

优等生数学

习题集

高中第一册



上海十大名牌高中联编
直击名牌大学

主编 ■ 熊斌 徐斌艳

本册核心作者

朱永庆（七宝中学）

许敏（控江中学）

况亦军（上海中学）

田万国（建平中学）



优等生数学 习题集

高中第一册

主编 ■ 熊 斌 徐斌艳

本册核心作者

朱永庆（七宝中学）

许 敏（控江中学）

况亦军（上海中学）

田万国（建平中学）



华东师范大学出版社

图书在版编目 (CIP) 数据

优等生数学习题集. 高一. 上/熊斌, 徐斌艳主编. 上海:
华东师范大学出版社, 2008

(优等生数学)

ISBN 978-7-5617-6252-3

I. 优… II. ①熊…②徐… III. 数学课—高中—习题
IV. G634.605

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2008) 第 109559 号

优等生数学习题集

高中第一册

主 编 熊 斌 徐斌艳
策 划 倪 明 (数学工作室)
组 稿 倪 明 徐 金
审读编辑 徐惟简 孔令志
装帧设计 卢晓红

出版发行 华东师范大学出版社
社 址 上海市中山北路 3663 号 邮编 200062
电话总机 021-62450163 转各部门 行政传真 021-62572105
客服电话 021-62865537 (兼传真)
门市 (邮购) 电话 021-62869887
门市地址 上海市中山北路 3663 号华东师范大学校内先锋路口
网 址 www.ecnupress.com.cn

印 刷 者 扬中市印刷有限公司
开 本 787×1092 16 开
印 张 3.25
字 数 60 千字
版 次 2008 年 8 月第一版
印 次 2008 年 8 月第一次
印 数 8000
书 号 ISBN 978-7-5617-6252-3 G·3624
定 价 6.00 元

出 版 人 朱杰人

(如发现本版图书有印订质量问题, 请寄回本社客服中心调换或电话 021-62865537 联系)

目录_Contents

001

第1章 集合与命题 /001

- 1.1 集合的概念与表示法 /001
- 1.2 集合与集合的关系 /002
- 1.3 集合的运算 /003
- 1.4 命题及其运算 /004
- 1.5 充分条件和必要条件 /005

第2章 不等式 /007

- 2.1 不等式的基本性质 /007
- 2.2 解不等式的概念 /007
- 2.3 一元二次不等式的解法 /009
- 2.4 一元高次不等式的解法 /010
- 2.5 分式不等式的解法 /011
- 2.6 绝对值不等式的解法 /012
- 2.7 无理不等式的解法 /013
- 2.8 基本不等式 /013
- 2.9 不等式的常用证法 /014
- 2.10 不等式的应用 /016

第3章 函数的基本性质 /018

- 3.1 函数的概念 /018
- 3.2 函数关系的建立 /019
- 3.3 函数的图象 /020
- 3.4 函数的奇偶性 /021
- 3.5 函数的单调性 /022
- 3.6 函数的值域 /023
- 3.7 函数性质研究 /024

第4章 幂函数、指数函数与对数函数 /025

- 4.1 幂函数的图象与性质 /025
- 4.2 指数函数的图象与性质 /027
- 4.3 对数概念及其运算 /029
- 4.4 反函数的概念 /030
- 4.5 对数函数的图象和性质 /032
- 4.6 指数方程 /035
- 4.7 简单的对数方程 /036
- 4.8 简单的对数不等式 /037
- 4.9 综合问题 /038

参考答案 /040

第1章 集合与命题

1.1 集合的概念与表示法

001 下列四个命题:①“所有很小的正数”能构成一个集合;②方程 $(x-1)^2 = 0$ 的解的集合是 $\{1, 1\}$;③ $\{1, 3, 5, 7\}$ 与 $\{3, 7, 5, 1\}$ 表示同一个集合;④集合 $\{(x, y) \mid y = x^2 - 1\}$ 与 $\{y \mid y = x^2 - 1\}$ 表示同一个集合,其中正确的是().

(A) 仅有①、④ (B) 仅有②、③ (C) 仅有③ (D) 仅有③、④

002 方程组 $\begin{cases} x+y=3, \\ xy=2 \end{cases}$ 的解集是().

