
电子图书
信息技术的结晶
人类文明的载体
网络的基本资源

前言

我国自 1955 年举办高中学生的数学竞赛以来，至今已 38 年了。中间虽然中断过一个时期，但自 1978 年恢复了这项活动以后，可谓更加蓬勃地发展起来，不仅中国数学会继续举办高中学生的数学竞赛，而且各地的数学分会和数学教学研究会还先后举办了初中学生的数学竞赛和小学生（高年级）的数学竞赛。自 1985 年开始，还选派高中学生参加了历届的国际数学奥林匹克的竞赛（即 IMO—International Mathemeti－cal Olympics），并取得了优异的成绩。近年来，在国内还举行了中学生的物理、化学等学科的竞赛活动，有的也参加了国际的竞赛活动，并且也取得了好成绩。

举办高中学生数学竞赛的目的，和举办初中、小学学生数学竞赛的目的，是不会相同的：举办高中学生数学竞赛的目的，首先在于发现学习数学的素质较高的学生，经过一定的培养，成为发展我国数学研究的后备力量。其次则在于通过数学竞赛，促使更多的学生喜爱数学、学好数学，以适应社会发展对基础教育阶段的数学教育的需要。当然，举办数学竞赛的目的，也在于促进学校提高数学教学的质量。举办初中、小学生数学竞赛的目的，则首先在于促使更多的学生喜爱数学、学好数学；与此相应的则在于促进初中、小学数学教学质量的提高。当然，发现学习数学的素质高的学生，也应考虑予以适当的培养，但这不是主要的目的。回顾十几年来全国各地举办的各级数学竞赛，不仅参加竞赛的学生取得了好成绩，而且参加竞赛的学生也在逐年增加。不仅越来越多的受到学生的重视和欢迎，而且也得到老师们和学生家长的赞扬和支持。之所以取得这样好的成效，其原因主要就在于举办数学竞赛的上述的目的是正确的；举办数学竞赛的工作是符合上述的目的的。

根据上述的目的，对高中学生数学竞赛内容（竞赛题）的选择，虽然基础在于他们在课内之所学，但不论在深度上还是在难度上，都是超出较多的。对初中、小学生数学竞赛内容的选择，虽然在深度、难度上要略高于课内之所学，但应与课内所学结合得更密切些，而且对课内所学的掌握也适当地进行竞赛。

这样，不论是准备参加哪一级数学竞赛的学生，在参加竞赛前，都将作一定的准备。或自己搜集有关的资料进行准备；或求教于老师，请老师作准备辅导。这样地准备，虽然确能取得一定的成效，但总以没有一本教材性的书籍，即没有一本为学生准备参加数学竞赛用的、既讲授一些必要的数学知识，又对参加竞赛的准备进行指导的书籍，感到遗憾。

北京师范大学出版社有鉴于此，为了帮助各竞赛学科的参加者作好竞赛前的准备，于 1992 年秋决定出版《奥林匹克中小学系列教材》，邀请各学科的水平高，并在辅导学生方面有丰富经验的教师，分头编写各学科的《奥林匹克中小学系列教材》。

由《中小学数学教学报》编辑部和北京教育局教研部数学教研室于 1985 年开始，先后陆续地举办了每年一度的《迎春杯小学数学竞赛》和《迎春杯初中一年级数学竞赛》。于 1991 年，在举办过 7 届竞赛经验的基础上，还编订了《小学数学竞赛大纲（试行草案）》，并且连同历年来对学生进行参加竞赛辅导使用过的材料一起编辑成册，出版了《小学迎春杯数学竞赛指导讲座》。1992 年秋，更计划在这部《指导讲座》的基础上，予以充实和修改，以便成为更好的一部供小学高年级学生用来准备参加数学竞赛适用的书籍。

时逢其会，北京师范大学出版社乃与《指导讲座》的编者商定，将这项充实、修改计划纳入《奥林匹克中小学系列教材》的出版计划，这样，便由北京师范大学出版社作为《奥林匹克中小学系列教材》的一部份出版了。

新版迎春杯数学竞赛《指导讲座》和《试题汇编》运用于小学和初一年级。是以在北京市举办小学数学竞赛的经验为主而编写的，不敢说也适合兄弟省、区、市的实际情况。因此希望广大的读者，老师们、同学们多提宝贵的意见和建议。

《奥林匹克中小学系列教材——初中数学》虽然是在近年来各地举办竞赛的经验基础上，特别是在举办《华罗庚金杯数学竞赛》经验的基础上编写的，但经验不多，难免挂一漏万。因此也希望广大的读者，老师们、同学们多提宝贵的意见和建议。

