双基教学(喻 平、李渺).....	264
第六节 双基与创新意识的培养(李忠如).....	275
第六章 “双基基桩”的教学.....	279
第一节 双基“基桩”与接受性学习(巩子坤).....	280
第二节 小学教师关于“乘法”教学的设计(张羽飞、彭 琪琳).....	284
第三节 有理数加减法需要严格的“绝对值定义”吗? (胡玲君).....	287
第四节 有理数加减法教学的思考(焦亚唯).....	294
第五节 有理数运算中计算错误的矫正(黄伟建).....	296
第六节 “负负得正”的教学(黄伟建).....	305
第七章 “双基模块”的教学.....	309
第一节 双基模块的一般论述(张奠宙、吴建洪).....	309
第二节 整体性数学思考：“平行四边形”知识链(姚庆华)	313
第三节 微型“双基变式网”：糖水浓度与不等式(赵红庆)	318



第四节	用典型例题编织“双基知识网络”(王晓明).....	321
第五节	曲线与方程——基本概念的网络化(邬坚耀)	330
第六节	“直线方程”双基模块的形成(田中)	336
第七节	通过“练习课”构建解题模块(范丽观).....	340
第八节	先做后说,再做再说 ——函数图像平移双基模块教学(郑瑄).....	345
第八章	数学双基平台的构建.....	351
第一节	数学双基平台的涵义及其价值(张奠宙)	351
第二节	数学双基平台:研究函数 $y=x+\frac{1}{x}$ (蔡洪军)	354
第三节	斜率:层次性双基平台的建设(余智军).....	363
第四节	基于柯西不等式的“双基平台”(蔡洪军)	368
第五节	双基数学平台:含参数的“一元二次”问题(文 卫星)	375
第六节	拓展内涵的数学双基平台(王晓明)	380
第七节	一个初中数学的“双基平台”:两倍角问题(王 盛裕)	384
第九章	数学双基教学中的发展层面.....	390
第一节	借鉴国际经验,拓宽发展层面(张奠宙).....	390
第二节	数学双基教学和探究点的教学设计(张奠宙、 崔雪芳)	395
第三节	数学双基的人文主义内涵:和谐美(杨尢尔)	401
第四节	一堂结合双基的探究课	



——关于双曲线的内部和外部(马洪炎).....	408
第五节 从“中考”数学试题看基础和创新的结合(王继延)	416
第十章 数学开放题与双基的结合(龚雷、戴再平)	436
第一节 开放题与双基训练相结合.....	436
第二节 开放题与双基训练相结合的几种形式.....	439
第三节 考试中的数学开放题.....	447
第四节 开放性试题的参考答案及评分标准的制定.....	471
第五节 应该注意避免的几种倾向.....	478
未来展望(张莫宙).....	488
一、传统文化下的双基教育可能出现异化(李忠如).....	488
二、数学双基教学传统与西方教学理念的冲撞.....	492
三、继承传统,扬长避短,寻求和谐——从一则寓言说 起.....	495



序

张奠宙教授编的《中国数学双基教学》出版了. 这是中国数学教育发扬优良传统、努力走向世界的又一重要成果. 在此, 谨向本书的编者、作者、出版者致贺, 也愿借此机会向本书的读者谈谈自己的心情.

1985年, 已故的陈昌平教授, 以及张奠宙教授和我, 分别从微分方程教研室、函数论教研室以及几何教研室抽出来, 兼职组成华东师范大学数学教育研究室, 从事数学教育研究. 从那时算起, 我们投入数学教育研究整整20周年了.

当时我受命担任数学教育研究室的主任, 但是经费一分没有, 办公室更无一间, 全凭领导重视和个人热情参加工作. 1980年代, 正是国家大力实行改革开放的年代, 上海又处于东西方文化汇合的焦点, 因此我们一心想的是: 如何消除因中国几十年闭关锁国所造成的隔阂, 弥补与发达国家形成的差距, 尽快赶上国际潮流. 工作的重点首先放在与国际同行的交流与联系上. 陈昌平先生提出邀请 H·弗赖登塔尔访华, 1987年终于成行, 这是我们一项大胆的举动, 也成为我们以后工作的起点.