(A) $\{1, 2\}$ (B) $\{(1, 2)\}$
(C) $\{(1, 2), (2, 1)\}$ (D) $\{1, 2, 1, 2\}$

003 设集合 $A = \{x, xy, xy-1\}$, 其中 $x \in \mathbf{Z}, y \in \mathbf{Z}$ 且 $y \neq 0$, 若 $0 \in A$, 则 A 中的元素之和为_____.

004 对于自然数的集合 $\mathbf{N}$, 若 $a \in \mathbf{N}$, 则记 $\text{div } a$ 为 a 的正约数组成的集合, 记 $a\mathbf{N}$ 为 a 的倍数组成的集合.

- (1) 求 $\text{div } 1$ 和 $\text{div } 0$;
- (2) $2\mathbf{N}$ 是否含有 $6\mathbf{N}$ 中的每一个元素?
- (3) 若 $\text{div } p$ 只含有两个元素, 试问它表示什么?
- (4) 若 $\text{div } p$ 只含有一个元素, 它又表示什么意义?

005 设 M 是满足下列两个条件的函数 $f(x)$ 的集合: (1) $f(x)$ 的定义域为 $[-1, 1]$; (2) 若 $x_1, x_2 \in [-1, 1]$, 则 $|f(x_1) - f(x_2)| \leq 4|x_1 - x_2|$. 问: 定义在 $[-1, 1]$ 上的函数 $g(x) = x^2 + 2x - 1$ 是否属于 M , 并说明理由.

006 集合 A 满足条件: 若 $a \in A$, 则 $f(a) = \frac{2a}{2a+1} \in A$, 且 $f(f(a)) \in A$, $f(f(f(a))) \in A, \dots$, 依此类推.

- (1) 若集合 A 为单元素集, 求 a 和 A ;
- (2) 满足条件的集合 A 中是否可有两个元素? 若存在, 求出集合 A ; 若不存在, 说明理由;
- (3) 用描述法写出一个满足条件的无穷集合 A .

1.2 集合与集合的关系

007 设集合 $M = \{x \mid x = 3m + 1, m \in \mathbf{Z}\}$, $N = \{y \mid y = 3n + 2, n \in \mathbf{Z}\}$, 若 $x_0 \in M$, $y_0 \in N$, 则 $x_0 \cdot y_0$ 与集合 M 、 N 之间的关系是_____.

008 已知集合 $M = \left\{x \mid x = a + \frac{1}{2}, a \in \mathbf{Z}\right\}$, $N = \{x \mid x = n, n \in \mathbf{Z}\}$, $P = \left\{x \mid x = \frac{m+1}{2}, m \in \mathbf{Z}\right\}$, 则 M 、 N 、 P 的关系是_____.

009 下列各组中, P 与 Q 相等的一组是().

(A) $P = \{y \mid y = x^2\}$, $Q = \{x \mid y = x^2\}$

(B) $P = \{x \mid x = 2k - 1, k \in \mathbf{N}^*\}$, $Q = \{x \mid x = 4k \pm 1, k \in \mathbf{N}^*\}$

(C) $P = \{m \mid m = 3k + 1, k \in \mathbf{Z}\}$, $Q = \{m \mid m = 3k - 2, k \in \mathbf{Z}\}$

(D) $P = \{(3, -5)\}$, $Q = \{(-5, 3)\}$

010 对于空集 $\emptyset$, 有下列结论: ① $0 \in \emptyset$; ② $\emptyset \in \{0\}$; ③ $\emptyset \in \{\emptyset\}$; ④ $\emptyset \subsetneq \{\emptyset\}$; ⑤ $\emptyset = \{\emptyset\}$. 其中正确的结论是_____.

011 若集合 $M = \{y \mid y = 2^{-x}, x < 0\}$, $P = \{x \mid y = \sqrt{x-1}\}$, 则 M 、 P 的关系是_____.

012 已知集合 $A = \{a, b\}$, 试用列举法表示集合 $P = \{x \mid x \in A\}$, $Q = \{x \mid x \subseteq A\}$, 并分别指出集合 A 与 P 、 Q 的关系.

013 若集合 $A = \{x \mid 2a + 1 \leq x \leq 2a + 4\}$, $B = \{x \mid 3 < x < 22\}$, 求能使 $A \subseteq B$ 成立的实数 a 的取值范围.

014 求集合 $M = \{1, 2, 3, \dots, 100\}$ 所有子集的所有元素的和.

015 如果 $M = \{x \mid x = a^2 + 1, a \in \mathbf{N}^*\}$, $P = \{y \mid y = b^2 - 4b + 5, b \in \mathbf{N}^*\}$, 求证: $M \subseteq P$.