《奥林匹克中小学系列教材——高中数学》是在较长时期的举办高中学生数学竞赛经验的基础上编写的。但编写成教材性的书籍还没有经验，这次还是创举。因此也希望广大的读者，老师们、同学们多提宝贵的意见和建议。

我们的水平有限，经验不多，编写出的这三部教材中，错误、不妥处在所难免，深切盼望广大读者指出错误、不妥之处，以便我们及时修正，使得教材日臻完善。

《奥林匹克中小学系列教材》——
《小学数学》、《初中数学》、《高中数学》
编者谨识
1993 年 5 月 16 日

第一讲　质数与合数（一）

质数与合数概念是数学运算、算式化简以及分析一些数字问题时常用到的。

如果一个比 1 大的自然数只有两个约数：1 和本身，那么这个自然数就叫质数。质数也叫素数。例如：43＝1×4343 只有 1 和 43 两个约数，所以 43 是质数。100 以内的质数是极为常用的，它们是

2，3，5，7，11，13，17，19，23，29，31，37，41，43，47，53，59，61，67，71，73，79，83，89，97

在自然数中，如果除了 1 和本身两个约数，还有其它的约数，这个自然数就叫合数。例如：6 的约数有 1、2、3、6，那么 6 是合数。合数也叫复合数或合成数。应特别注意 1 既不是素数也不是合数。

例 1　求出 924 的质数约数的和。

解：我们要充分利用数字的整除特征，运用短除的形式，把 924 作质约数分解。

$$\begin{array}{r|l} 2 & 924 \\ \hline 2 & 462 \\ \hline 3 & 231 \\ \hline 7 & 77 \\ \hline & 11 \end{array}$$

924＝11×2×2×3×7

质约数有：11、2、3、7，其和为 11＋2＋3＋7＝23。

例 2　求出 852 的约数。

分析：我们首先可把 852 的质数约数求出来进而求出全部约数。注意：1，852 也是约数。

解：852＝2×2×3×71

约数有 1，2，3，4，6，12，71，142，213，284，426，852 共 12 个约数。

一般地：对一个自然数作质约数分解（也称质因数分解）

$A = a_1^{n_1} \times a_1^{n_2} \cdots\cdots a_m^{n_m}$（其中$a_1$，$a_2 \cdots$，$a_m$是不同的质数，$n_1$，$n_2$，…，$n_m$都是正整数）

A 的约数个数有（n_1＋1）×（n_2＋1）×……×（n_m＋1）个。

例 3　有两个两位数的积是 3927，这两个数的和是几？

解：首先将这个积做质因数分解

3927＝3×7×11×17

把这四个质因数适当搭配可以得到这两个两位数是 3×17＝51，7×11＝77。

所以两数的和是 51＋77＝128。

例4 比$\frac{1}{2}$大比5小，并且分母是13的最简分数有多少个？

分析：我们可以把分母是 13 的分数按照规定的范围先列出来，再将其中分子是 13 的倍数的那些分数去掉。

解：$\frac{1}{2} = \frac{6}{12} < \frac{7}{13}$　$5 = \frac{65}{13}$　$\frac{7}{13} \le x < \frac{65}{13}$

分子应在 7 至 64 这 58 个自然数中选择，因为 13 是质数，去掉 13，26，39，52，用余下的 54 个自然数做分子，可以得到 54 个满足条件的最简分数。

例 5　有八个数 693，35，48，28，175，108，363，165 把它们分为两组，使两组数的积相等。

分析：要使两组数的乘积相等，那么两组中相同质因数的个数一定相等。首先，将它们分解质因数。

$693=3^2\times7\times11$　　　　$175=5^2\times7$

$28=2^2\times7$　　　　$35=5\times7$

$108=2^2\times3^3$　　　　$363=11^2\times3$

$165=3\times5\times11$　　　　$48=3\times2^4$

为了观察得清楚，我们将他们放在一个表格中：

	2	3	5	7	11	组别
693		2		1	1	A
175			2	1		B
35			1	1		A
28	2			1		B
108	2	3				B
363		1			2	B
165		1	1		1	A
48	4	1				A

