

# 有效教学——小学数学教学中的问题与对策

刘娟娟 著

东北师范大学出版社

- 责任编辑:杨述春
- 责任校对:刘晓军
- 封面设计:宋 超
- 责任印制:张允豪

---

### 图书在版编目(CIP)数据

有效教学——小学数学教学中的问题与对策/刘娟娟著.  
长春:东北师范大学出版社,2005.7  
ISBN 7 - 5602 - 4332 - 0

I. 小学... II. 刘... III. 数学课—教学研究—小学  
IV. G2956

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2005)第 085838 号

---

---

东北师范大学出版社出版发行  
长春市人民大街 5268 号(130024)  
电话:0431—5687213  
传真:0431—5691969  
网址:<http://www.nenup.com>  
电子函件:[sdcbs@mail.jl.cn](mailto:sdcbs@mail.jl.cn)

---

东北师范大学出版社激光照排中心制版  
长春新华印刷厂印装  
长春市吉林大路 35 号(130031)  
2005 年 11 月第 1 版 2005 年 11 月第 1 次印刷

---

幅面尺寸:170 mm×227 mm 印张:14.75 字数:274 千  
印数:0 001 — 5 000 册

---

定价:16.00 元

如发现印装质量问题,影响阅读,可直接与承印厂联系调换



# 前 言

## introduction

教师是一种职业,任何一个从业人员必须首先了解和掌握的是自己职业对象的特征,就小学教师而言,对6—12岁儿童的了解程度决定了他能否成为一名合格的教师。

新课程改革带给教师最大的影响之一是培养了教师的自我反思意识。但教师自我反思的中心却往往落脚于课堂教学环节,期待自己的教学节奏如行云流水,行乎其当行,止乎其当止;课堂教学结构安排主副相宜,难易相配,动静相宜;教学方法举重若轻,游刃有余,使学生如沐春风,如饮甘露,怡然自得。然而当反思的出发点是教师知识储备、教学内容和教学方法时,有可能我们离自己的期望渐行渐远,因为,教学的中心是学生。

陶行知先生曾言:教师不能“拿学生来凑他的教法,配他的教材”,只让学生坐而受教,而应该主动了解学生,改进教学方法。“好的先生不是教书,不是教学生,乃是教学生学,而教的法子也必须根据学的法子,就是把教和学联系起来,即要教学合一。”

教师的首要任务是了解教学对象是谁。6—12岁年龄段的孩子是积极、主动发展中的人。然而在很多教师和家长看来,“孩子是一个总会出错的、总要被照顾的、被指导的人,是没有独立生存与判别能力的、不谙世事、必须借助外界力量去加以雕琢、塑造的人”。出于这样的理解,他们在孩子面前表现出强烈的“成人感”。在现实的师生互动中,教师往往遵循成人世界的规范。他们与孩子进行互动的目的是把既定的教育计划、教育方案贯彻下去。他们最为关注的事情是怎样把孩子“打磨”好,并不是真正地深入到孩子的世界,从孩子的视角去看世界。因而,教师和家长往往很难理解孩子们为什么会有那么多与教育目的相违背的表现。出于这样的目的,教师在教育实践中,经常性地借助教育制度所赋予的权力、借助于互动中所建构起来的不容置疑的权威,按照成人世界的标准控制学生的活动,规范学生的行为。

然而,孩子终究是孩子,他们有他们的处世原则、行为理由,他们有着他们自己特殊的需要和独特发展方式。课堂上的孩子应该是非常活跃的学习者,而不是被动的聆听者,应该让他们自由地表述自己,提出自己的见解,哪怕是幼稚的不成熟的。孩子的天性是好奇的、武断的、有创造性的,但同时他们又是服从的、好模仿的和准备求助的。教师一味以“成人模式”去评价和要求,只会挫伤孩子的身心。如果教师能多

观察一下孩子的行为,多关注一下孩子的体验,而不是只是从事务性的角度发出简单的指令,或许我们的教育会是另一种面貌,理想的素质教育会更容易实现。

教师的成人眼光与学生的儿童视角差别是课堂教学问题的主要根源。在很多教师的课堂上,安排了丰富的教学内容,采取了多样化的教学方法,但是教学效果却不理想,原因在于教学的立足点是成人的思维系统,而不是儿童的发展需求。因此,我们期待从学生的眼光、学生的发展需求来看待和分析教学中的问题,并提供教师解决问题的策略。这是我们编写这几本书的理论视角。

《有效教学——小学数学教学中的问题与对策》一书,以当前新课程改革背景下小学数学教学内容的四个领域:数与代数、空间与图形、统计与概率和实践与综合运用为基本着眼点,分别探讨了在教学这些内容的过程中出现的问题,以及解决这些问题的理论依据和具体策略。在书中,作者力求做到把理论分析和实际问题联系起来,深入浅出地分析和解决问题,并精心挑选了一些好的案例,以期给读者更多的启发。