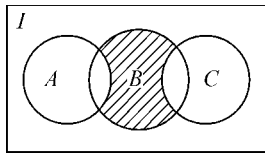
016 设 $f(x) = x^2 + px + q$ ($p, q \in \mathbf{R}$), $M = \{x \mid x = f(x)\}$, $N = \{x \mid x = f[f(x)]\}$.

(1) 证明 $M \subseteq N$; (2) 当 $M = \{-1, 3\}$ 时, 求 N .

017 已知集合 $A = \{(x, y) \mid (x - 2)^2 + (y + 3)^2 \leq 4\}$, $B = \left\{(x, y) \mid (x - 1)^2 + (y - a)^2 \leq \frac{1}{4}\right\}$, 其中 $a \in \mathbf{R}$, 且 $B \subseteq A$, 求 a 的取值范围.

1.3 集合的运算

018 全集为 I , A 、 B 、 C 均为 I 的子集, 则阴影部分表示的集合是_____.



第 018 题

019 已知全集 $U = \mathbf{R}$, $A = \{x \mid f(x) \geq 0\}$, $B = \{x \mid g(x) \geq 0\}$, 则不等式 $f(x) \cdot g(x) \leq 0$ 的解集用 A 、 B 表示为_____.

020 在 100 个学生中, 有乒乓球爱好者 60 人, 排球爱好者 65 人, 则两者都爱好的人数最少_____人; 最多_____人.

021 设集合 $A = \{x \mid x^2 - 4x - 12 > 0\}$, $B = \{x \mid |x - 3| < a, a \in \mathbf{R}\}$, 且 $-3 \in B$, 求 $A \cap B$.

022 已知集合 $A = \{x \mid x^2 - ax + a^2 - 19 = 0, x \in \mathbf{R}, a \in \mathbf{R}\}$, $B = \{x \mid x^2 - 5x + 6 = 0\}$, $C = \{x \mid x^2 + 2x - 8 = 0\}$, 若 $A \cap B \neq \emptyset$, $A \cap C = \emptyset$, 求 a 的值.

023 已知集合 $A = \{x \mid x^2 - 2ax - 8 < 0\}$, $B = \{x \mid |x - a| < |a - 1|\}$, 若 $A \cap B = B$, 求实数 a 的取值范围.

024 已知集合 $A = \{(x, y) \mid x^2 + mx - y + 2 = 0\}$, $B = \{(x, y) \mid x - y + 1 = 0, 0 \leq x \leq 2\}$, 若 $A \cap B \neq \emptyset$, 求实数 m 的取值范围.

025 已知集合 $A = \{x \mid 100 \leq x \leq 1000, x \in \mathbf{N}\}$, 其中是 3 或 4 的倍数但不是 12 的倍数的元素共有_____个.

026 设 $I = \mathbf{R}$, $A = \{x \mid |x| > 1\}$, $B = \{x \mid x^2 + 4x + 3 < 0\}$, 求集合 C , 使其同时满足下列 3 个条件: ① $C \subseteq (B \cup \complement_I A) \cap \mathbf{Z}$; ② $C \cap B \neq \emptyset$; ③ C 中有 2 个元素.

027 已知集合 $A = \{(x, y) \mid ax + y = 1\}$, $B = \{(x, y) \mid x + ay = 1\}$, $C = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 = 1\}$.

(1) 当 a 取何值时, $(A \cup B) \cap C$ 为含有两个元素的集合?

(2) 当 a 取何值时, $(A \cup B) \cap C$ 为含有三个元素的集合?

028 (1) 求满足 $A \cup B = \{a_1, a_2\}$ 的集合 A 、 B 的一切可能组成情形, 共多少种?

(2) 若 $A \cup B = \{a_1, a_2, a_3, \dots, a_n\}$ ($n \in \mathbf{N}, n > 2$), 则集合 A 、 B 组成的可能情形有多少种?

029 已知集合 $A = \left\{x \mid \frac{2x-1}{x^2+3x+2} > 0\right\}$, $B = \{x \mid x^2 + ax + b \leq 0\}$, 且

$A \cap B = \left\{x \mid \frac{1}{2} < x \leq 3\right\}$. 求实数 a, b 的取值范围.