这 8 个数的分组情况

一组是：693，35，165，48

另一组是：175，28，108，363

例 6　要使四个数的积

135×1925×486×（　　）结果的最后五位都是零，括号中的数最小填入几？

分析：要使乘积结果的最后五位是零，就应当使这四个数中保证有五对 2 和 5 的因子。

解：首先将前面三个数字分解质因数：

$135=3^3\times5$

$1925=5\times5\times7\times11$

$486=2\times3^5$

它们当中共有三个 5，一个 2。应再补上两个 5，四个 2，括号中的数最少应当取 5×5×2×2×2×2＝400。

例 7　合数 3570，有很多的约数，其中最小的三位约数是多少？

分析：如果我们一味地把 3570 的质因子凑成满足条件的三位数，也是可以的。还可将三位数由小到大逐个分解质因数，看其因子是否都是 3570 的因子即可。

$3570=2\times3\times5\times7\times17$

三位数从小到大：100，101，102，103……

$100=5^2\times2^2$　显然 100 中因子里 5 和 2 各多一个，100 不是 3570 约数，

101 是质数，也不是 3570 的约数，102＝2×3×17　　2，3，17 都是 3570 的质因子，所以 102 是 3570 最小的三位约数。

例 8　九个连续的自然数，它们都大于 80，那么其中质数最多有几个？

分析：我们用不同的条件做筛子，逐步加强条件的限制，使其结果明显化。

由于大于 2 的质数一定是奇数，而大于 80 的九个连续自然数至多只有 5 个奇数，所以质数的个数不大于 5 个。

我们知道：在三个连续的奇数中至少有一个数是 3 的倍数。所以这五个连续奇数中至少有一个是合数。因此，质数至多只有四个。

如：101－109 中，质数有 101，103，107，109

例 9　把 33 拆成若干个不同质数之和，如果要使这些质数的积最大，问这几个质数分别是多少？

分析：首先假设可以分成五个质数之和（分成 6 个以上质数之和不可能）：33 是奇数，因此五个质数中不能有 2（否则和是偶数），取最小连续五个奇质数 3，5，7，11，13 的和是 39 超过 33。所以分成五个是不可能的。

假设 33 可以分成四个质数之和，33 是奇数，因此四个数中一定有一个是偶质数 2，即其余三个的和是 31，显然可以找出其余三个分别是：3，5，23　3，11，17　7，11，13　5，7，19　　三数乘积最大的是 7×11×13＝1001　假设 33 可分成三个质数和，只可能是