《有效教学——小学英语教学中的问题与对策》一书,以新英语课程标准所倡导的基本理念为探索平台,紧紧围绕小学英语课程语言知识、语言技能、情感态度、学习策略和文化意识五个方面的教学目标,就语音、词汇、语法和会话能力等知识领域出现的问题有针对性地进行理论分析和实践探索,通过正反案例的对照分析提出了建设性的对策和解决方法。

《有效教学——小学语文教学中的问题与对策》一书,依据一线教师的关注程度和需要进行问题提炼的。问题的来源涉及四个板块,识字写字教学、阅读教学、作文教学、口语交际教学。其中以阅读教学为主,力求在课内阅读教学、多媒体影响下的阅读教学、阅读教学的评价、课外阅读教学等方面选取带有典型性的问题。口语交际部分因考虑到其理论形态还不够成熟,且教学实践中的问题和理论的滞后有极大关系,因此本部分侧重在口语交际的理论研究上。识字写字部分因理论和实践相对成熟,问题涉及的不多,主要集中在教学理念的启发上。写作部分分量小,教学实践中重视不够,搜集一线的问题和案例较难,因此问题多从理念和试图建设的角度入手提出的。

本套书的价值在于提出了值得教师思考的问题,并从不同的角度分析这些问题产生的原因,给出了解决问题的思路,期望读者自己在阅读过程中获得解决问题的策略和方法。当然,囿于理论深度不够和教学经验的欠缺,我们离这一理想目标还有一段距离,恳请读者能提出宝贵意见,以便于我们能做得更好。

彭小虎

2005年10月



序

preface

教师培训工作做久了,我们的困惑反而多了起来。一线的教师需要的往往是行动的具体程序,即“谁能告诉我怎么做”而教育理论工作者常常是难以做到。教育教学理论与教学实际工作真的是两回事吗?我认为这是因为在传统的研究模式中,理论与实践往往事分离的,研究者与实践者也是分离的。研究活动的主体是专家,场所是大学的研究所或是书斋,他们的成果表现为艰深的学术论文和著作,而教学实践的主体是一线教师,场所主要是中小学的课堂,成果表现为成文或未成文的经验。研究者对中小学是一种“俯视”,实践者视研究为神圣,是一种“仰视”。这样的两张皮使得研究者的成果不能有效解决实践者的具体问题,而实践者的理论水平的提高也受到制约。

愈来愈多的批评使我们认识到,从本质上看,教育理论主要是一种经验理论,离开经验的学习或研究,不应该是一种成功的方式。

南京晓庄学院初等教育研究所所长彭小虎博士用自己的行动改变了这种状况,他带领教育科学学院的几位老师,深入到分布在全市的十多所小学去,寻找研究课题,进行专题合作研究,采集了丰富的案例。他们从开始的“冷遇”到最后的“热忱欢迎”,经历了学习、探索、研究的种种磨练,取得了“真经”。展现在读者面前的《小学教师专业成长——从新手到专家》、《有效教学——小学语文教学中的问题与对策》、《有效教学——小学数学教学中的问题与对策》、《有效教学——小学英语教学中的问题与对策》四本书,就是这几年配合新课改的研究成果。

我读了这四本书,感到耳目一新,又十分欣慰。这四本书不但可以做在职教师的培训、学习之用,而且可以给在校的师范生参考对于师资队伍的培养是一个贡献。人们在这四本书里,不单纯是学会怎么做,而且理解为什么这么做,如果学了以后再去做,在做中学,学中做,那就不但是掌握了教育的技能,而且提升了教育理念,可以举一反三,这不就是学习教育理论的真谛,不就是陶行知先生所提倡的“教学做合一”吗?

作为一名老的教师教育工作者,我感到释然,因为他们用实践回答了教师教育脱离实际的令人困惑的问题。他们为师范院校从事学科课程与教学论的老师们树

立了一个榜样。那就是走到第一线去,让理论与实践结合起来,这样的路子,才是师范院校改革的路子,而这样的理论也才能生根在实践的土壤之中,不断地汲取营养,成长起来。

应彭小虎博士之邀,欣然命笔,祝贺他们的成功,希望他们继续进步。

王泽农

2005年7月12日

## 目 录

## contents

## 第

## 1

## 章

## 数与代数教学中的问题及解决策略的选择

## 1

## ▶▶ 第一节 数学是什么? /2

·一些困惑 2 ·教学分析 3 数学:多元的复合体 /3 两种不同的数学观 /5 学校数学与数学科学 /6 ·教学建议 6 正确认识数学中的规定 /6 了解数学史 /8 领会数学中的思想方法 /10