那段时期, 我们如饥似渴地吸收西方的数学教育理念, 咀嚼着那些陌生而又新鲜的词汇, 从美国的“问题解决”、“探索学习”, 到荷兰的“现实数学”、“数学化”, 半生不熟又似懂非懂地引进了不少新名词, 增添了许多新概念.

吸收、引进与交流的目的只有一个, 那就是使自己跟上潮流,

变得更好。中国有悠久的历史文化遗产，庞大的数学教师队伍，又有那么优秀出众的学生，中国数学教育理应有自己的特色，在世界数学教育领域内占据应有的地位。历史的责任落在 21 世纪数学教育工作者的肩上。

弗赖登塔尔曾经说过：“数学教育尚未成为真正的科学”。我想弗赖登塔尔的断言恐怕还没有过时。至少，我们中国的数学教育理论尚未成为真正的科学。我们还没有比较系统的研究呈现在世界面前。

一个突出的问题是，为什么在西方人眼中，中国的数学教育是落后的、保守的，可是中国学生在国际数学奥林匹克以及国际数学比较研究中的成绩为什么却是名列前茅？为什么西方人提出了所谓“中国学习者悖论”？中国的数学教育究竟是怎么样的？多少代数学教育人的辛勤劳动，多少年的积累创造，需要总结。在大学工作的教育家、数学教育研究家，不应该总是“以西非中”、“要求基层数学教师转变思想”，而应该眼睛向下，看看自己走过的道路，向第一线的老师学习。然后静下心来，踏踏实实、深入细致地去思考，去分析，去解剖，去构建。轻视自己的民族虚无主义是要不得的。

2004 年，《华人如何学习数学》的英文著作出版，中译本也在 10 个月以后发行。现在的这本著作，是研究中国数学教育的又一理论建设。两本著作的先后问世，着实令人高兴。

几十年来，数学双基教学在我国的数学教育界，几乎人人皆知，个个在做；由于 TIMSS 的国际数学比较研究的结果，近年来甚至已成为世人瞩目的对象；可是对这一耳熟能详的实践经验，我们自己却还缺少科学的研究。数学双基教学到底意味着什么？它与中国传统的历史文化有什么渊源？它在教育学、心理学上的理论基础是什么？它是否符合认知发展的规律？它与当前提倡的创新、探索又有什么样的关联，能否相互促进？对于数学双基教学



除了进行定性的描述以外,能否再作定量的刻画?数学双基教学在实践中形成了怎样的模式?是强调“基桩”,还是组织“模块”,或是构建“平台”?随着时代的飞速发展,比如现代信息技术的渗入,数学双基教学是否继续有效?还是必须随着形势而作相应的改变?这些问题在本书的各章中都作了一些阐述.一个初具规模的理论框架已经浮现出来,从一个侧面描绘了中国数学教学的基本特征.我想,它在我国数学教育事业发展的历程上,必然会留下浓重的一笔.

张奠宙先生为了“数学双基教学”这一专题,十多年来真可谓呕心沥血、锲而不舍,大会讲,小会说,从国际数学教育大会到国内的诸多场合,从理论研究者到第一线的中小学教师,从数学教育高级研讨班的专题讨论,到基层组织的数学教师研修班的成果总结,从追根溯源的理论探索到教学实践中的典型案例、调查实录,最终能汇百家之说、集众人之长,从而形成这一专著.对于这样一种研究工作的精神与态度,令人深思,也是很值得借鉴的.

与张先生共事多年,时常感受到一种驱动的力量.他组织的数学教育高级研讨班,从初创到成熟,我都是一个忠实的合作者与参与者.2002年在苏州、2004年在南宁,研讨的主题都是“双基”,我也躬逢其盛,对数学双基教学有深厚的感情.这次张先生嘱我为此书写序,其实不敢担当,也胜任不了这一重任,姑且唠叨几句,也算是与数学教育界的新老朋友们的共勉.