3，13，17；

3，11，19；

3，7，23；

5，11，17；

乘积均小于 2×7×11×13，33 若分为两个质数之和，只可能是 2 和 31，乘积仅为 62。故应将 33 写成四个质数：2，7，11，13 的和。

例 10　A，B，C 是三个自然数，已知：[A，B]＝42，[B，C]＝66，（A，C）＝3，求所有满足上述条件的 A，B，C。

说明：[A，B]表示 A，B 的最小公倍数，（A，B）表示 A，B 两数的最大公约数。

解：由[A，B]＝42＝2×3×7 可知 A，B 中只含有 2，3，7 的质因子。

由[B，C]＝66＝2×3×11 可知 B，C 中只含有 2，3，11 的质因子。

因此，B 的因子只可能取 2，3。

又因为（A，C）＝3，A，C 都含有 3 的因子，且 A，C 不同时含有 2 的因子，这样 B 中一定含有 2 的因子。

下面我们排一个表格，将 A，B，C 的数值写进去。

A	3×7	3×7	2×3×7	3×7	3×7	2×3×7
B	2	2	2	2×3	2×3	2×3
C	3×11	2×3×11	3×11	3×11	2×3×11	3×11

可以看出，满足条件的 A，B，C 有六组。

由于一个整数的质因数分解是唯一的，这往往就成为我们进一步分析问题的一个理想的出发点。

习题一

1．把下面的整数分解质因数：

1001，546，1993

2．由1、2、3、4、5、6、7、8、9这九个数字组成的九位数是质数吗？

3．把下列八个数，分为两组，每组四个数，使两组数的积相等，问如何分？

14，33，35，75，39，30，143，169

4．自然数199119921993，除本身之外最大的约数是几？

5．要使975×935×972×（　　）的积，最后四位都是“零”，括号中最小填入几？

6．200除以一个两位数质数，余数是14，求这个两位数。

第二讲　简单几何图形的面积计算

一、基本概念

（一）几个基本概念

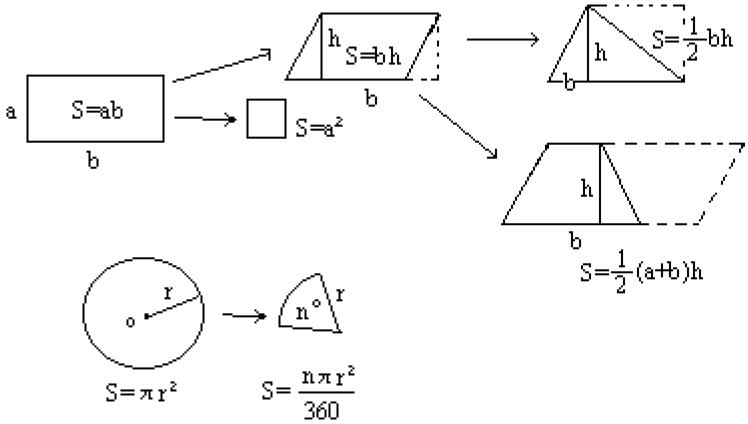
1．平面图形　图形上所有的点都在同一平面内的图形，叫平面图形。如三角形、长方形、正方形、平行四边形、梯形、圆、扇形等。

2．面积　平面图形所围的平面部分的大小，叫这个图形的面积。

3．全等形　如果两个平面图形叠合在一起，能够处处重合，便称这两个图形为全等形。

4．等积形　面积相等的两个图形，叫等积形、全等形一定是等积形。

（二）常用的面积公式及其联系图



（三）几个重要结论

<u>如果两个三角形的底和高分别相等，那么这两个三角形的面积相等。</u>

<u>如果两个三角形的底（或高）相等，那么它们的面积之比，等于它们高（或底）的比。</u>

二、几种常用的求面积方法

（一）利用公式计算面积

例 1　图 2－1 是一块长方形耕地，它由四个小长方形拼合而成，其中三个小长方形的面积分别为 15、18、30 公顷，问图中阴影部分的面积是多少？

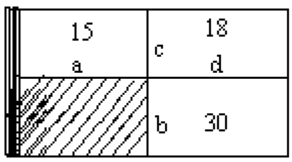


图2—1

分析与解　因为阴影部分也是一长方形，所以只要求出它的长、宽是多少就行，为此设它的长、宽分别为 a、b，面积为 18 公顷的长方形的长、宽分别为 c、d，按公式便有：

a×c＝15，c×d＝18，b×d＝30，

因为（a×c）×（b×d）＝15×30，

而（a×c）×（b×d）

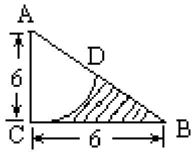
$= (a \times b) \times (c \times d)$

$= 18 \times (a \times b)$

所以 $a \times b = 15 \times 30 \div 18 = 25$

答：阴影部分的面积为 25 公顷。

例 2　图 2－2 中的三角形 ABC 是直角三角形，ACD 是以 A 为圆心、AC 为半径的扇形。求图中阴影部分的面积是多少？（$\pi = 3.14$）



（单位：厘米）

图2—2

分析与解　从图上可以看出，阴影部分的面积，等于三角形 ABC 的面积与扇形 ACD 面积的差，因为三角形 ABC 是直角三角形，AC＝BC＝6厘米，所以三角形ABC的面积为 $\frac{1}{2} \times 6 \times 6 = 18$（平方厘米）。三角形ABC还是一个等腰直角三角形，所以角CAD为45°，扇形ACD的面积为 $\frac{45}{360} \times \pi \times 6^2 = 4.5 \times \pi = 14.13$（平方厘米）

影阴部分的面积为：$18 - 14.13 = 3.87$（平方厘米）

答：阴影部分的面积为 3.87 平方厘米。

（二）布列简易方程求图形的面积

例 1　在图 2－3 中，ABCD 是一长方形，BC＝9 厘米，CD＝6 厘米，且三角形 ABE、三角形 ADF 和四边形 AECF 的面积彼此相等，求三角形 AEF 的面积是多少？

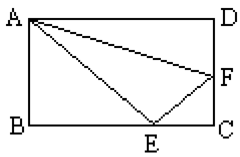


图2—3

分析与解　从图中可以看出，三角形 AEF 的面积，等于四等边 AECF 的面积与三角形 ECF 面积之差，由于三角形 ABE、三角形 ADF 和四边形 AECF 的面积彼此相等，而长方形 ABCD 的面积为（6×9＝）54 平方厘米，所以四边形 AECF 的面积为 $54 \div 3 = 18$（平方厘米）。另外只要算出 EC、FC 的长度，便能求出三角形 CEF 的面积。