## ▶▶ 第二节 老师,我的想法有道理吗? /10

·请你再仔细地想一想! 11 ·老师,我不是胡闹! 11 ·教学分析 12 以学生为主体的思想 /12 教师是学生学习的促进者 /13 课堂:师生平等地对话 /14 数感与直觉 /15 ·教学建议 17 尊重学生是前提 /17 善于发现学生的闪光点 /17 注重课堂生成 /18 做有知识的教师 /18 ·可以借鉴的例子 18 重视学生的提问 /18 老师被考是好事 /19

## ▶▶ 第三节 “接受”? 还是“发现”? /20

·知识一定要让学生发现吗? 20 ·教学分析 21 接受学习与发现学习 /21 有意义学习 /22 寻找中间地带 /23 重视学生的参与 /24 ·教学建议 24 启发式教学 /25 鼓励学生再创造 /25 让学生学会观察 /25 给学生机会质疑 /26 ·可以借鉴的例子 26 《乘法初步认识》的两种不同教法 /26 《分数化为小数》教学片断 /27

## ▶▶ 第四节 还有其它方法吗? /28

·就用你喜欢的方法来做吧! 28 ·还有其它方法吗? 29 ·教学分析 30 算法和算法多样化 /30 算法多样化与学生发展 /31 多样化和优化 /32 ·教学建议 33 创设情境,自主探索 /33 算法交流,分析比较 /34 沟通优化,促进发展 /35 联系实际,灵活应用 /35 ·可以借鉴的例子 35 你的办法与他不同在哪里? /35

## ▶▶ 第五节 估算,怎样为好? /37

·“59×41”估算为“2460”,行吗? 37 ·教学分析 38 精算与估算 /38 估算能力发展早于精算能力 /39 估算与数感 /40 估算与解决问题 /40 ·教学建议 42 创设情境,激发估算的欲望 /42 鼓励估算方法多样化 /42 加强估算的准确性 /43 培养估算的习惯 /44 ·可以借鉴的例子 44 《除法估算》案例 /44 值得进一步思考的问题 /45

## ▶▶ 第六节 如何把握教学的起点? /46

·老师,我已经会了! 46 ·教学分析 46 学生的已有知识经验 /47 认知发展水平 /48

已经具备的技能 and 能力 /49 情感态度方面的基础 /50 ·教学建议 51 了解你的学生 /51  
注重课堂反馈信息 /53 ·可以借鉴的例子 53 《分数的意义》教学片断 /53 《7的乘法  
口诀》教学片断 /55

## 第七节 复习:单纯回忆还是鼓励创造? /56

·这样的复习必要吗? 56 ·教学分析 57 复习有助于记忆 /57 复习有助于认知结构的  
建立 /58 复习与再创造 /59 ·教学建议 60 创设情境,再现知识 /60 归纳整理,实施  
创造 /60 重点复习,突破重难点 /60 解决问题,整体提高 /60 ·可以借鉴的例子 61  
《100以内加减法的复习与整理》教学片断 /61

# 第 2 章

## 空间与图形教学中的问题及解决策略的选择

64

### 第一节 数学生活化? 还是生活数学化? /64

·操场上的数学课 65 ·射线就是射出去的线吗? 65 ·教学分析 66 数学教学要贴  
近生活 /66 数学源于生活,高于生活 /67 生活数学化 /68 日常数学与学校数学 /69  
·教学建议 71 重视儿童的生活经验 /71 注重数学模型的建立 /71 培养学生应用  
数学的意识和能力 /72 可以借鉴的例子 73 《圆的认识》的教学案例 /73 《归一问  
题》的教学片断 /76

### 第二节 电脑和黑板,你选择谁? /77

·电脑中没有的方法就不是好方法? 78 ·所有的问题都是电脑提出的! 78 ·“直观”也  
尴尬 /78 ·遭遇“突然” /79 ·教学分析 79 预设与生成 /79 多媒体与学生学习 /80  
多媒体不能替代教师 /81 多媒体与板书 /81 ·教学建议 82 更新教育理念 /82  
根据教学内容合理选择多媒体 /82 ·可以借鉴的例子 83 精彩板书设计 /83 多种手  
段结合使用的案例 /84

### 第三节 情境创设=“数学问题”+“生活情境”? /86

·这样的情境合适吗? 86 ·教学分析 87 建构主义和教学情境 /87 问题情境 /88  
让学生数学地思考 /90 ·教学建议 91 情境创设要有童趣,也要合理 /91 情境创设  
要务实,具有实效性 /91 情境创设要具有挑战性,也要符合学生认知水平 /93 ·可以借  
鉴的例子 93 《质数和合数》教学片断 /93 《循环小数》的教学情境 /94

### 第四节 课堂,该给学生多大的空间? /95

·一样的课不一样的上法! 95 ·教学分析 96 儿童思维发展动力 /96 摘桃子原理 /97  
有空间,才有创造 /98 给学生充足的时间 /98 课堂提问 /99 开放性问题 /99 ·教  
学建议 99 提高课堂提问的质量 /99 进行开放式教学 /100 ·可以借鉴的例子 105

