

阿波罗尼奥斯

圆锥曲线论

(卷 I — IV)

朱恩宽摇张毓新
张新民摇冯汉桥^{摇译}

陕西科学技术出版社

陕西科学技术出版社前言

阿波罗尼奥斯的《圆锥曲线论》卷 I—IV 汉译本是由 [美] 绿狮出版社 (Green Lion Press) 于 1993 年出版的《阿波罗尼奥斯圆锥曲线论》(Apollonius of Perga's Conics) 卷 I—III 的英译本 (David E. Rowe 译) (修订本) 和 1993 年出版的该书卷 IV 的英译本 (David E. Rowe 译) 为底本合译而成

美国南阿拉巴马大学 (Southern Alabama University) 的张新民教授提供了这两个译本, 并与绿狮出版社联系了这两本书的中译本的出版事宜, 绿狮出版社欣然授权我社出版这两本书的汉译本

在此我们向张新民教授和 [美] 绿狮出版社以及这两本书的英译者、修订者、制图者和参与该书出版的工作人员表示感谢! 同时也向汉译本的译者、校对者和参与该书出版的工作人员表示感谢!

阿波罗尼奥斯的《圆锥曲线论》共有八卷, 其中第八卷早已失传。[美] 施普林格出版社 (Springer-Verlag) 于 1993 年出版了《阿波罗尼奥斯圆锥曲线论》(Apollonius of Perga's Conics) 卷 V—VII 的阿拉伯文和英文的对照本 (David E. Rowe 译), 该书的汉文翻译工作正在进行

陕西科学技术出版社

摇摇如果有谁以为这些论述的难以理解是出于他的思维缺乏条理，……我力荐这样的人去读一读阿波罗尼奥斯的《圆锥曲线论》。他将会发现，有些问题是：没有哪个有才智的人，不论是多么有天分的，可以将它表述成仅凭浏览就可以明白的方式，那得需要深思熟虑，并且仔细通盘想好所说出的（内容）才行。

开普勒（~~先露社集运葛德！场员原返园~~
摘自“~~蛋上深碧粤秘上赠先露康缘~~”

目 录

陕西科学技术出版社前言·····	(员)
汉译者序·····	(员)
关于《圆锥曲线论》的八卷书 ·····	(圆圆)
卷 I — III 英译本第二次印刷注记·····	(圆猿)
卷 I — III [美] 绿狮出版社前言 ·····	(圆源)
卷 I — III 插图者的说明·····	(圆怨)
卷 I — III 英译者的说明·····	(猿猿)
粤译本译者及其著作简介 ·····	(猿缘)
卷 IV [美] 绿狮出版社前言 ·····	(缘缘)
卷 IV 英译者序·····	(缘苑)
对本书所用的缩写式和符号的说明·····	(苑怨)
本书中圆锥曲线的汉译名词与现在名称的对照 ·····	(苑苑)
第 I 卷·····	(员)
第 II 卷·····	(员猿)
第 III 卷·····	(员猿)
英译者附录 粤 ·····	(圆猿)
英译者附录 月 ·····	(圆源)
第 IV 卷·····	(圆猿)
汉译者附录·····	(猿源)
文献目录·····	(猿缘)

缘缓《倾斜》(灾孽壁每译或 限性壁每译)；

援《内接于同一球的十二面体与二十面体对比》(粤惜鼎精鄂

此外还有《无序无理量》(讨论无理数)、《取火镜》(讨论圆面积与圆周长)、《圆周率计算》以及天文学方面的著述等援。

《圆锥曲线论》共有八卷，前四卷是基础部分，后四卷是拓广的内容。前四卷（卷Ⅰ—Ⅳ）是从公元3世纪希腊手稿复制出来的，后三卷（卷Ⅴ—Ⅷ）有公元10世纪的阿拉伯译本，卷Ⅷ已失传，该书有拉丁文、阿拉伯文、英文、法文和德文等多种文本。我们的汉译本是采用近期美国的三部英文译本作为底本进行翻译的，它们分别是：

悦爱托利弗 (悦爱) 曾栽培过胡蝶的《粤界星史》(李平书译) 和《月界译原》(原三) 摇圆年 月 日 绿狮出版社) 出版;

馮景来德(馮)景来是云韻的《粵語聲韻學》(廣州:暨大出版社, 1987年)出版;

