



目 录



- 一 数学思想从何而来/1
 - 1.1 中国古代数学思想产生的文化背景/1
 - 1.2 关于数和形的原始思维/7
 - 1.3 甲骨文和十进制/14
 - 1.4 规矩的使用/18
 - 1.5 《周易》的数学思想/19
 - 1.6 先秦其他典籍中的数学思想/31
- 二 数学思想的最初表达/43
 - 2.1 秦汉大一统的思想文化/44
 - 2.2 《算数书》的数学/48
 - 2.3 《周髀算经》的思路/53
 - 2.4 算筹和筹算/60
- 三 数学思想的系统化表述——《九章算术》/71
 - 3.1 关于数学思想的系统表述/71
 - 3.2 数学的实用性系统化——《九章算术》概要/75



- 3.3 实用思想——开放的归纳体系/82
- 3.4 算法化思想——数学内容的算法化/90
- 3.5 模型化思想——运用之妙,存乎一心/97
- 3.6 数学思想的另一个源泉——《几何原本》/103
- 四 数学思想的理论奠基——刘徽的数学思想/113
 - 4.1 万物皆数思想——继往开来的思想/113
 - 4.2 系统证明思想——寻找每一个算法的依据/117
 - 4.3 极限(无限)思想——前无古人的算法/122
 - 4.4 以盈补虚思想——出入相补的原理/132
 - 4.5 不同数学思想的问题解决比较/140
- 五 数学思想的持续发展//155
 - 5.1 数学名著中典型的数学思想/155
 - 5.2 数学名家的数学思想/168
 - 5.3 独特的数学教育/179
- 六 数学思想的异彩——宋元数学高峰/187
 - 6.1 宋元数学成果点滴/188
 - 6.2 宋元数学思想的特点/210
- 七 数学思想发展的挫折——数学中断问题/255
 - 7.1 中国古代数学的中断/256
 - 7.2 数学中断的文化分析/259
- 附录 中国古代数学大事记/270
- 参考文献/274

— 数学思想从何而来



中国古代数学思想扎根于中国古人的社会实践之中,体现着中国古代生产方式、生活方式和思维方式的特点.反过来数学思想也推动着生产和其他社会实践的发展,促进着中国古代文化的发展.可以通过中国数学思想产生的文化背景,历史文物以及古代典籍探讨中国古代数学思想的产生.

1.1 中国古代数学思想产生的文化背景

当代历史学中,文明起源的“挑战和应战”学说占有重要的地位,该学说认为:“就人类而言,决定的要素——对胜败举足轻重的要素——绝不是种族和技能,而是人类对来自整个大自然的挑战进行应战的精神.由于人类出现在宇宙之中,自然的总和成了人类的环境,



这个总和包括人性自身的天性”，正是人类的应战促使了人类的创造性行为，开创了文明，与此相应的则是文明未必在宜于人类生活的各种有利环境中产生^①。

1. 中国文明产生的自然历史条件

中国位于北半球、亚洲东部，太平洋西岸，东西跨越了五个时区，南北横穿了 50 多个纬度。中国东部和南部面临着浩瀚的海洋，西部蜿蜒着巍峨的高山及号称“世界屋脊”的青藏高原，北部是蒙古高原的戈壁瀚海。这些地理环境在古代交通不发达的条件下，形成了相对的封闭状态，使我们的祖先与外界交往存在着困难，因而使中国的古代文化在相当长的时期内保持着自己鲜明的特色。

中国文明是大河背景下的农耕文明，最早产生于大河（长江、黄河、辽河等）流域的河谷地带。大河的冲积平原有广阔的发展余地，使发展成为大的领土国家有了可能。农业经济中水源成为关键，这已经要求有凌驾于各个小“国”之上的力量来协调水源的使用（挑战）。周期性的洪水泛滥又使治水成为沿河居民生死存亡的头等大事（挑战），大河的治水要求全体居民的共同努力，