《分数的初步认识》教学片断 /105

## 第五节 怎样揭示数学的思想方法? /108

·《圆的周长》教学案例 108 ·教学分析 110 化曲为直 /110 类比推理 /111 归纳推理和演绎推理 /111 猜想—验证 /112 符号化思想 /112 ·教学建议 117 了解数学思想方法的价值 /112 深入挖掘教材中隐含的数学思想方法 /114 教学生猜想 /114 ·可以借鉴的例子 117 《圆柱体的认识》的教学片断 /117

## 第六节 该怎样表达为好? /118

·谁的表达更准确? 118 ·一个值得怀疑的命题 119 ·教学分析 120 数学语言 /120 数学语言与数学学习 /122 数学教学语言 /123 ·教学建议 125 加强数学语言中特定词汇的理解 /125 加强自然语言与数学语言之间的转换训练 /125 加强数学符号语言的教学 /126 加强数学阅读指导 /126 可以借鉴的例子 126 《轴对称图形》教学片断 /126

# 第 3 章 统计与概率教学中的问题及解决策略的选择

131

## 第一节 “可能性”就是“概率”吗? /131

·“妈妈明天一定给我买新书包”是确定现象吗? 132 为什么连续六次都摸到白球? 132 ·教学分析 132 可能性与概率 /132 必然现象与随机现象 /133 学生学习概率时可能遇到的困难 /135 ·教学建议 135 教学中要注重联系 /136 教学中要注重实践 /137 要注重推理 /138

## 第二节 教学中需要怎样的活动? /138

·《抛硬币》的教学案例 138 ·教学分析 141 活动是学生数学学习的需要 /141 数学教学是数学活动的教学 /142 做数学的理念 /143 让数学活动保持高水平 /143 过程和结果 /144 ·教学建议 145 数学活动设计要符合儿童认知规律 /145 数学活动要促进教学目标的实现 /145 数学活动要有“数学味” /146 数学活动应明确方式 /146 ·可以借鉴的例子 146 《可能性》教学片断 /146

## 第三节 怎样的合作才有效? /148

·“合作”成了“合座”? 148 关注了小组,忽视了个人 149 关注结果,忽视合作过程 149 ·教学分析 149 学生发展需要合作 /149 合作与自主 /150 数学学习需要合作 /150 ·教学建议 151 建立有效的小组 /151 把握合作的时机 /152 教会学生如何去合作 /153 注重过程性评价 /154 ·可以借鉴的例子 155 《统计的初步知识》教学片断 /155 值得进一步思考的问题 /155

## 第四节 统计课,你学到了什么? /155

·你学习了什么? 156 ·你是怎么学会的? 156 ·都懂了吗? 156 ·教学分析 156

统计:过程和策略/156 课堂小结/158 反思性学习/158 问题意识/159 ·教学建议 160 注重统计观念的形成/160 多角度进行课堂小结/161 教学生学会反思/162 ·可以借鉴的例子 165 一年级“统计”教学片断/165

## 第

## 4

## 章

## 实践与综合应用等问题及解决策略的选择

168

## ▶▶▶ 第一节 实践活动,让学生学些什么? /168

·实践活动之“假日小队” 169 ·教学分析 170 过程性知识/170 实践活动与学生发展/171 实践活动与解决问题/172 重视对过程的评价/173 ·教学建议 173 实践活动应该以探索为主线/173 实践活动要密切联系学生的生活实际/174 强调与综合应用相联系/174 让形式多样的活动贯穿于实践课的始终/174 ·可以借鉴的例子 177 《有趣的拼搭》实践活动/177

## ▶▶▶ 第二节 教“应用”,还是教“题”? /180

·教学生“应用”,还是教学生“题”? 180 ·教学分析 181 传统应用题教学的利弊谈/181 应用题教学要促进学生发展/183 ·应用题与解决问题/184 问题解决的学习/185 ·教学建议 185 改进应用题的设计和呈现方式/186 改进应用题的教学过程/188 重视回顾与反思/189 ·可以借鉴的例子 190 《归一应用题》的教学案例/190

## ▶▶▶ 第三节 如何正确地评价你的学生? /192

·嗨、嗨、嗨,你真棒! 192 ·差不多吧…… 192 ·教学分析 193 学生需要教师的评价/193 评价可以促进教学/194 多元智能理论/194 评价方式/195 评价策略 195 教学评价原则/196 教师评价学生的方法/196 学生自我评价的方法/198 可以借鉴的例子 200 特级教师李烈的做法/200 《圆柱的体积》课堂教学评价/201

## ▶▶▶ 第四节 良好习惯还要不要? /202

·一次小小的争论 202 ·课堂中的一些现象 203 ·相关分析 203 习惯要从小培养/203 习惯促使成功/204 养成教育/205 ·教学建议 205 听的习惯/206 做的习惯/206 思考的习惯 207 问的习惯 208