则图默(则援裁署)的《粤省县志》(马季悦、王月辉译,原)》(2009年,施普林格出版社)出版。

[美] 绿狮出版社 1964 年出版的《粤英辞典》(原 III) 是 1940 年大不列颠百科全书出版社出版的托利弗所译《粤英辞典》的修订版, 这本书采用了一定的数学符号和缩写式, 并在第 I 卷前一页有“对本书所用的缩写式和符号的说明”, 在修订本中将此内容略去了, 我们为了使读者阅读方便, 还是把它添加在卷 I 的前一页。另外, 我们没有采用原英文译本中图形翻页再出现的方式, 而是采用图形在命题中只出现一次。

[美] 绿狮出版社 1940 年出版的由 配瑟珠莱德所译的第 IV 卷，

命题的证明是用文字叙述的,我们为了与前三卷统一,方便读者阅读,将该卷也依前三卷的方式(使用了数学符号和缩写式)进行了改写援

[美]施普林格 1989 年出版的卷 V 原 VII 是阿拉伯文与英文对照的译本,它也引进了数学符号和缩写式,汉译本将只依据英译的内容援

汉译本阿波罗尼奥斯《圆锥曲线论》分两册出版,前四卷合为一册,后三卷合为一册援

二、阿波罗尼奥斯写作的时代背景

在阿波罗尼奥斯之前,圆锥曲线的研究已有一百多年的历史,它是为解决三大几何作图问题之一——“倍立方”而引起的援希波克拉底(与亚里士多德同时,约公元前 430 年前后)指出倍立方问题可以归结为求线段 a 与 b 之间的两个等比中项.这是因为,若设其中比例中项为 x, y ,则有

$$a : x = x : y = y : b,$$

可得

$$x^2 = ay, y^2 = bx,$$

于是有 $xy = \sqrt{ab}$, 以及 $x^3 = a^2y = \sqrt{a^3b}$ 或 $x^3 = \sqrt{ab^3}$.

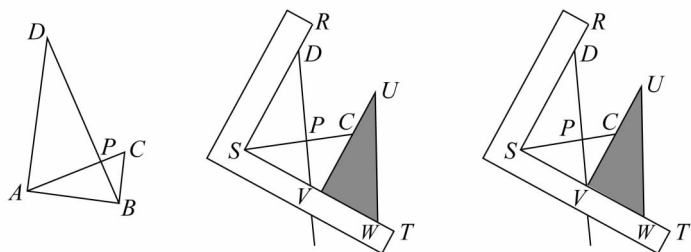
如果 a 是已知立方体的边长,那么 x 便是所求立方体的边长.

为此,有人利用两个直角三角形或木工用的直角拐尺去实现它.

对于两个直角三角形 ABC 和 ABD , $\angle ABC$ 和 $\angle DAB$ 都是直角,且 AC 与 BD 垂直相交于 P ,若 $\triangle CPB$ 、 $\triangle BPA$ 和 $\triangle APD$ 彼此相似,得知

$$PB : PC = PC : PA = PA : PD$$

因此, PB 和 PA 是 PC 和 PD 的两个比例中项.从而,如果能从一个图形,使 PD 过 C ,问题就解决了.可以考虑作两条交于 P 的垂
猿



线,使 PC 越 u , PD 越 u ,然后在图形上放上木工用的直角拐尺,其内边为 RST ,使得 SR 过点 D ,并且直角顶 S 处于 CP 的延长线上.让直角三角形 UVW 的直角边 VW 在 ST 上滑动,而直角边 VU 过 C 点.最后调整两工具的位置,使 V 落在 DP 的延长线上^①, PV 就为之所求.

这种“机械的作图”没有遵从欧几里得尺规的限制,我们知道它最终证明不可能只用圆规、直尺求解。^②

根据欧托基奥斯(约公元 源00 的记载, 门奈赫莫斯(约公元前 源世纪中叶) 曾用两种方法 : (i) 找出曲线 $x^2 = ay$ 和 $y^2 = bx$ 的交点 ; (ii) 找出曲线 $y^2 = bx$ 和 $xy = c$ 的交点. 找出其两个线段之间的两个等比中项, 他发现了圆锥曲线, 解决了“倍立方”问题.