^① [英] 汤因比. 历史研究. 刘北成, 郭小凌译. 上海: 上海人民出版社, 2000: 7-72, 91



因而就需要有一个超乎各“国”的统一的意志。这种需要的确也产生出这种统一的意志和力量——超越当时的生产力水平，在氏族部落的基础上就形成了相当程度的中央集权的政治形式（应战）。到了秦汉以后更形成了一个封建大一统的中央集权的帝国，这时的中国已是一个幅员辽阔、人口众多的广大的领土国家。西汉末的公元2年全国有户12 333 062，有人59 594 978口，垦田达8 270 536顷^①。中国古代进入文明的自然历史条件引起的挑战和应战，使得远古时产生的部落小“国”汇集为一个广大的领土国家。

与这种应战方式相适应，中国早早地进入了文明时代——在古代的氏族血缘纽带尚未瓦解时就进入了奴隶制社会。^②这种血缘纽带在中国文明的特定条件下，在历史的发展中不但没有受到冲击和削弱，反而变得极其稳定和强大，在其后的漫长历史进程中，经历了各种经济政治制度的变迁，终奴隶社会和封建社会的数千年历史，以血缘宗法纽带为特色，以农业家庭小生产为基础的社会生活和社会结构少有变动，表现出极度的稳定性和保守性。古老的氏族社会的遗风余俗、观念习惯长期地保存、积累下来，成为一种极为强固的文化结构和

^① 冯君实，中国历史大事年表，沈阳：辽宁人民出版社，1984：77

^② 肖蓬父、李锦全，中国哲学史（上），北京：人民出版社，1984：20



心理力量。^①中国古代文化就是在这种文化结构和心理力量中产生和发展起来的。

2. 中国古代的社会状况

在中国这样一个辽阔的国度里,中央集权有它产生的必然性.而对于这样一个大一统的国家政权来说,它的首要功能就是组织好社会生产.在中国古代,这一功能就是马克思所说的“一切亚洲政府所必须实现的经济功能,即建立公共工程的功能.”

中国古代由于独特的经济结构使国家在这种功能的发挥上达到无与伦比的程度.秦汉以后的封建社会里虽然土地已归家族所有,但“却也不是完全的土地私有制.‘以天下为家’的‘天子’无论在先秦或秦汉以后,其名义都拥有对全国土地的最高所有权,从这个意义上说,中国封建社会中的国家机器并非单纯只是个上层建筑,而且也是个庞大的经济实体”^②.这个“家天下”恰恰是氏族社会的“遗风余俗”!由于天子支配着从政治到经济的一切,只有忠心为他老人家做事才能得到政治及经济的好处,直接服务于帝王的当然是关于人事的学问,人的认识当然要以人事为客体了.

^①李泽厚,《中国古代思想史论》,北京:人民出版社,1985:299

^②周继旨,《中国封建社会经济结构的基本特征》,《中国社会科学》,1983(5)



由于存在这样一个以国家政权形式出现的经济实体,“关于经济功能或公共工程的功能,在中国历史上更为突出,不仅‘男耕女织’这一农业和手工业的特殊结合方式是由政府去组织并管理,是由‘大司农’以至‘户部’这样公私财政统一的机构去指挥.历代的盐、铁、织造以及贸易等工商业都集中于政府的机构去组织并指挥”^①.这也与氏族社会氏族首长“万事管”的“遗风余俗”很有关系.从禹以降,秦、汉及以后的历代政府都组织过大规模的治水活动就是一个典型的表现.如战国时的芍陂、都江堰、漳水十二渠和郑国渠等四大工程,前二者至今还发挥着作用;汉代修建白渠,修复汴渠等也是规模十分巨大的治水工程.学术要为这些工程服务,只能以“官府行为”出现,这就是通常所说的中国古代“学术官守”的来源.

3. 中国古人的思维取向

中国古人的思维,实际上是以自身为对象而不是以自然为对象的,通常进行的是自我反思而不是对象性认识^②.自我反思的目的为“修身”,进一步则在于“齐家治国平天下”,即目的在于“人事”,就是前面说的以人事为

^① 侯外庐,《中国封建社会史论》,人民出版社,1979:21

^② 蒙培元,《论中国传统思想方式的基本特征》,《哲学研究》,1988(7)



客体,这就是中国古人的思维取向.这恐怕是古老的氏族社会更为深刻的“遗风余俗”了——注重人际关系,这是氏族社会重视血缘关系的适当的推广.这一思维取向使中国古人的思维表现出这样几个特点:

(1) 伦理本位

由于思维取向,即主体的需要和愿望的指向是“人事”,即重人际关系:“习惯于从关系中去体认一切,……认为每个人都是他所属关系的派生物”^①.重人际关系,重的就是伦理道德.所谓“以天为宗,以德为本”(《庄子·天下篇》),就是“伦理本位”思想的重要表述,这种思想使中国古代思想家特别注重伦理政治问题.中国古代学者在伦理本位思想指导下,不是像古希腊的贤哲那样超脱“凡俗”,埋头于哲理和自然的探索,而是采取了积极的、入世的、参与的态度:关心治乱,以“治国平天下”为己任,为达此目的,“学而优则仕”.出仕或做官成为中国人最重要的追求之一.这反映了国家作为经济实体,需要大批官员进行管理或经营的经济结构的特点.

(2) 重价值判断

中国古代思维有“以价值判断统摄事实判断,融事实

^① 庞朴,中国文化的人文精神,光明日报,1986-1-6



判断于价值判断之中的特征”^①. 又因为具有伦理本位思想,因而在中国古代又常以道德判断代替价值判断——人们自觉不自觉地将符合伦理道德的事物作“好与善”的判断.因而在进行价值判断时,常以道德要求,如“三纲五常”、“忠孝节义”等,即以“礼”作为判断的标准.

(3) 重实用

中国古代的一切学问,都是以“经世致用”为目的.人们追求的不是关于客观世界的纯知识,也不是知识间的逻辑关系,而是如何把握事物间的关系,使之“有用”化.当然最重要的是对“修齐治平”的用,即直接的人事上的应用.这是以人事为思维取向的必然结果:既然思维以主体自身为对象,那么对主体有用就是最有价值的应肯定的东西,这当然符合重价值判断的特点.

1.2 关于数和形的原始思维

数学中最古老最原始的概念就是“数”(自然数)和“形”(简单几何图形).它们的形成和发展也是数学思想的开端.数和形是反映现实世界的量的关系和空间形式的“原子”和“细胞”,由它们开始,逐渐发展成完善的数学体系.因此,探讨人们如何形成数和形的原始思维,可以作为探讨数学思想的出发点.

数学的原始思维来源于数学的对象,更确切地说,

^①黄卫平,试论中国传统思维方式的特征,江海学刊,1985(1)

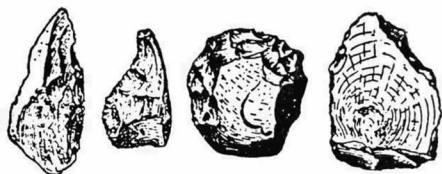


来源于现实世界.但是,自然界中既没有数,也没有形的概念.数和形是人作为认识主体对现实世界的反映,是人的思维的产物,亦即“思想事物”.对于自然数概念的产生,我们现在还只能满足于理论的探讨,因为文物上只能留下数字,无法留下它的产生过程;而对于形的概念的产生则有较多的实物可以追寻.

中国古人在进入文明以前就已经形成了数和形的原始思维.考古学上的许多发现,向我们提供了大量信息,这些信息表明,在中国,在五六千年以前的原始社会就产生了数和形的原始思维.

1. 北京人的石器

北京人是旧石器时代早期的人类,距今约 70 万年 ~ 23 万年.北京人居住在北京周口店龙骨山的洞穴中,在其遗址中发现了 10 余万件石器.其中有砍斫器,尺寸较大;有刮削器,有盘状、直刃、凸刃、凹刃等多种形状;还有尖状器和雕刻器,数量少些,但制作精细.还发现加工石器的石锤和石砧,石器的加工程序和打制方法比较固定,反映出一定的技术水平.



北京人的石器



要制成这种形状的石器,北京人除了观察过并且接触过大量自然物的形状、大小外,还亲自操作过这些自然物.在操作中,他们的头脑里一定逐渐有了关于他们具体需要的物的形状的某种表象,正是这些表象通过实践——对石头的击打操作,转化为他们制造出来的各种形状、各种大小的石器,使北京人对形已有了一些认识.