## ▶▶▶ 第五节 学生出错,该怎么办? /208

·三个教学片断 209 ·教学分析 210 错误:课堂中正常的现象/210 错误:教学中重要的资源/210 错误:创新思想的起点/211 ·教学建议 212 尊重学生,允许学生出错/212 延迟判断,深入分析错误的原因/213 巧妙纠正错误,开启学生智慧/213 可以借鉴的例子 214 《化简比》教学片断/214

## ▶▶▶ 第六节 怎样看待教材? /215

·把教材用到底! 215 ·这节课,不用课本! 216 ·教学分析 216 从学生学习的角度看/216 从教师教学的角度分析/217 ·教学建议 218 钻研教材,用好教材中的每一个素材/218 创造性地使用教材/219 用好教材,培养学生数学阅读能力/221 ·可以借鉴的例子 222 《方程的认识》教学片断/222

# 第1章

DIYIZHANG

## 数与代数教学中的问题及 解决策略的选择

SHU YU DAISHU JIAOXUE ZHONG DE WENTI JI JIEJUE CELÜE DE XUANZE

小学阶段的“数与代数”的教学内容主要包括数与式、方程等，它们都是研究数量关系和变化规律的数学模型，可以帮助人们从数量关系的角度更准确、清晰地认识、描述和把握现实世界。具体涉及的数与计算等知识，是小学阶段学习乃至后继学习和生活的最基础的知识，一直是小学数学课程中的重要内容，有着非常重要的教育价值。因此相关教学也就显得十分重要。

在本章中，笔者重点讨论了七个当前热点问题，每个问题都试图说明一些观点，促进读者的反思。如“数学是什么”，这个问题确实很大，每个人都有自己的不同看法，笔者从实际问题入手，说明讨论这个问题的必要性，意在引发广大数学教师对自己的数学观进行反思，并提出了目前被广泛认可的看法。同时，就教学中如何体现正确的数学观，提出了一些可以努力的方向。在“老师，我的想法有道理吗”这个问题的讨论中，提出了教师在教学中应该如何正确地对待学生，以及建立怎样的教学观。而“接受，还是发现”旨在对当前改变学生学习方式的过程中存在的极端化、简单化的做法进行深入的思考，认为无论是接受，还是发现，都要使得学生的学习有意义，这样才能提高教学效率。“还有其他方法吗”和“估算，怎样为好”针对的是新课改以来的热点问题——“算法多样化”和“估算”教学中的问题。而“如何把握教学中的起点”既是老问题，也是新问题，在如今的教学中，教学起点的内涵又更加地丰富了。“复习：是单纯回忆还是鼓励创造”讨论的是教师教学中存在的、但是很多教师并没有重视的问题。通过该问题的讨论，希望教师能够对一些习惯了的教学方式进行新的思考。

以上这些问题都是以“数与代数”教学中的内容为载体的，虽然问题有大有小，但是每个问题都反映出了数学教学中的不同侧面，希望问题本身及其讨论能够引起读者的反思。

## ▶▶ 第一节 数学是什么？



### · 一些困惑 ·

在2002年国际数学家大会的少年数学论坛上，几个小孩子的问题颇让人感兴趣，一个小女孩说：“我来参加论坛就是为了知道什么是数学，为什么要学习数学。”的确，什么是数学？这是许多学生关注的问题，也是很多数学教师关注的问题。

笔者在网上也曾看到一位数学教师这样写道：“‘什么是数学’这个问题是不是很重要？我也不知如何回答。如果说它重要，许多教师会说，我说不出什么是数学，现在不也照样教数学吗，并且还能教好数学？如果说它不重要，但总感觉一名数学教师应该了解它。”

这是否是许多数学教师的心声呢？在《江苏教育》2003年第10期上，笔者注意到这样一篇文章，题目也叫做“数学是什么”<sup>①</sup>，在文章中作者以多个案例表达了自己对于“数学是什么”的困惑，现摘录一段有关数学“是客观，还是主观”的文字如下：

“圆周长的一半等于半圆的周长。”判断错误。可是，究竟什么是半圆呢？如果说圆是一条定点到定长的封闭曲线，那半圆不就是这曲线的一半，其周长不正好是圆周长的一半吗？把直径纳入进去形成半圆，不就承认圆是一个块而不是线了吗？可当我去翻开《数学大辞典》，书中明确告诉我：“半圆就是半条弧和直径所组成的图形。”我空欢喜一场。这个知识点其实是次要的，关键是我们花了那么长的时间，去让学生搞懂连自己也不懂的东西，其价值何在呢？

虽然上述内容存在着一些值得进一步商榷的地方，如“如果说圆是一条定点到定长的封闭曲线，那半圆不就是这曲线的一半”。“把直径纳入进(圆)去形成半圆，不就承认圆是一个块而不是线了”，这些都是真命题吗？但这些至少表现了教师是爱思考和善于求真的，对于许多问题喜欢追根问底的。