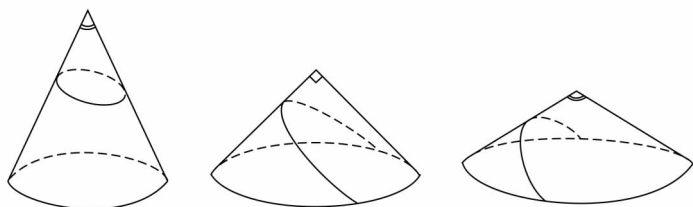
门奈赫莫斯如何通过圆锥的截线而得到圆锥截线的性质,以及它们的作图,这是数学史家们关心的问题.但是他的方法已失传,所以后人就只能根据一些史料来进行分析.

根据盖米诺斯(即陈望译)公元前400年的记载,古代数学家用旋转直角三角形(围绕着一不动的直角边)来产生圆锥面的,不动的

① 数学史概论(修订本) 援[美] 勾瑟夫斯著, 欧阳降译 山西经济出版社 援
员特册 援

② 公元前 480 年，古希腊数学家希波克拉底首先证明了倍立方和三等分任意角不可能只用尺规作图。

直角边叫做轴,斜边叫做母线.通过轴的平面与圆锥面相交所成的三角形叫做轴三角形.视轴三角形的顶角为锐角、直角或钝角,分别称圆锥为“锐角圆锥”、“直角圆锥”或“钝角圆锥”.门奈赫莫斯用垂直于一条母线的平面去截这三种锥面,得到三种不同的截线:“锐角圆锥截线”(即椭圆)、“直角圆锥截线”(即抛物线)和“钝角圆锥截线”(即双曲线的一支)①.如图.

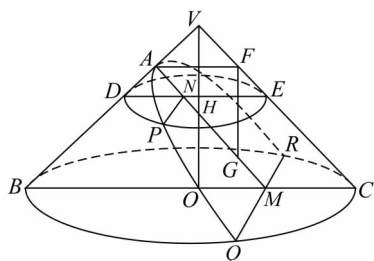


对于这三种圆锥截线的性质,可用几何证明而得到.

现证明直角圆锥截线的性质.

设直角圆锥的轴三角形

VBC 是等腰直角三角形,顶角 V 是直角,过母线 VB 上一点 A 用垂直于 VB 的平面圆锥面,其交线 QAR 为直角圆锥截线.



过交线 QAR 上任一点 P 作平面垂直于轴 VO ,它与轴截面 VBC 交于 DE ,与圆锥交于以 DE 为直径的圆 DPE ,由于平面 DPE 和 AQR 均垂直于平面 BVC ,故交线 $PN \perp DE$. 于是

$$NP^2 = DN \cdot NE.$$

① 世界数学通史(上册) 梁宗巨著 辽宁教育出版社, 1985年出版, 费理原
圆稿

作 $AF \parallel DE, FG \perp DE$, 如图.

因为 $\triangle AFG \sim \triangle NAD$,

于是 $FA \cdot ND = AG \cdot AN$,

又 $NE = AF$,

于是 $NP^{\square} = DN \cdot NE = DN \cdot AF = AG \cdot AN$.

摇摇记 $NP = y$, AG 是与点 A 位置有关的定线段记为 b . 于是上式可写为

$$y^{\square} = bx.$$

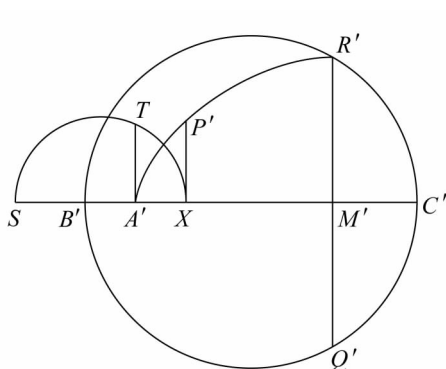
摇摇用解析几何的说法便是: 曲线上任意一点的纵坐标的平方等于相应的横坐标乘上一个正数 (正焦距), 这正是抛物线的性质.

若设 VA 越 u , 那么 AG 越 $\frac{1}{2} \sqrt{VA^2 + 4b^2}$. 这样就得到

$$y^{\square} = \frac{1}{4} x,$$

这也正是解决“倍立方”问题所需的曲线之一.

该直角圆锥截线的作图.