2. 许家窑人的石球和大溪文化的陶球

许家窑人,发现于山西省阳高县许家窑村和河北省阳原县侯家窑村之间,距今约 10 万年.在遗址中发现石制品 14 000 余件,且 20 % 为石器,其中石球达 1 074 个.石球中最大的直径超过 100 毫米,质量超过 1 500 克,最小的直径在 50 毫米以下,质量不到 50 克.其中既有制作得滚圆的成品,又有半成品和毛坯,从中可以清楚地看到制作石球的全部工艺过程.据推测,石球是一种狩猎工具.人为地制造自然界原来所没有的东西是人类创造的特点,大量而集中地制造石球,说明了当时人们在制造工具的社会实践中、在具体加工的操作中产生了对“球形”的进一步认识.



大溪文化陶球



大溪位于四川巫山长江南岸,20 世纪 50 年代在这里发现了红色空心陶球;1974 年到 1975 年又在湖北松滋县桂花树新石器时代遗址出土了一批有镂孔的空心陶球;接着,在湖北江陵毛家山出土了陶球和陶弹丸,陶球都是空心的.人们把这种陶球文化称为大溪文化.用天然原料加工成自然界原来没有的物质并制成空心球形,必须先有个球形的设计,就是说头脑里要先有个“球”并且利用球的一些性质,才能做出球来.到这里,古人已经完全形成球的概念了.

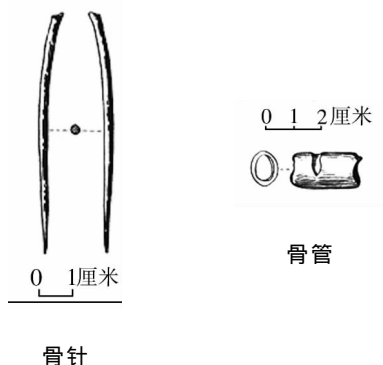
3. 山顶洞人的骨针和骨管

山顶洞人(发现于北京周口店龙骨山的山顶洞穴中,即居住于北京人遗址的上方,距今约 18 000 年)的遗址中出土石器 25 件,还出土一枚精致的骨针,磨得很圆,截面呈较规则的圆.此外,还出土 2 000 多件用砾石和动物骨骼、牙齿、海蚶壳等制成的各种形状的装饰物,其中有四只骨管,刻着大小不等的豁口.骨管上的豁口至少有两种解释:一种认为可能是记事的符号,大事刻大豁口,小事刻小豁口,豁口的排列顺序,表示事件发生的顺序;另一种认为,可能是数字记号,小豁口表示 1 个单位,大豁口表示 10 个单位.^①如果是后者,则表明山顶

^① 李迪,中国数学史简编,辽宁人民出版社,1985:5-8



洞人已经有进位的思想或顺序的思想,他们已能识别简单的数目层次或者区分前后顺序了,而这正是数得以产生的要件.



4. 仰韶文化的数、形观念

仰韶文化是中国黄河中游地区的新石器时期文化,因最早发掘的河南省渑池县仰韶村遗址而得名.现在属于仰韶文化的遗址已经发现了 1000 多处,其中大规模发掘的典型遗址有 10 余处,年代约在公元前 5000 年 ~ 公元前 3000 年之间.遗物中的石器已有十分规则的形状,表明当时的人类已经有了类似于“对称”、“平行”、“等距”等抽象的观念.

仰韶文化时期还发明了陶器.陶器是人类工具制造史上的一次重要的飞跃,表明人的生产力有了很大的提高,也表明人的思维能力有了巨大的发展.要用一些形状

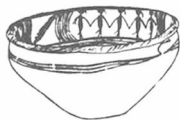


不固定的泥土制成具有某种形状、一定大小的陶器就一定要在头脑中先有一个“形”的表象。人们制造的陶器都有比较规则的几何形状，它们实际上都可以看做是人们的“几何图形”观念的实物模型。仰韶文化中的陶器有各种各样的形状和大小，说明当时的人已经具有多种几何图形的观念了。制作横截面积为圆形的陶器要用陶轮，陶轮带动陶土转动，人对陶土在一个点上的加工就可以在陶胚上形成一个圈，可见陶轮利用了圆的性质。