因为三角形 ABE、ADF 是直角三角形，面积都是 18 平方厘米。而根据面积公式有

$18 = \frac{1}{2} \times AB \times BE$，$18 = \frac{1}{2} \times AD \times DF$，

AB＝6 厘米，AD＝9 厘米，即得两个简易方程：

$\frac{1}{2} \times 6 \times BE = 18$，$\frac{1}{2} \times 9 \times DF = 18$

解得：BE＝6 厘米，DF＝4 厘米。

CF＝CD－DF＝6－4＝2（厘米），

EC＝BC－BE＝9－6＝3（厘米）

三角形 AEF 的面积为：

$18-\frac{1}{2}\times FC\times CE=18-\frac{1}{2}\times 2\times 3=15$（平方厘米）。

答：三角形 AEF 的面积为 15 平方厘米。

例 2　在图 2－4 中，三角形 ABC 是直角三角形，AB 是圆的直径，且 AB ＝20 厘米。如果图中阴影Ⅰ的面积比阴影Ⅱ的面积大 7 平方厘米，那么 BC 长多少厘米（π＝3.14）？

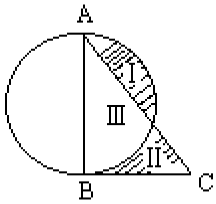


图2—4

分析与解　因为三角形ABC的面积为 $\frac{1}{2}\times AB\times BC$，而AB＝20厘米，

所以只要求出三角形 ABC 的面积是多少，便可求出 BC 的长度来。

从图上可以看出，阴影Ⅰ的面积加上Ⅲ的面积，等于圆面积的一半。阴影Ⅱ的面积加上Ⅲ的面积，等于三角形 ABC 的面积，再利用用阴影Ⅰ的面积比阴影Ⅱ的面积大 7 平方厘米，便可得到下面的等式：

$\frac{1}{2}\times\pi\times\left(\frac{20}{2}\right)^2=\frac{1}{2}\times 20\times BC+7$，

BC＝（157－7）÷10＝15（厘米）。

答：BC 长 15 厘米。

（三）巧添辅助线计算图形的面积

例 1　在图 2－5 中，ABCD 是边长为 9 厘米的正方形，M、N 分别为 AB 边与 BC 边的中点，AN 与 CM 相交于点 O，求四边形 AOCD 的面积是多少？

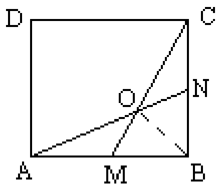


图2—5

分析与解　从图上可以看出：四边形 AOCD 的面积，等于正方形 ABCD 的面积与四边形 ABCO 面积的差。添辅助线 OB 之后，又知四边形 ABCO 的面积，等于三角形 ABO 与 BCO 面积之和。

因为 AB＝BC，M、N 又分别为 AB、BC 的中点，所以有三角形 BON 的面积等于三角形 CON 的面积。

三角形 AMO 的面积等于三角形 MOB 的面积，

三角形 ABN 的面积等于三角形 BCM 的面积。

又因为三角形 AMO 的面积等于三角形 ABN 的面积减去四边形 MBNO 的面积。

三角形 CON 的面积等于三角形 BCM 的面积减去四边形 MBNO 的面积，

所以三角形 AMO 的面积等于三角形 NOC 的面积，这样一来，三角形 ABN 的面积是三角形 AMO 面积的三倍，四边形 ABCO 的面积是三角形 AMO 面积的四倍，而三角形ABN的面积＝$\frac{1}{2}$×AB×BN＝$\frac{1}{2}$×9×（$\frac{1}{2}$×9）

＝20.25（平方厘米），

三角形 AMO 的面积＝20.25÷3＝6.75（平方厘米），

四边形 ABCO 的面积＝6.75×4＝27（平方厘米），

四边形 AOCD 的面积＝9×9－27＝54（平方厘米）。

答：四边形 AOCD 的面积为 54 平方厘米。

例 2　在图 2－6 中，四边形 ABCD 的对角线 AC 与 BD 交于点 E，且 AF＝CE，BG＝DE，当四边形 ABCD 的面积为 25 平方厘米时，三角形 EFG 的面积是多少？

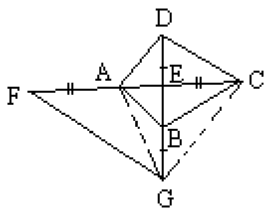


图2—6

分析与解　从图中可以看出：

三角形 EFG 的面积等于四边形 ABGF 的面积与三角形 ABE 面积之和。只要找到四边形 ABGF 与三角形 AED、CDE、BCE 面积之间的关系，问题可望解决。为此可添辅助线 AG 与 CG。

因为 AF＝CE，且三角形 AFG 中 AF 边上的高与三角形 CEG 中 CE 边上的高相等，所以三角形 AFG 与三角形 CEG 的面积相等。又因为 BG＝DE，且三角形 ABG 与三角 ADE 的高，三角形 BCG 与三角形 CDE 的高分别相等。所以三角形 ABG 与三角形 ADE 的面积，三角形 BCG 与三角形 CDE 的面积也分别相等。