利用前面图形以及直角圆锥截线的性质可以作出它的图形, 作图如下:

员作 $B'C'$ 越 BC , 以 $B'C'$ 为直径作图;

圆在 $B'C'$ 上取一点 M' , 使 $M'C' \propto MC \propto \sqrt{a}$;

猿过 M' 作 $Q'R' \perp B'C'$, 且交圆于 Q', R' , (显然 $Q'R' \propto QR$);

源在 $B'C'$ 上取一点 A' , 使 $A'M' \propto AM$;

缘在 $A'B'$ 的直线上取一点 S , 使 $SA' \propto \sqrt{a}$;

远在 $A'M'$ 上取一点 X , 以 SX 为直径画圆与过 A' 作垂直于 SX 的垂线交于点 T (显然 $A'T \propto SA' \cdot A'X \propto \sqrt{a} \cdot A'X$);

苑作 $XP' \parallel A'T$, 则 P' 为截线上一点;

愿在 $A'M'$ 上取不同的点, 同样由“远”和“苑”就得到截线上不同的点, 这些点连接起来, 就得到直角圆锥截线的图形 (其另一半可对称作出).

若设 $A'X \propto x$, $XP' \propto y$ 就得到直角圆锥截线具有性质 $y \propto \sqrt{a}x$ 的图形.

若取 $VA \propto \frac{a}{\sqrt{a}}$, 类似地, 可作出直角圆锥截线具有性质 $x \propto \sqrt{a}y$ 的图形.

若设有横、竖交于点 O 的直线, 从点 O 向横、竖直线分别作截线具有性质 $y \propto \sqrt{a}x$ 和 $x \propto \sqrt{a}y$ 的图形. 设交点为 P , 则线段 OP 在横、竖直线上的垂直射影 OX 和 OY 就是所求的 a 与 $\sqrt{a}$ 之间的两个比例中项, OX 就是所求立方体的边长, 这样依(i)就解决了“倍立方”问题.

若作以线段 a 和 $\sqrt{a}$ 为两直角边的三角形, 设 $\sqrt{a}$ 所对的角为 φ , 取一个钝角为 $\sqrt{a}$ 的钝角圆锥, 在其一母线上取一点到顶点的距离为 $\sqrt{a}$, 过该点垂直于该母线的平面与该钝角圆锥面的交线为一钝角圆锥截线 Γ , 则钝角圆锥截线 Γ 具有性质:

$$xy = \sqrt{a}.$$

其中 x, y 为该钝角圆锥截线 Γ 上一点到钝角圆锥截线 Γ 的渐近线

的距离^①。这样,也可以由(ii)解决“倍立方”问题。

到公元前 3 世纪末,已有两本涉及圆锥曲线的论著,它们分别是阿里斯泰奥斯的五卷本《立体轨迹》(杂著)和欧几里得的四卷本《圆锥曲线论》,这两本著作已失传,而阿基米德有关圆锥截线的研究却保留了下来。^②

阿基米德在他的《劈锥曲面体与旋转椭圆体》中证明任一椭圆都可看作一个圆锥的截线,该圆锥不一定是直圆锥,其顶点的选择有很大的任意性。阿基米德还知道,与斜圆锥的所有母线都相交的平面可在其上截出椭圆。但是,阿波罗尼奥斯是第一个根据同一个(直的或斜的)圆锥被各种位置的截面所截来研究圆锥截线系统理论的人,也是第一个发现双曲线有两支的人。他在前人的基础上把圆锥截线研究得既全面又深入,他的《圆锥曲线论》是古希腊继《几何原本》、《阿基米德著作》之后又一部经典的著作,他被称为是当代的“伟大的几何学家”。

欧几里得、阿基米德和阿波罗尼奥斯合称为亚历山大前期的三大数学家。

阿波罗尼奥斯从一个一般圆锥面(斜的或直的)上用平面截得三种曲线,他称其为齐曲线、超曲线和亏曲线^③;同时在对顶的两个圆锥面上截得两个曲线(即两个超曲线)称为二相对截线,它们分别是抛物线、双曲线的一支、椭圆和双曲线。在汉文译本阿波罗尼奥斯《圆锥曲线论》正文中,圆锥截线的名称采用了阿波罗尼奥斯的命

① 见本书“汉译者附录”援

② 见《阿基米德全集》援援希思编,朱恩宽,李文铭等译,叶彦润,常心怡等校援陕西科学技术出版社,愿愿愿愿

③ 见[美]莫利斯·克莱因著《古今数学思想》中译本(第二版)援张理京,张锦英译援上海科学技术出版社,愿愿愿愿

名,这是因为一方面它是历史的真实反映,另一方面也是该书理论体系的需要.