030 已知 $A = \{x \mid x = 28m + 20n, m, n \in \mathbf{Z}\}$, $B = \{x \mid x = 12m + 18n, m, n \in \mathbf{Z}\}$, 求属于 $A \cap B$ 的最小正整数, 并分别求出一组此时集合 A 和 B 中的 m, n 的值.

031 已知集合 $A = \{(x, y) \mid y^2 = x + 1\}$, $B = \{(x, y) \mid 4x^2 + 2x - 2y + 5 = 0\}$, $C = \{(x, y) \mid y = kx + b\}$, 问是否存在自然数 k, b , 使得 $(A \cup B) \cap C = \emptyset$, 证明你的结论.

1.4 命题及其运算

032 下列说法中, 正确的是().

- (A) 任何一个集合 A 必有两个子集
- (B) 任何一个集合 A 必有一个真子集
- (C) 若集合 A 和 B 的交集是空集, 则 A, B 至少有一个是空集
- (D) 若集合 A 和 B 的交集是全集, 则 A, B 都是全集

033 命题“菱形的对角线互相垂直且平分”的否命题是().

- (A) 菱形的对角线不互相垂直, 也不互相平分
- (B) 菱形的对角线不互相垂直, 或不互相平分
- (C) 如果一个四边形不是菱形, 则它的对角线互相垂直, 但不互相平分
- (D) 如果一个四边形不是菱形, 则它的对角线不互相垂直, 或不互相平分

034 与命题“函数 $y = \sqrt{ax^2 + bx + c}$ 的定义域为 $\mathbf{R}$ ”等价的命题不是().

- (A) 不等式 $ax^2 + bx + c \geq 0$ 对任意实数恒成立
- (B) 不存在 $x_0 \in \mathbf{R}$, 使 $ax_0^2 + bx_0 + c < 0$
- (C) 函数 $y = ax^2 + bx + c$ 的值域是 $[0, +\infty)$ 的子集
- (D) 函数 $y = ax^2 + bx + c$ 的最小值大于 0

035 下列命题中的真命题有_____ (写出所有真命题的序号).

- ① 命题“ $\triangle ABC$ 中, 若 $AB > AC$, 则 $\angle C > \angle B$ ”的逆命题;
- ② 命题“若 $ab = 0$, 则 $b = 0$ ”的否命题;
- ③ 命题“若 $a \neq 0$ 且 $b \neq 0$, 则 $ab \neq 0$ ”的逆否命题;
- ④ 命题“若 $a = 0$ 或 $b = 0$, 则 $a^2 + b^2 = 0$ ”的逆否命题.

036 有两个命题: ①不等式 $|x| + |x - 1| > m$ 的解集是 $\mathbf{R}$; ②函数 $f(x) =$

$-(7-3m)^x$ 是减函数,若这两个命题中有且只有一个真命题,则实数 m 的取值范围是_____.

037 把下面不完整的命题补充完整,并使之成为真命题:若函数 $f(x) = 3 + x^3$ 的图象与 $g(x)$ 的图象关于_____对称,则函数 $g(x) =$ _____. (注:填上你认为可以成为真命题的一种情形即可,不必考虑所有可能的情形)

038 命题“若 $x^2 + y^2 + 2y + 1 = 0$, 则 $x = 0$ 且 $y = -1$ ”的否命题是_____.

039 如果命题“曲线 $y = \sqrt{|x|+1}$ 与直线 $y = kx + b$ 没有公共点”是真命题,则实数 k, b 应满足的条件是_____.

040 写出命题“若 $|2x+1| \geq 1$, 则 $x^2 + x > 0$ ”的逆命题、否命题和逆否命题,并判断它们的真假.

041 已知命题 p : 方程 $a^2x^2 + ax - 2 = 0$ 在 $[-1, 1]$ 上有解;命题 q : 只有一个实数 x 满足不等式 $x^2 + 2ax + 2a \leq 0$, 若命题 p 和 q 中至少有一个是假命题,求 a 的取值范围.

042 对于函数 $f(x) = x^2 + ax + b$, $a, b \in \mathbf{R}$, 当 $x \in [-1, 1]$ 时, $|f(x)|$ 的最大值为 M , 用反证法证明: $M \geq \frac{1}{2}$.

1.5 充分条件和必要条件

043 已知实数集合 $A = \left\{x \mid \frac{x-1}{x+1} < 0\right\}$, $B = \{x \mid |x-b| < a\}$, 若“ $a = 1$ ”是“ $A \cap B \neq \emptyset$ ”的充分条件,则 b 的取值范围是().