四边形 ABGF 的面积等于三角形 AGF 的面积加三角形 ABG 的面积等于三角形 CEG 的面积加三角形 ADE 的面积等于三角形 BCE 的面积加三角形 CDE 的面积加三角形 ADE 的面积。

这样一来三角形 EFG 的面积与四边形 ABCD 的面积相同，所以三角形 EFG 的面积为 25 平方厘米。

答：三角形 EFG 的面积为 25 平方厘米。

（四）利用割补法求图形的面积

例 1　在图 2－7 中有两个边长均为 2 厘米的正方形，其中一个正方形的某一个顶点，正好在另一个正方形的中心位置上。且图中两个阴影三角形面积相等。问这两个正方形不重合部分的面积和是多少？

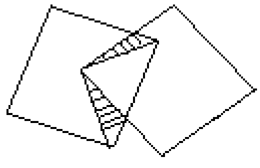


图2—7

分析与解　从图中可以看出，两个正方形的重叠部分是一个四边形，其面积不容易直接求出。但条件告诉我们，图中两个阴影三角形的面积相等，

而这两个三角形各有一条边是正方形对角线长度的一半，还有两组角彼此相等，通过叠合演示可以判定这两个三角形是全等三角形，这一来可将两个正方形重叠的哪个阴影三角形“割”下来，“补”到另一个阴影三角形所在位置上去。这样一来，重叠部分四边形的面积与一个三角形的面积相等。而这个三角形的面积正好是正方形面积的四分之一。

因为正方形边长为 2 厘米，所以正方形面积为 4 平方厘米。重叠部分的面积为：$4\times\frac{1}{4}=1$（平方厘米）。

两个正方形不重叠部分的面积和为：

4×2－1×2＝6（平方厘米）。

答：（略）。

例 2　求图 2－8 中阴影部分的面积是多少（π＝3.14）？

分析与解　从图上可以看出，大直角三角形是由两个全等的直角边长为 2 厘米的等腰直角三角形拼成的。直接求图中阴影部分的面积比较麻烦。仔细观察图形可以发现，图形左、右两半关于大直角三角形斜边上的高线是对称的。如果从中间高线处将图形剪开，再把左半部分按逆时针方向转 180°，拼在右半部下面，得图 2－9，从图 2－9 可以看出，阴影部分的面积，等于半圆的面积减去等腰直角三角形的面积。这个等腰直角三角形的直角边的长度，正好是圆的半径，而圆的半径为 2 厘米。这样一来便有下面的解法。

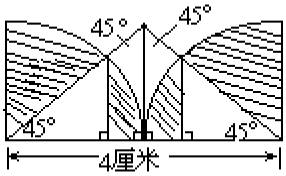


图2—8

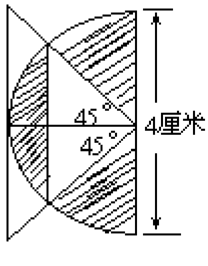


图2—9

半圆的面积为 $\frac{1}{2}\times\pi\times r^2=\frac{1}{2}\times3.14\times4$

$=6.28$（平方厘米），

等腰直角三角形的面积为 $\frac{1}{2}\times2\times2=2$（平方厘米），

阴影部分的面积为 6.28－2＝4.28（平方厘米）。

答：（略）。

（五）利用变形法求图形的面积

前面谈到的“割补法”的主要思路是：“割”下图形的某一部分，再将它改变位置后“补”在图形的剩余部分上，使图形变为一个面积容易求出的图形。而这里谈到的“变形法”，是区别于“割补法”的另一类等积变形。

其特点是不需要“割补”，只利用我们前面提到的结论作一系列等积代换，便可解决问题。

例 1　在图 2－10 中，直线 CF 与平行四边形 ABCD 的 AB 边相交于 E 点，如果三角形 BEF 的面积为 6 平方厘米，求三角形 ADE 的面积是多少？