笔者多次听到老师们有类似这样的困惑，小学数学的知识确实很简单，但是越是简单，越是基础的东西，却越是难教。这里问题有两个方面，一是从数学本身来说，数学中有很多基础的东西是说不明白的，如什么是“点”、“线”、“面”，数学中都是不加定义的原始概念。二是从教学对象来说，小学生的理解能力比较弱，抽象思维也还待进一步发展，要想理解数学中众多抽象的概念的确也是困难的。

可是，作为一个数学教育工作者，如果连“数学是什么”都没有搞清楚，那还真有点说不过去，有点像在“自欺欺人”。但是仔细、深入地去研究这个问题，还确实

<sup>①</sup> 夏青峰，数学是什么．江苏教育[J]，2003(10):39

有些难度,因为数学家们对此也是各执一词,正如美国数学家柯朗在他的《数学是什么》一书中说到的:“……对于学者,对于普通人来说,更多的是依靠自己的数学经验,而不是哲学,才能回答这个问题:数学是什么?”<sup>①</sup>但是作为数学教师,我们也不得不对此有一个明确的答案,否则教学中不可避免地会受到各种数学观的影响,而且我们的教学也会因此出现这样或那样的问题,进而影响到我们的学生对此问题的看法。

## —— 教 学 分 析 ——

### 数学:多元的复合体

数学是什么?这一问题历来都有各种不同的回答,这些说法中往往强调了某一侧面,也体现了提出者的某种偏好。

恩格斯在《自然辩证法》一书中指出:“数学是数量的科学:它从数量这个概念出发。”<sup>②</sup>我国学者大都赞成这种说法。

有人认为,数学是一种工具。在人们的生产和生活中,需要有各种各样的工具,而数学作为一种人们思维的特殊工具在社会中“隐式”地存在着,虽然它不像有形工具那样“看得见、摸得着”,但它的作用从某种意义上讲,要远远超过那些有形工具,因此说它是一种“人们生活、劳动和学习必不可少的工具”,如果能恰当地运用这种工具,就可能帮助我们进行一些数据处理、数据运算甚至推理与证明。例如,各种报刊、电视、广告上的数据可以使人们引发一系列的联想,可以帮助人们做出果断的决策,可以使人们的生活达到最优化等。这些“隐式”的工具,人们都在自觉或不自觉地应用着。

也有人认为,数学是一种语言。语言是人们交流思想的有效工具,而数学有它自身的特点,因此也就有它自成体系的一套语言(符号),而这种特殊的语言又是大家公认的,人们就可以利用这种特殊的语言来进行思想交流和方法交流,达到科学技术的共同发展。例如,生活中的“+”与“-”,商品说明书中的各种数和各种各样的统计图表等,这些都是生活化的数学语言。

数学是一种文化。文化的传播推进了社会不断地向前发展,而数学自身的发展也是一种人类文化传播中不可分割的一部分,其中包含着丰富的数学内容、数学思想、数学方法和数学语言等。

法国布尔巴基学派和我国数学家徐利治教授认为:“数学是研究模式的科学”。

① [美]柯朗著. 数学是什么[M]. 北京:科学出版社,1982. 6

② 恩格斯. 自然辩证法[M]. 北京:人民出版社,1971. 235

即数学是从业已模式化的个体出发,在进一步的抽象过程中对可能产生的模式进行研究的科学。因此,数学是一个主观建构的过程。之所以这样说是因为要想研究自然界中的某种现象和规律,就要建构出一种抽象的模型,从理性的角度去研究其规律。在这种特殊需要的情况下,数学就起着至关重要的作用,人们可以利用数学来把生活中的现实构造成一个一个的数学模型,再对这些数学模型进行研究,以“有效地描述自然现象和社会现象”。例如,数学中的每一道应用题都是生活原型的再现。

美国数学家 M. 克莱因认为:“数学不仅是一种方法、一种艺术或一种语言,数学更重要的是一门有着丰富内容的知识体系。”

还有人认为:“数学是结构的科学。”

“数学是人类的发明。”

“数学首先是一种探讨研究的方法。”

“数学是一门艺术。”

“数学是一种思维方式。”

“数学是一种精神,一种理性的精神。”

……

我国古代一直认为数学就是“术”,是用来解决生产与生活实际问题的计算方法。值得一提的是,数学是一门不断发展的学科,在不同的历史时期,数学的发展程度是不一样的,因此人们对数学的认识也是不一致的。这就如怀尔德所指出的:“试图给数学下定义所遇到的困难看来主要来自这样的假设,即认为数学就其本质而言是绝对的、不随时间和地点而改变的事物。……既然数学不是上述这种事物,任何刻画它的企图肯定只能是失败。”<sup>①</sup>因此,笔者认同郑毓信教授的看法:“数学应被看成一个由理论、方法、问题和符号语言等多种成分所组成的复合体。”<sup>②</sup>也就是说,数学是一个多元的复合体,我们应该全面地去认识数学。