- (A) $-2 \leq b < 0$ (B) $-3 < b < -1$
(C) $-2 < b < 2$ (D) $-1 \leq b < 2$

044 设 A, B, C 是三个集合,则“ $B = C$ ”是“ $A \cap B = A \cap C$ ”的().

- (A) 充分非必要条件 (B) 必要非充分条件
(C) 充要条件 (D) 既不充分也不必要条件

045 “ $x \neq 5$ ”是“ $x^2 \neq 25$ ”的().

- (A) 充分非必要条件 (B) 必要非充分条件
(C) 充要条件 (D) 既不充分也不必要条件

046 对于 $x \in [0, 1]$ 的一切值,“ $a + 2b > 0$ ”是使“ $ax + b > 0$ 恒成立”的().

(A) 充要条件

(B) 充分不必要条件

(C) 必要不充分条件

(D) 既不充分也不必要条件

047 设 $a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2$ 均为非零实数, 不等式 $a_1x^2 + b_1x + c_1 > 0$ 和 $a_2x^2 + b_2x + c_2 > 0$ 的解集分别为集合 M 和 N , 那么 “ $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$ ” 是 “ $M = N$ ” 的 ().

(A) 充分非必要条件

(B) 必要非充分条件

(C) 充要条件

(D) 既不充分也不必要条件

048 设全集为 S , 有下面四个命题: ① $A \cap B = A$; ② $\complement_S A \supseteq \complement_S B$; ③ $\complement_S B \cap A = \emptyset$; ④ $\complement_S A \cap B = \emptyset$, 其中是命题 $A \subseteq B$ 的充要条件的命题序号是_____.

049 已知 $P = \{x \mid |x-1| > 2\}$, $S = \{x \mid x^2 + (a+1)x + a > 0\}$, 且 $x \in S$ 是 $x \in P$ 的充分条件, 求实数 a 的范围.

050 求不等式 $(k^2 - 3k + 2)x^2 + (k+1)x + 2 \geq 0$ 的解集为 $\mathbf{R}$ 的充要条件.

051 设 α, β 是方程 $x^2 - ax + b = 0$ 的两个实根, 试分析 $a > 2$ 且 $b > 1$ 是两根 α, β 均大于 1 的什么条件?

052 已知抛物线 $C: y = -x^2 + mx - 1$ 和点 $A(3, 0)$ 、 $B(0, 3)$, 求抛物线 C 与线段 AB 有两个不同交点的充要条件.

第2章 不等式

2.1 不等式的基本性质

053 是非题(判断命题的真假,并说明理由.)

- (1) 若 $ac < bc$, 则 $a < b$;
- (2) 若 $a > b$, 则 $ac^2 > bc^2$;
- (3) 若 $a > b, c > d$, 则 $ac > bd$;
- (4) 若 $a > b > 0, c > d > 0$, 则 $\frac{a}{c} > \frac{b}{d}$;
- (5) 若 $a > b$, 则 $a^4 > b^4$;
- (6) 若 $a > b$, 则 $a^5 > b^5$.

054 求证:如果 $a > b, c > d$, 那么 $a - d > b - c$.

055 求证:如果 $a > b > 0, c > d > 0$, 那么 $\frac{a}{d} > \frac{b}{c}$.

056 比较下列各组数的大小

- (1) $(x+1)(x^2-x+2)$ 与 $(x-1)(x^2+x+2)$;
- (2) x^2+y^2 与 $2(x-2y)-5$;
- (3) $x(x-y)$ 与 $y(y-x)$ (其中 $x > 0, y > 0$);
- (4) $1+4x^2$ 与 $(1+x^2)^2$ (其中 $x > 0$).

057 若 a, b 都是正数, 求证:

- (1) $\frac{a}{b} > 1 \Leftrightarrow a > b$;
- (2) $\frac{a}{b} = 1 \Leftrightarrow a = b$;
- (3) $\frac{a}{b} < 1 \Leftrightarrow a < b$.

058 已知: $a \leq b, b \leq c$, 求证: $a \leq c$ (当且仅当 $a = b = c$ 时等号成立.)

2.2 解不等式的概念

059 把下列各不等式的解集写成区间的形式:

- (1) $x < 3$; (2) $x > -\sqrt{3}$; (3) $x \leq 1$; (4) $x \geq -4$;
 (5) $-1 < x < 2$; (6) $-2 \leq x \leq 5$;
 (7) $0 < x \leq 1$; (8) $-\sqrt{2} \leq x < 1$;
 (9) $x \neq 1$; (10) $x < -1$ 或 $x = 2$ 或 $x \geq 3$.