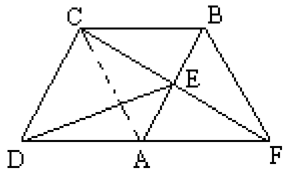


图2—10

分析与解　连 AC，因为 AB 平行 CD，AE 是三角形 ADE、ACE 的公共底边，所以三角形 ADE 与三角形 ACE 的面积相等。

又因为 BC 平行于 AF，AF 是三角形 AFC 与三角形 ABF 的公共底边，所以三角形 ACF 与三角形 ABF 的面积相等。

从图 2－10 中可以看出

三角形 ACF 的面积＝三角形 ACE 的面积＋三角形 AEF 的面积，三角形 ABF 的，面积＝三角形 BEF 的面积＋三角形 AEF 的面积。

从上面这两个等式可以得到

三角形 ACE 的面积＝三角形 BEF 的面积、而三角形 BEF 的面积为 6 平方厘米，所以三角形 ACE 的面积也为 6 平方厘米，再根据三角形 ADE 与三角形 ACE 面积相等这一结论，最后可知三角形 ADE 的面积为 6 平方厘米。

答：（略）。

例2　在图2—11的三角形ABC中，$AE=\frac{1}{5}AC$，$CD=\frac{1}{4}BC$，$BF=\frac{1}{6}AB$。

那么$\frac{\text{三角形DEF的面积}}{\text{三角形ABC的面积}}$＝？

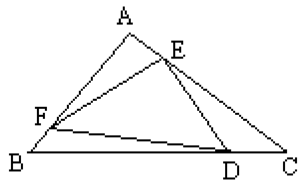


图2—11

分析与解　我们知道，如果三角形的底（或高）相等，那它们的面积比等于它们高（或底）的比。现在利用这一结论来解这个题。

在图 2－11 上添一条辅助线 AD（见图 2－12）。在图 2－12 中，三角形ABC、ACD的高相等，而且$CD=\frac{1}{4}BC$，所以有

$$\frac{\text{三角形ACD的面积}}{\text{三角形ABC的面积}}=\frac{1}{4}$$

另外三角形ACD与三角形CDE的高相等，而且$CE=\frac{4}{5}AC$，所以有

$$\frac{\text{三角形CDE的面积}}{\text{三角形ACD的面积}}=\frac{4}{5}$$

把上面两式相乘，得

$$\frac{\text{三角形ACD的面积}}{\text{三角形ABC的面积}}\times\frac{\text{三角形CDE的面积}}{\text{三角形ACD的面积}}=\frac{1}{4}\times\frac{4}{5},$$

化简得 $\frac{\text{三角形CDE的面积}}{\text{三角形ABC的面积}}=\frac{1}{5}$，即

三角形CDE的面积 $=\frac{1}{5}\times$三角形ABC的面积。

在图 2－12 中，再连结 BE，从图中可以看出，三角形 ABC、ABE 的高相等，而且 $AE=\frac{1}{5}AC$，所以有 $\frac{\text{三角形ABE的面积}}{\text{三角形ABC的面积}}=\frac{1}{5}$。

另外三角形ABE与三角形AEF的高相等，而 $BF=\frac{1}{6}AB$，所以有

$$\frac{\text{三角形AEF的面积}}{\text{三角形ABE的面积}}=\frac{5}{6},$$

把上面两式相乘，得

$$\frac{\text{三角形ABE的面积}}{\text{三角形ABC的面积}}\times\frac{\text{三角形 AEF 的面积}}{\text{三角形ABE的面积}}=\frac{1}{5}\times\frac{5}{6}$$

化简得：$\frac{\text{三角形AEF的面积}}{\text{三角形ABC的面积}}=\frac{1}{6}$，即

三角形AEF的面积 $=\frac{1}{6}\times$三角形ABC的面积。

在图 2－12 中，再连结 CF，利用上面同样的方法可得

三角形BDF的面积 $=\frac{1}{8}\times$三角形ABC的面积。

设三角形 ABC 的面积为“1”个面积单位，则有

$$\frac{\text{三角形DEF的面积}}{\text{三角形ABC的面积}}=\frac{1-\frac{1}{5}-\frac{1}{8}-\frac{1}{6}}{1}=\frac{61}{120}$$

答：（略）。

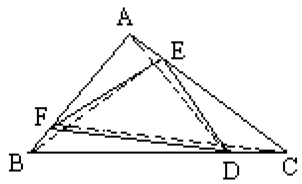


图2—12

习题二

1．在图 2－13 中，ABCG 和 CDEF 分别为边长为 10 厘米、12 厘米的正方形。求图中阴影部分的面积是多少？

2．在图 2－14 中，ABCD 是个长方形，弧 DF 和 DE 是分别以 A、C 为圆心，AF、CD 为半径画出的。求图中阴影部分的面积是多少（π＝3.14）？