仰韶彩陶

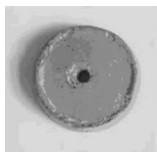
仰韶文化的一大特点，是制成了彩陶，因此有时也称为“彩陶文化”。彩陶上一般都绘有图案，例如动物图案或“几何纹”图案，这是一种真正的几何图形，它表明人们已由现实的具体的物体的形状、大小中抽象出其集合的类的特点，也就是形成了“形”的概念。



仰韶文化圆形陶器



用陶轮加工陶器示意，这是人类制作的最早的圆形器具



红山文化红陶带
工陶轮



仰韶陶器上的几何纹

半坡遗址(陕西省西安市原东郊半坡村出土,距今约 6000 ~ 7000 年,也属于仰韶文化系统)出土的陶器上发现了许多刻符,人们认为其中包括了一些数字,例如 $\times$ (5)、 $\wedge$ (6)、 $+$ (7)、 $\times$ (8)、 $|$ (10)、 $||$ (20) 等^①,与半坡文化时期相近的陕西姜寨遗址出土陶器上也有类似的刻符,例如还有 $-$ (1) 和 $|||$ (30). 据研究者探讨,认为可以补足为 1、2、3、4、5、6、7、8、9、10、20、30、40、50…… 这样的数字体系.^②这是真正的数字,说明当时的中国古人已形成了数的概念,有了数系的初步思想,而且,特别重要的是这些数表示为十进制的.

由上述可知,中国古人对数与形的原始思维是在原始社会中实现的;在这些原始思维中不仅形成了数和形的概念,而且产生了十进位制的先声. 由此开始了中国古代数学的发展历程,同时,也就开始了中国古代数学思想的发展历程.

^① 王志俊,关中地区仰韶文化刻画符号综述,考古与文物,1980(3);

^② 李迪,中国数学史大系(第一卷:上古到西汉),北京师范大学出版社,1998:130



1.3 甲骨文和十进制

系统的中国数字最早见于甲骨文中。甲骨文是中国商周时代刻在龟甲兽骨上的文字，最早出土于河南安阳小屯村殷墟，1899 年为学者发现，20 世纪进行了几次大规模发掘，先后出土十余万片刻写甲骨，已发现甲骨文单字 4 500 个左右，已识别出的约 1 700 字。甲骨文不仅提供了中国汉字的一种最古老的体系，由此可探讨汉字的起源，而且提供了商代的重要历史资料——现存甲骨是从盘庚迁殷直到商亡的 273 年间的卜辞及与占卜有关的事件的记载。20 世纪 70 ~ 80 年代在陕西周原等地又发现了西周甲骨文。甲骨文数字和干支纪日法是重要的数学创造。

1. 甲骨文数字

在仰韶文化中已经产生了十进位数制的思想，并且创造出一些数字，在甲骨文中则系统地完成了独特的中国的数字体系和记数法。

在一片甲骨上刻有从 1 到 9 九个数字，其他甲骨上也多次出现数字，除了个位数字外，还有更高级的单位十、百、千、万等，甲骨文中发现的最大的数是 3 万，这已经不是单纯的计数所能得到的了，应该说它是记数法的产物。



刻有数字的甲骨图

一	二	三	四	五	六	七	八	九	十	百	千	万
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	20	30	40
五十	六十	七十	八十	九十	一百	二百	三百	四百	五百	六百		
八百	九百	一千	二千	三千	四千	五千	六千	七千	八千	九千	一万	二万

甲骨数字 —— 其中 20、30、…、200、300、…、30 000 等等不是个位数与整数单位的数字叫做“合文”，大多是由个位数字和单位数组合而成，到了汉代取消了这种合文。

中国甲骨文中的数制，叫做乘法累数制，它继承了仰韶数字，甲骨数字是十进位的，一共用 13 个数字：一、二、三、四、五、六、七、八、九、十、百、千、万，用它们可以通过乘法表示出任意的数，不用每次重复书写单位数，如

$$\begin{aligned}
 321456 &= \text{三十二万一千四百五十六} \\
 &= 32 \times \text{万} + 1 \times \text{千} + 4 \times \text{百} + 5 \times \text{十} + 6
 \end{aligned}$$