060 分别在数轴上画出下列区间:

- (1) $(-5, 3)$; (2) $[1, \sqrt{2}]$; (3) $[-1, 1)$; (4) $(2, +\infty)$.

061 下列各组中两个不等式是否同解?

- (1) $x^2 - 2x < 3$ 与 $\frac{x^2 - 2x}{x - 1} < \frac{3}{x - 1}$;
 (2) $x^2 - 2x < 3$ 与 $\frac{x^2 - 2x}{x + 1} < \frac{3}{x + 1}$;
 (3) $x - 3 > 2x + 1$ 与 $(x - 3)(x - 5)^2 > (2x + 1)(x - 5)^2$;
 (4) $x - 3 > 2x + 1$ 与 $(x - 3)(x + 5)^2 > (2x + 1)(x + 5)^2$;
 (5) $x > 5$ 与 $x + \frac{1}{x^2 - 3x + 2} > 5 + \frac{1}{x^2 - 3x + 2}$;
 (6) $x < 5$ 与 $x + \frac{1}{x^2 - 3x + 2} < 5 + \frac{1}{x^2 - 3x + 2}$;
 (7) $\frac{x + 2}{x - 1} < 0$ 与 $(x + 2)(x - 1) < 0$;
 (8) $\frac{x + 2}{x - 1} \leq 0$ 与 $(x + 2)(x - 1) \leq 0$;
 (9) $\sqrt{x - 1} > 2$ 与 $x - 1 > 4$;
 (10) $\sqrt{x - 1} < 2$ 与 $x - 1 < 4$.

062 解下列关于 x 的不等式:

- (1) $ax \geq b$; (2) $ax + b > cx + d$; (3) $ax + b^2 > bx + a^2$.

063 解下列关于 x 的不等式:

- (1) $2k - 3x > 1 - kx$; (2) $mx - 2 > m - 2x$;
 (3) $m(mx - 1) \leq 2(2x - 1)$.

064 解下列不等式组:

- (1) $\begin{cases} 2x + 4 \leq 7x + 3, \\ 5x + 6 > 6x + 5, \\ 8x + 2 < 9x + 4; \end{cases}$ (2) $3x - 1 > 2 - \frac{x + 1}{3} \geq 1 - \frac{2x - 3}{2}$.

065 求适合不等式 $-1 < 1 - \frac{x + 1}{2} \leq 2 - \frac{x + 2}{3}$ 的整数解.

066 求适合不等式 $\begin{cases} x+2 \geq \frac{x-4}{6} + \frac{x+4}{2}, \\ \frac{1}{2} - \left(\frac{x-2}{4} + \frac{2}{3}\right) \geq \frac{x}{6} \end{cases}$ 的整数解.

067 关于 x 的不等式 $6a-3x < ax+3$ 与 $2ax < a+\frac{1}{2}$ 同解,求实数 a 的值.

2.3 一元二次不等式的解法

068 解下列不等式:

(1) $3x^2 - 5x + 2 > 0$;

(2) $-x^2 + x < 3$;

(3) $(x-1)(x+2) < (x-1)(2x-1)$;

(4) $-6x < -1 - 9x^2$;

(5) $x^2 - 4x - 45 \leq 0$;

(6) $3x^2 - 7x + 10 \geq 0$;

(7) $x^2 + 4x + 4 \leq 0$;

(8) $x^2 - 2x + 1 > 0$.

069 解下列不等式:

(1) $(x+1)^2 - 5 < 0$;

(2) $x+6 < x^2$;

(3) $\frac{1}{3}x^2 - \frac{1}{2}x - 1 \geq 0$;

(4) $x^2 + 8 \leq 4x$.

070 解下列不等式组:

(1) $1 < x^2 - 5x + 7 < 3$;

(2) $-9 < x^2 + 8x + 7 < -3$;

(3) $\begin{cases} 3x^2 + x \geq 2, \\ 4x^2 + 9 > 15x; \end{cases}$

(4) $\begin{cases} 2x^2 - 3x + 1 < 0, \\ 12x^2 - 17x + 6 \geq 0. \end{cases}$

071 某厂计划全年完成产值 60 万元,前三个季度已完成产值 43.45 万元.如果 10 月份的产值是 5 万元,那么最后两个月中,月平均增长率是多少时才能超额完成年计划?