衷心祝愿我国的数学教育研究队伍日益茁壮成长,更祝愿未来的数学教育事业将会繁花似锦、如日中天.

唐瑞芬

2005-11-18 于华东师范大学数学教育研究所



编者感言

《中国数学双基教学》终于付印了。借此机会，想谈谈作为编者的心路历程。

我于1980年代中期介入数学教育。1987年弗赖登塔尔(Hans Freudental)访问华东师范大学，使我初步领略了国际数学教育大师的风采。1988年第一次出国，到布达佩斯参加第六届国际数学教育大会，吸收了世界数学教育的许多新的理念。与国外对比之后，感到中国数学教育确实有许多值得改进的地方。大众数学，问题解决，适度的非形式化，数学建模和应用，计算机技术用于数学教育……，这一切，都使我热血沸腾，决心改革中国的数学教育。其中的一个措施，就是在江苏教育出版社喻纬同志的鼓励下，编了《数学教育研究导引》一书，目的是参照国外的数学教育经验，扩展视野，推动改革。1990年代初，国家提出“素质教育”的方针，不久又有“创新是民族的灵魂”的口号。创新，成为教育改革的主旋律。因此，对数学教育中陈旧的部分进行改革，是理所当然的事。

总之，在相当长的时间里，我总是提倡数学教育的改革。改革是主旋律，至于中国数学教育有什么特色，具有怎样的优良传统，则不甚了了。

但是，在1992年的第一次数学教育高级研讨班上，中央教育科学研究所的刘远图研究员的报告，使我深为震动。那是“教育进展国际评价(IAEP)”主持的有关21个国家数学教育成就的测试。在13岁儿童的数学测试中，中国内地以80%的正确率位居第一，

中国台湾和韩国则以 73% 成绩并列第二。这使我清醒地认识到, 中国的数学教育有其成功之处, 应该认真思考中国自己的数学教育的长处与不足, 因而也告诫自己, 在推动改革的时候, 不要否定一切。泼浴盆中脏水时不要把孩子也倒掉了。也是在这一年, 我访问日本教育科学研究所时, 曾经提出“存在‘东亚数学教育学派’吗?”的问题, 为日本同行所关注。

1996 年, 常熟高等专科学校的田中先生和江苏大学的徐龙炳先生, 来华东师范大学数学系访问一年。我请他们研究“数学双基”。他们非常努力地工作, 在没有国家的任何经费支持的情况下, 凭着个人的热情, 争取中学老师的帮助, 完成了难度很大的“初中学生整式运算能力调查”的项目^[1]。这包括一个衡量“数学双基”的量表, 以及严格的测试和精致的数据分析。本书收入了这项研究的主要部分。

时间进入 21 世纪, 国家新一轮的教育改革很快拉开了序幕。那时我已经临近退休, 觉得这是难得的“报效国家”的机会, 于是全力投入, 仆仆于京沪之间。由于前面所说的一些思考, 多少还保持着一些冷静。

就在北京大兴的一次不经意的讨论过程中, 使我下决心研究数学双基教学。那是一次讨论高中课程的会议, 我认为要总结中国自己的成功经验, 发扬自己的优良传统。一位教育家随口说道: “中国当代的学科教育有什么可以发扬的? 我不知道。”这很刺激我。学科教育在中国至今没有获得应有的重视, 原因很多。其中重要一条是自己缺乏研究, 没有拿出一流的成果来。就连“数学双基”这样“耳熟能详”、“行之有效”的经验, 居然也没有科学的研究, 对一般教育理论和实践没有多少贡献。我觉得数学双基教学的研究