三、《圆锥曲线论》的内容概述

卷 I 有两组共 15 个定义和 18 个命题. 它包含了三种截线和二相对截线的形成和它们的主要性质.

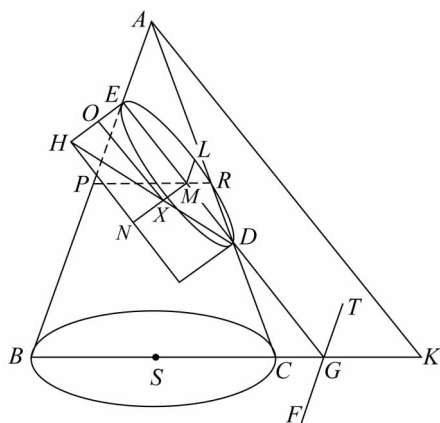
在定义 1 中给出了圆锥曲面的定义. 如果从一点到一个与它不在同一平面内的圆的圆周连一直线, 这直线向两个方向延长, 又若这个点保持固定, 而这直线沿着这个圆的圆周旋转, 直到它回到开始的位置, 于是形成一个由两个对顶的锥面组成的曲面. 当这两个锥面的每一支随着生成直线的无限延长都将无限地延展扩大, 我们称这一曲面为圆锥曲面, 这个固定点称为顶点, 从顶点到这个圆的圆心连成的直线称为轴, 该圆称为圆锥的底.

在首批 15 个定义后, 有 18 个预备命题. 其中命题 1 证明了圆锥截线平行弦中点的连线在一直线上, 该直线叫作圆锥截线的直径. 命题 15 给出了一个平面在圆锥曲面一支上截得的三种截线, 即齐曲线 (抛物线)、超曲线 (双曲线的一支)、亏曲线 (椭圆) 以及一个平面同时在圆锥曲面对顶二支上截得的二相对截线 (双曲线), 并给出了它们的基本性质.

阿波罗尼奥斯把截线为圆的图形, 看作是不同于前三种截线的另一种截线, 显然平行于圆锥底的平面在圆锥面上截得一个圆 (I. 源). 另外, 若一平面垂直于过圆锥轴且垂直于底面的平面, 而且该平面在轴三角形上截出一个与其反相似的三角形, 则该平面在圆锥面上也截得一个圆 (I. 缘, 该平面叫做底平面的反位面. 仅此而已 (I. 怨).

现在我们从命题 15 (即 I. 15) 来了解阿波罗尼奥斯证明该命题的思路.

设有以 A 为顶点,以 S 为圆心的圆为底的斜圆锥,任作一个不过圆锥顶点、不平行于圆锥底面、也不是底面的反位面且与圆锥所有母线都相交的平面.它与圆锥交出一个封闭的图形,设它与圆锥底交于直线 TF .过圆心 S 作直线垂直于 TF ,交圆于 $B、C$,交 TF 于 G .设轴三角形 ABC 与截线交于 $E、D$.且 ED 为该截线的直径 (I. 选).



在圆锥截线上任取一点 L ,作 $ML \parallel GF$,交 ED 于 M ,过 M 作 $PR \parallel BC$,则 PR 与 ML 所确定的平面与底平面平行 (I. 选).因此它与圆锥面的交线是一圆 (图中未画出). $P、L$ 和 R 是该圆上的点,且 PR 是直径,而 $ML \perp PR$.

于是 $\triangle ABC \sim \triangle PQR$ (圆)

在轴三角形平面内作 $AK \parallel EG$,交 BC 的延长线于 K .