072 关于 x 的方程 $x^2 - 2(m-1)x + m + 11 = 0$, 当 m 分别在什么范围取值时,方程的两根(1)同正;(2)同负;(3)异号?

073 (1) 若关于 x 的不等式 $x^2 - ax + b > 0$ 的解集为 $(-\infty, 1) \cup (4, +\infty)$, 求实数 a 、 b 的值;

(2) 关于 x 的不等式 $ax^2 + bx + c > 0$ 的解集是 $(-\infty, 1) \cup (2, +\infty)$, 求 $a : b : c$.

074 解关于 x 的不等式 $(x-a)(x-a+2) < 0$, 其中常数 $a \in \mathbf{R}$.

075 已知 $a \leq -1$, 解关于 x 的不等式 $(x-a)(x-2a-1) < 0$.

076 解关于 x 的不等式 $ax^2 - 2(a+1)x + 4 > 0$, 其中常数 $a \in \mathbf{R}$.

077 解关于 x 的不等式 $ax^2 - 2ax + 2a - 3 < 0$ 无解, 求实数 a 的值.

078 对于一切实数 x , 恒有 $(k-5)x^2 - (5-k)x - k + 10 > 0$, 求实数 k 的取值范围.

079 关于 x 的不等式 $(a^2 - 4a + 3)x^2 - 2(a-1)x + (a-3) < 0$ 的解集为 $\mathbf{R}$, 求实数 a 的取值范围.

080 关于 x 的不等式组 $\begin{cases} x^2 - x - 2 > 0, \\ 2x^2 + (2k+5)x + 5k < 0 \end{cases}$ 的整数解的集合为 $\{-2\}$, 求实数 k 的取值范围.

081 不等式 $x^2 - mx - 2m \leq 0$ 有实数解, 且对于任意的实数解 x_1, x_2 恒有 $|x_1 - x_2| \leq 3$, 求实数 m 的取值范围.

082 关于 x 的方程 $x^2 - 2(m-1)x + m + 11 = 0$, 当 m 分别在什么范围取值时, 方程的两根: (1) 都大于 1; (2) 都小于 1; (3) 一个大于 1, 另一个小于 1?

2.4 一元高次不等式的解法

083 解下列不等式:

- (1) $x(x-2)(x+4) > 0$;
- (2) $(x^2-1)(x^2-4) > 0$;
- (3) $(x-3)(x-4)^2(x+2) > 0$;
- (4) $(x+2)(x-1)^2(x+1)^3(x-3) < 0$;
- (5) $(x+2)(x+1)^{12}(x-1)^9(x-3) \geq 0$;
- (6) $(2x+1)(3x+2)^2(4x+3)^3(5x+3) \leq 0$.

084 解下列不等式:

- (1) $(x+2)(x^2-3) > 0$;
- (2) $(2x+1)(3x-1)(2-x) \leq 0$;
- (3) $(x+1)^2(x-5)(x^2+3x)(x-2)^3(2x+1)^2 < 0$;
- (4) $(x+1)^{12}x^{15}(x-1)^{18}(x-2)^{21} > 0$.

085 解不等式:

- (1) $x^3 + 3x^2 > 2x + 6$;
- (2) $(x^2 - 6x + 8)(x^2 + 4x + 3) < 0$;
- (3) $(x+2)^2(x+1)^2(x-1)^3(x-2) \leq 0$;

086 设 $f(x) = x^3$, $g(x) = x$, 求不等式 $f(x) \geq g(x)$ 的解集.

087 设 $f(x) = x^3$, $g(x) = kx$, 若关于 x 的不等式 $f(x) \geq g(x)$ 不存在负数解, 求实数 k 的取值范围.

088 设 $f(x) = x^3$, $g(x) = ax^2$ (常数 $a < 0$), 求关于 x 的不等式 $f(x) > g(x)$ 的解集.