[1] 田中等:《数学基本知识、基本技能教学研究探索》, 华东师范大学出版社, 2002。



已经时不我待。

以上就是编写本书的缘起和经过。

这里,还必须平行地提到国际上的一些变化。1996年,澳大利亚学者出版了《华人学习者(Chinese Learner)》^[1]一书。在书的封底上有这样的话:“华人学习者如何能在学业成绩上如此成功(经常比西方的同龄人好很多),而他们的教和学看上去却是死记硬背的取向?”这就是通常说的华人学习者悖论。1999年,华人数学教育博士马立平出版畅销书《小学数学的认知和教学——中美教师对基础数学的理解》^[2],其中指出,中国小学数学教师在数学知识和数学技能的掌握上远比美国的同行为好。此外,国际数学和科学测试研究(TIMMS)在1999年公布结果,新加坡、韩国、日本、中国香港位居前四位,使国际数学界把目光投向东亚地区。2000年,在东京的第九届国际数学教育大会上,华人数学教育工作者在一个特别的集会上,研讨“华人数学教育的特色”,其结果便是大家看到的《华人如何学习数学》^[3]一书的出版。

这些背景,显示双基的研究,是时代的要求。

21世纪以来的一段时间里,教育实践中大力提倡“自主、探究、合作”的方向。这对发展学生个性、培养学生的创新能力,无疑是正确的。然而,大约是矫枉过正的缘故,一时间,接受性学习,重复的训练,严密的思维要求,也包括数学双基教学,几乎成了保守落后的代名词。这种倾向越来越严重,使得许多同志开始有所觉

[1] David A. Watkins and John B. Biggs: *The Chinese Learner: Cultural, Psychological and Contextual Influences*. CERC&ACER. Hong Kong.

[2] Liping Ma(马立平): *Knowing and Teaching Elementary Mathematics. Teachers' Understanding of Fundamental Mathematics in China and the United States*. Lawrence Erlbaum Associates, 1999.

[3] 范良火,黄毅英,蔡金法,李士琦等编:《华人如何学习数学》(中译本),江苏教育出版社,2005.



察.于是,在我主持的 2002 年的“数学教育高级研讨班”(苏州大学),就以数学双基作为研究的主题.2004 年冬,进一步在南宁的高级研讨班上再次讨论数学双基教学.这两次研讨,承蒙各级领导和数学教育界的同仁支持和配合,取得了许多新的成果.2005 年 8 月,第三届东亚数学教育会议(EARCOME3)在华东师范大学举行,主题是“基础与创造,东亚数学教育的长处与不足”.会上,又给我们许多启发.于是,我觉得编写一部关于“中国数学双基教学”的专著的条件已经成熟.上海教育出版社的韩希塘先生说“为了中国数学教育的未来,做一些努力是义不容辞的”.

本书不是论文集,而是一个系统的研究.2004 年的南宁数学教育高级研讨班的发言,每个人都事先有过专题研究,发言都有专指,因而可以成为独立的章节.此外,我们还从《华人如何学习数学》一书中转载(有删节)了几章,借以反映海外学者的看法.本书的一些案例,取自宁波市教委组织、宁波教育学院主持的一个教师研讨班的成果.但是,每个人的文章,原来都是独立成篇的.现在要安装成统一的格式,勉为其难.因此不得不进行删节、补充和修改.观点上的差异,虽说基本保留原样,但也总要有所融合.这些改动,未见得都能和原作一致,希望各位原作者见谅.体例上,有些章节详细引述文献,尤其是来自境外的作者,有的则没有详细列举,这只好维持原状.书中各节都注明作者的名字.凡未说明的,就是编者自己所写.

编完之后,觉得双基教学的确是我国数学教学的优良传统,值得继承和发扬.本书从双基教学的一般论述开始,叙述其四个特征,收集测量双基的量表和 data,探讨双基教学的文化渊源以及心理学基础,然后分为双基基桩、双基模块、双基平台三个部分进行展开.双基教学必须与时俱进,不断充实和发展.第九、第十两章,重点研究双基教学如何发展.最后的文字是展望.那里提出双基教学存在异化的危险,同时又指出,双基依然需要研究.以上的一些



观点,综合起来,便是本书的绪论.