《全日制义务教育数学课程标准(实验稿)》中有关“数学是什么”的叙述有:“数学是人们对客观世界定性把握和定量刻画、逐渐抽象概括、形成方法和理论,并进行广泛应用的过程。”“数学是人们生活、劳动和学习必不可少的工具,能够帮助人们处理数据、进行计算、推理和证明,数学模型可以有效地描述自然现象和社会现象;数学为其他科学提供了语言、思想和方法,是一切重大技术发展的基础;数学在提高人的推理能力、抽象能力、想象力和创造力等方面有着独特的作用;数学是人类的一种文化,它的内容、思想、方法和语言是现代文明的重要组成部分。”<sup>③</sup>

① 郑毓信. 数学教育哲学[M]. 成都:四川教育出版社,1999. 22

② 郑毓信. 数学教育哲学[M]. 成都:四川教育出版社,1999. 25

③ 教育部基础教育司制订. 数学课程标准[M]. 北京:北京师范大学出版社,2001. 1

可见,《课标》中也是将数学看成一个多元的复合体,不能简单地将数学等同于命题和公式汇集成的逻辑体系。数学通过模式的构建与现实世界密切联系,但又借助抽象的方法,强调思维形式的探讨;现代技术渗透于数学之中,成为数学的实质性内涵,但抽象的数学思维仍然是一种创造性的活动;数学是一种特殊的语言,由此形成的思维方式,不仅决定了人类对物质世界的认识方式,还对人类理性精神的发展具有重要的影响,因而必然成为人类文化的一个重要组成成分。

## 两种不同的数学观

数学观是指人们对数学的性质与任务的基本认识和看法。作为一名数学教师,虽然我们并没有有意识地去思考过自己究竟具有什么样的数学观,但是我们在实际工作中,却总是自觉或不自觉地以某种观念指导着具体的教学行为,或者说,我们的数学教学活动总是体现了一定的数学观念,更为糟糕的是,有时由于这是一种不自觉的行为,使得当我们自己处于某种朴素而又错误的数学观之下时,我们竟然自己也不知道,从而也影响了数学教学实践与效果。

《现代汉语辞典》中有关“数学”的解释是这样的:数学是“研究现实世界的空间形式和数量关系的科学,包括算术、代数、几何、三角、微积分等”<sup>①</sup>。这是恩格斯在《反杜林论》中的观点,也是一直以来被人们所广泛认可的数学的定义。它是把数学等同于数学知识(如算术、几何、三角、微积分等)的汇集,而且把所教的数学知识看做不变的,永远正确的真理。

然而,因为近些年来数学教学研究已经表明,数学也是人类的一种创造性的活动,在这个创造性活动中,有严格的演绎、证明,也有数学的猜想、不完全的归纳。数学就是在这些活动中不断变化和发展着的。前文中关于“什么是半圆及其周长”的论述正好表明了数学是随着人们认识的不断加深而不断发展的过程。

如果把前一种关于数学知识的观点称做静态的数学观的话,那么后一种就称为动态的数学观。不同的数学观会给数学教学带来不同的影响。例如,教学《乘法的初步认识》,持静态的数学观的人会这样设计:把乘法作为数学中的规定,让学生想办法记住这个概念及其表达的符号。而持动态的数学观的人会这样设计:把乘法概念建立的必要性,也即为什么要这样创立,通过必要的活动让学生自己去体会,让学生经历数学知识被创造的活动过程。

由此可见,后一种观点更加能够体现数学的本质,也是目前被数学教育界广泛认可的。也就是说,我们应该把数学看做一种人类的活动,这种活动包含有观察、想象、猜测、尝试、证明、反驳、检验和改进等一系列复杂的动态过程。

① 中科院语言研究所. 现代汉语词典[M]. 北京:商务印书馆,1981. 1060

## 学校数学与数学科学

学校数学和数学科学既有联系,也有区别。联系在于学校数学是科学数学的一部分,它的内容都是属于数学科学的范畴;其次学校数学组织方法保持了数学的基本特征,都是按照从浅入深,从易到难的方式来组织的。

它们的区别除了名称上的不同以外,特别值得一提的是以下三个方面。

首先,作为科学的数学和学校教育中的数学在指向上是有所不同的。作为科学的数学以揭示事物的数量关系和空间形式为目的,目的在于发现事物的客观规律和推进数学理论的完善发展。而学校数学作为学校教育的重要组成部分,与数学科学不同,它的最终目的是要促进学生的发展,因此要努力拓展学校数学在育人方面的特殊价值:即在学校数学中,通过具体、真实、具有时代性的数据,反映出社会建设的真实面貌,让学生感受到数学与生活的密切联系,以及了解时代的发展。同时,通过数学的学习,增长数学知识,培养学生一种思维的方式。