2.5 分式不等式的解法

089 解下列分式不等式:

$$(1) \frac{2x+3}{x-2} < 0;$$

$$(2) \frac{(x-2)(3x-1)}{x+3} > 0;$$

$$(3) \frac{2x+3}{4x+5} \leq 0;$$

$$(4) \frac{8x^2+6x+1}{6x^2-5x+1} \geq 0;$$

$$(5) \frac{1}{x} < 1;$$

$$(6) 3x+5+\frac{1}{x-4} > 2x+\frac{1}{x-4}+3;$$

$$(7) \frac{4}{x-1} \leq x-1;$$

$$(8) \frac{2}{x+1} \geq \frac{x+1}{2}.$$

090 解下列分式不等式:

$$(1) 3x-1+\frac{4}{5-x} > 2x+2-\frac{4}{x-5}; \quad (2) \frac{2x-3}{4x-5} < 1;$$

$$(3) \frac{x^2}{x^2-5x+6} \geq 1;$$

$$(4) \frac{x+1}{(x-2)^2(x+1)} < 1;$$

$$(5) \frac{x-1}{(x-2)(x-1)} < 1;$$

$$(6) 2+\frac{2}{x-1} \leq \frac{5}{4-x}.$$

091 解下列分式不等式:

$$(1) \frac{x-2}{x^2-5x+6} \geq -\frac{1}{2};$$

$$(2) \frac{(4x+3)(2x-1)^3}{(x^2-x+1)(x+1)^2} \geq 0;$$

$$(3) \frac{1}{x} + \frac{1}{x+1} > \frac{1}{x+2};$$

$$(4) \frac{x}{x^2-7x+12} \geq 1.$$

092 解关于 x 的不等式 $\frac{ax}{x-1} > 1$, 其中常数 $a \in \mathbf{R}$.

093 解关于 x 的不等式 $\frac{ax-1}{ax-a^2} < 0$, 其中常数 $a \in \mathbf{R}$.

094 当 m 分别为何值时, 关于 x 的方程 $m(x-2) = 3(x+4)$ 的解是正数? 是负数?

095 已知关于 x 的不等式 $\frac{x-a}{x-b} > a+b$ 的解集是 $(1, 2)$, 求实数 a, b 的值.

096 若关于 x 的不等式 $\frac{2x^2+2kx+k}{4x^2+6x+3} > 1$ 无实数解, 求实数 k 的取值

范围.

2.6 绝对值不等式的解法

097 已知: $t > 0$, $|x - a| < \frac{t}{2}$, $|y - b| < \frac{t}{2}$, 求证:

$$(1) |(x + y) - (a + b)| < t; \quad (2) |(x - y) - (a - b)| < t.$$

098 已知 $a \in \mathbf{R}$, $|x - a| < 1$, 求证: $|x| < |a| + 1$.

099 解下列不等式:

$$(1) |x + 1| < \sqrt{2}; \quad (2) |x^2 + 3x - 8| \leq 10;$$

$$(3) 3 \leq |5x - 1| < 9; \quad (4) \left| \frac{x + 3}{x - 1} \right| > 1.$$

100 解下列不等式:

$$(1) |5x - x^2| > 6; \quad (2) |x - 2| > |2x - 1|;$$

$$(3) \left| \frac{3x - 2}{4x - 1} \right| \leq \frac{3x - 2}{4x - 1}; \quad (4) \left| \frac{2x - 1}{x + 1} \right| \leq \left| \frac{x + 1}{2x - 1} \right|.$$

101 解下列不等式:

$$(1) |x + 1| + |x - 2| > 4; \quad (2) |x + 5| - |x - 2| < 3.$$

102 解下列不等式:

$$(1) |x - 3| \leq 2x + 1; \quad (2) |x^2 + 3x - 4| > x - 1;$$

$$(3) |x + 1| - 2|2 - x| > 5 - x.$$

103 设 $a \in \mathbf{R}$, 解下列关于 x 的不等式:

$$(1) |x - 1| > |x - a|; \quad (2) a < |x - 2| < 3.$$

104 设 $a \in \mathbf{R}$, 解下列关于 x 的不等式:

$$(1) |x + a| < ax + 1; \quad (2) |x + a| > ax + 1.$$

105 (1) 若关于 x 的不等式 $|x - 1| + |x - 2| > a$ 的解集为 $\mathbf{R}$, 求实数 a 的取值范围;

(2) 若关于 x 的不等式 $|x - 1| + |x - 2| < a$ 有实数解, 求实数 a 的取值范围;

(3) 若关于 x 的不等式 $|x - 1| + |x - 2| < a$ 的解集为 $\emptyset$, 求实数 a 的取值范围.

106 已知不等式 $|ax + 1| \leq b$ 的解集为 $[2, 3]$, 求 a 、 b 的值.