因为 $\triangle ABC \sim \triangle PQR$

故有 $\frac{AB}{BC} = \frac{PQ}{QR}$ (圆)

又 $\triangle ABC \sim \triangle PQR$

所以 $\frac{AB}{BC} = \frac{PQ}{QR}$ (圆)

(圆)、(圆) 两式左右相乘,得

$\frac{AB \cdot PQ}{BC \cdot QR} = \frac{PQ \cdot QR}{QR \cdot QR}$ (圆)

摇摇于是圆锥及截平面给定后, ED 即已被确定,且 (圆) 的右端也是圆

常数,证 ED 越圆,设 p 满足 $\frac{BK \cdot KC}{AK^2}$ 越 $\frac{p}{\text{圆}}$,则 p 也是常数,

设 EM 越 x , ML 越 y ,由 (员), (缘)式可写成

$$y^{\text{圆}} = \frac{p}{\text{圆}} \cdot x (\text{圆} - x). \quad (\text{缘})$$

摇摇过 E 作 $EH \perp EG$,使 EH 越 p ,联结 DH ,作 $MN \parallel EH$,交 HD 于 X ,作 $XO \perp EH$,于是在 $\triangle EHD$ 中有

$$\frac{EO}{EH} = \frac{MX}{EH} = \frac{MD}{ED} = \frac{\text{圆} - x}{\text{圆}},$$

即
$$EO = \frac{p}{\text{圆}} (\text{圆} - x),$$

代入 (缘),
$$y^{\text{圆}} = EO \cdot x. \quad (\text{远})$$

又因为
$$\triangle HOX \sim \triangle HED,$$

于是
$$\frac{OH}{OX} = \frac{EH}{ED} = \frac{p}{\text{圆}} \quad (\text{苑})$$

(远)、(苑)代入 (缘),就有

$$y^{\text{圆}} = EO \cdot x = px - \frac{p}{\text{圆}} \cdot x \cdot x = px - \frac{OH}{OX} \cdot x \cdot x,$$

或
$$y^{\text{圆}} = EO \cdot x = p \cdot x - OH \cdot x. \quad (\text{愿})$$

摇摇直径 ED 上的线段 EM (x) 与对应的半弦 ML (y) 分别叫做横线 (横坐标) 和纵线 (纵坐标) ①,而参量 (常数) p 叫做截线的竖直线 (竖坐标), ED (圆) 叫做横截直径 (横坐标轴), EG 叫做纵轴 (纵坐标轴).

阿波罗尼奥斯得到了该曲线的基本性质 (缘) 或 (愿). 即以横线

① 横坐标 (横坐标) 纵线,纵坐标 (纵坐标) 横线.《英汉模範字典 (增订本)》,商务印书馆,1957年.

横线和纵线在坐标系产生后,分别演变为横坐标和纵坐标,竖直线现称正焦弦 (横坐标轴).

(图) 为一边作矩形(图)的“贴合”^①到竖直边(EH)上去,使其面积等于纵线(ML)上正方形(ML²),且此矩形(EMXO)比以横线(EM)和竖直边(EH)所夹的矩形(EMNH)缺少一个与横截直径(ED)和竖直边(P)所夹的矩形相似的矩形(OXNH).

由于等于纵线上正方形的矩形另一边EO小于竖直边EH,阿波罗尼奥斯把该截线称为亏曲线(图),也就是现在所称为椭圆的曲线.

I. 图是截平面与圆锥的一条母线平行,而从圆锥上截得的截线为

$$y^{\text{圆}} = px. \quad (\text{图})$$

摇摇此截线性质为以横线为一边作矩形贴合到竖直边上去,使其面积等于纵线上正方形,而此矩形的另一边与竖直边重合(相等).阿波罗尼奥斯把该截线称为齐曲线(图),即现在所称的抛物线.

I. 图是截平面与圆锥曲面的两支都相交,且和底圆相交,而从该圆锥面上截得的截线为

$$y^{\text{圆}} = px + \frac{p}{\text{圆}} x^{\text{圆}}. \quad (\text{图})$$

此截线性质为,以横线为一边作矩形贴合到竖直边上去,使其面积等于对应的纵线上正方形,且此矩形比以横线和竖直边所夹的矩形超出一个与横截直径和竖直边所夹的矩形相似的矩形,由于所得矩形的另一边大于竖直边,阿波罗尼奥斯把该截线称为超曲线(图).

① 所谓把一图形贴合到某一线段上,且满足某些条件就是在已知线段上作出符合这些条件的图形,且使其图形的一边在已知线段上,并且有同一点援这是欧几里得常用的作图方法,如求作平行四边形,贴合到已知线段上去,使其满足某种条件(如有一角等于已知角,或与某图形相似),且面积等于已知面积(图 图 VI 图 等) 援