双基教学的研究,不在教育界的重点研究计划之内,因此没有列入任何“科研规划”,当然也没有任何资助,一切全凭大家的报国热情和学术理想.近年来,一般教育取代数学教育的现象比比皆是,以至“数学教育”这门学科在中国尚未独立.数学教育“去数学化”的倾向十分严重,数学双基教学并未引起国人的足够重视.

但是,我们并不气馁.在中国教育发展的长征路上,希望本书能够成为跨江过河的一块石头.当后人摸着石头过河,达到中国教育光辉彼岸的时候,还记得有过这样的一块“双基”石头,我们的目的就达到了.



张奠宙

华东师范大学数学教育研究所

2005年10月30日

绪论：中国数学双基教学理论框架^{〔1〕}

中国数学教育有许多特点,但是以双基教学为主要特征.基于“数学教育高级研讨班”^{〔2〕}等大量的研究,数学双基教学的理论框架逐渐清晰起来.这里,拟对数学双基教学的涵义、文化背景、心理学基础、教学特征,以及今后的展望,进行整体性分析,并以此作为了解本书的纲要.

一、长期以来,数学双基的定义是:数学基本知识和基本技能.这不必也不能更改.但是,“数学双基教学”作为一个特定的名词,其内涵不只限于双基本身,还包括在数学双基之上的发展.启发式、精讲多练、变式练习、提炼数学思想方法等,都属于“发展”的层面,却又和数学双基密切相关.

因此,中国数学双基教学,是关于如何在双基基础上谋求学生发展的教学理论.这种发展是有效的,但也是有局限的.继承数学双基教学的传统优势,并克服数学双基教学本身存在的局限,是当前数学教育研究的一个重要课题.

二、数学双基教学,是中华文化的组成部分,具有悠久的历史.

〔1〕 本文是宁波数学教师高级研修班的一份总结.研修班的导师有张奠宙(华东师范大学)、陈守礼(宁波华茂学校)、蒋亮(象山中学)、何文忠(宁波教育学院)、程龙海(宁波大学).全文由张奠宙执笔.

〔2〕 由教育部人事司批准、资助召开的“数学教育高级研讨班”,先后于2002年(苏州)和2004年(南宁)以“双基”教学为主题进行研讨.

从黄河的麦地文化到江南的稻作文化,农民在小块土地上精耕细作,以勤劳为本换取更多的收成,形成了重视基本生产技能的传统。

处于主导地位的儒家文化,要求学生代圣贤立言,强调的是读书人的基础。即以记忆、背诵、理解经典、文章技法等的学习途径,获得学习的成功。

科举考试文化,包括八股文写作,尤其强调学子的基本功。至于清代中期以后的考据文化,则更注重文字训诂的严谨推演。

这些传统的合力,反映到数学教育上,就形成了“重视基础”的教学传统。1949年建国之后,学习苏联成为一时的国策。于是,以严谨、重视形式化表达的苏联数学,进一步推动了数学双基教学的形成。大跃进、文革期间曾经破坏了数学教学的系统性。拨乱反正之后,由于有切肤之痛,对于双基的认识进一步增强。因此,重视双基,是与中国传统文化相适应的教育理念。

三、国际上的心理学研究,有许多支持双基的理论。认知心理学认为人的专长是由自动化技能、概念性理解和策略性知识组成,前者与双基息息相关。有意义的接受性学习,更是注重双基的接受与形成。熟能生巧的现代研究,表明数学是“做”出来的,没有通过演练形成的基本技能,不可能有真正的发展。ACR-T理论,将复杂问题的学习归结为简单问题的掌握,实质上是一种强调“基础”的心理学理论。近年来,西方的学习理论,和中国的教学实际相结合,开始出现新的研究成果。变式教学是其中突出的一项。

近20年来出现了中国学习者“悖论”：“华人学生数学成绩优良,但教学方法陈旧”。怎样解释?数学双基教学也许是揭示这一悖论奥秘的一把钥匙。

四、中国数学双基教学有哪些理论特征呢?