其次,论证要求不同。科学的数学,除了确认为公理的原理外,所有的结论都须有严格的证明或推导,以保证其逻辑严谨性;学校数学则考虑不同年龄段学习者的理解水平,只要求相对的严谨性。

第三,内容安排的方式不同。数学科学只须考虑清楚、明白、严谨地表达数学内容本身,用不着考虑阅读者的感受;而学校数学内容的安排,必须要考虑课程接受者的感受这一重要的因素,因此学校数学是数学学术形态和教育形态结合的产物。

## —— 教 学 建 议 ——

### 正确认识数学中的规定

虽然我们不可能对数学作全面的了解,但是,我们可以从数学的基本特征讨论起,进而来看教师应该怎样形成正确的数学观。

众所周知,数学有三个基本的特点,这是苏联数学家亚历山大洛夫提出的,那就是数学的高度抽象性、严密的逻辑性和广泛的应用性。其中,数学的一个重要特点是其具有高度的抽象性,比如说,数学中有很多抽象的概念、法则、性质、公式等,学生如果不能正确地认识这些规定,将会对学生学习数学造成很大的影响,这也是学生学不好数学的主要原因之一。“数学因其抽象形式而声明狼藉,其实它只该负一半责任。”教学中,教师首先要正确认识数学中的规定,用形象生动的语言,化抽象为具体,吸引学生的学习兴趣,从而帮助学生正确认识数学中的规定,明确数学是枯燥无味的,还是生动活泼、有趣有用的,这样有利于使学生正确地看待数学,了解数学,从而热爱数学,钻研数学,建立正确的数学观念。

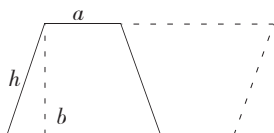
### 数学中的规定是合理而且必要的

数学中的很多内容都是规定的,如:数学概念的定义、数学法则、符号等。那为什么要作这么多的规定呢?让我们从《小学数学教材教法》(人教版)上册中的一个问题“ $416 \times 23$  可否从乘数的最高位乘起”讨论起。“可不可以从乘数的最高位乘起”?当然可以。那小学课本中为何规定“要从乘数的个位乘起”?因为这样最简便啊!而且有利于进一步学习后面的知识,也为总结法则带来方便。否则,乘数每增加一位,法则就得重新写,这样就很麻烦。因此,教学时,教师不妨让学生自己根据实际操作,找出最简单的方法,然后再总结出法则来。这样,不仅锻炼了学生的操作能力,更重要的是让学生明确了“为何要从乘数的个位乘起”的道理,从而理解法则的合理性。由此可见,数学中的规定都是有好处、有必要的。

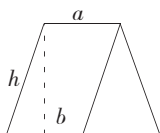
数学中的规定和生活中的规定一样,是有好处、有必要的。例如,十字路口的红绿灯,规定红灯停、绿灯行。如果没有这个规定的话,那交通事故肯定了不得,社会也不得安宁了。数学中运算顺序的规定就像生活中红绿灯,它保证了数学中的“秩序”。又如,在除法算式中规定“除数不能为零”,否则  $0 \div 0 = 1, 0 \div 0 = 2, \dots$  可以得到所有的数都是相等的,那岂不是“天下打乱了”。

当然数学中的规定必须是合理的,科学的。例如,对自然数的约数个数进行分类,一类是约数个数大于2的,称为合数;一类是约数个数等于2的,称为质数;而1既不是质数又不是合数。这样的分类行不行?好不好?如果把1也作为质数,可以吗?让我们继续看吧,如果对任意一个自然数进行分解质因数,则会出现: $6 = 1 \times 2 \times 3 = 1 \times 1 \times 2 \times 3 = 1 \times 1 \times 2 \times 1 \times 3 = \dots$ ,每一个自然数分解质因数的表达式就不唯一了,也为后面用分解质因数法“求几个数的最大公约数和最小公倍数”带来了不必要的麻烦。又如,在讲到数零的写法时,可以结合书中表示空集的韦恩图,这样不仅合理,而且很形象。

数学中的规定还必须是经过优选的。例如,在工程问题中,我们习惯令工作总量为1,而实际上令工作总量为任意一个自然数都是可以解答的。为什么选1做工作总量?那是因为在在此条件下,工作效率与工作时间互为倒数,解答比较简便。又如,在推导梯形面积计算公式时,学生可能会得出不同的计算公式:



$$(1) S = (a+b) \times h \div 2;$$



$$(2) S = a \times h + (b-a) \times h \div 2$$

显然,(1)比(2)要简便,因此通常说到梯形面积计算公式都指的是(1)。

数学中的规定都是源于实际,有利于数学的研究、传播与使用的,正确认识数学中的规定有助于学生联系实际,认识数学。