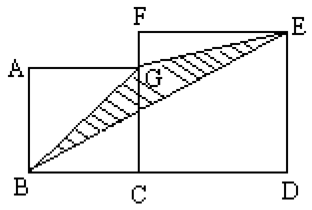


图2—13

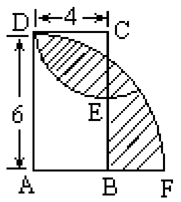


图2—14（单位：厘米）

3．在图 2－15 中的平行四边形的面积为 48 平方厘米，高为 6 厘米，求图中阴影部分的面积是多少？

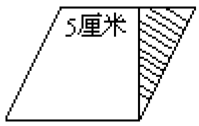


图2—15

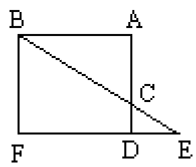


图2—16

4．在图 2－16 中，正方形 ABFD 的面积为 100 平方厘米，直角三角形 ABC 的面积，比直角三角形（CDE 的面积大 30 平方厘米，求 DE 的长是多少？

5．在图 2－17 中，长方形 ABCD 的面积为 36 平方厘米，E、F、G 分别为边 AB、BC、CD 的中点，H 为 AD 边上的任一点。求图中阴影部分的面积是多少？

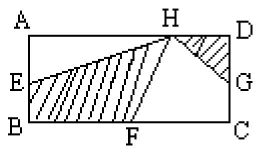


图2—17

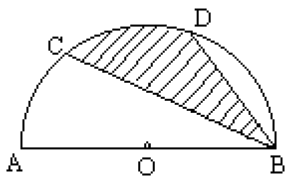


图2—18

6．在图 2－18 中，C、D 是半圆弧 AB 上的两个三等分点（即弧 AC、弧

CD、弧 BD 的长度相等）。已知圆的半径为 6 厘米，求图中阴影部分的面积是多少？（π＝3.14）

7．在图 2－19 中的两个四边形都是正方形，而且外边大正方形的边长为 4 厘米，求图中阴影部分的面积是多少？

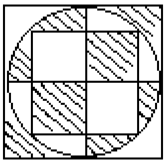


图2—19

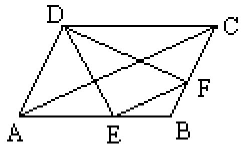


图2—20

8．在图 2－20 中，ABCD 是平行四边形，AC 为对角线，且 EF 平行于 AC，如果三角形 ADE 的面积为 10 平方厘米，那么三角形 CDF 的面积是多少？

9．在图 2－21 中三角形 ABC 的各边上，分别取 AD、BE、CF 各等于 AB、BC、CA 长的三分之一，如果三角形 DEF 的面积为 2 平方厘米，求三角形 ABC 的面积是多少？

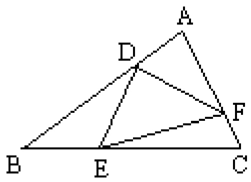


图2—21

第三讲　钉板趣题

一、钉板与皮筋

所谓钉板，就是把钉按一定的要求钉在木板上，这样带有钉的木板叫钉板。钉板与皮筋所讨论的问题是：以钉板上的某些钉为顶点，然后用皮筋将这些顶点依次连起来（以后简称去套这些钉），就可以得出一些不同的多边形来，再计算某种多边形的个数，下面举几个例题来说明一下做这类问题的思路和注意事项。

例 1　用 20 枚铁钉按图 3－1 所示，钉成相邻的横、竖两排距离都相等的 4×5 矩形钉阵，现在给你许许多多的皮筋，以这些钉为顶点，你能套出多少个正方形来。

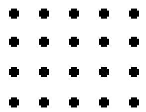


图3—1

分析与解　此题与第一分册中讲到的数正方形个数的问题有些相似。为方便起见，我们假定相邻两行、两列钉之间的距离为“1”，用皮筋去套这些钉，首先可以得到图 3－2 那样的图形。在图 3－2 中，边长为“1”的正方形有（4×3）12 个，边长为“2”的正方形有（3×2）6 个，边长为“3”的正方形有 2 个。除了上面那些正方形外，还有其它的正方形。如果把图 3－1 中某些小正方形相对顶点上的钉用皮筋连起来，便可得图 3－3。在图 3－3 中，因为 AB、BC、CD、DA 都是边长为“1”的正方形的对角线，所以 AB＝BC＝CD＝DA。另外角 A、B、C、D 都正好是两个 45°角的和，故它们都等于 90°，这一来四边形 ABCD 是个正方形。图 3－3 中和 ABCD 一样的正方形有（3×2）＝6 个。

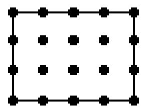


图3—2

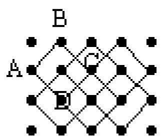


图3—3

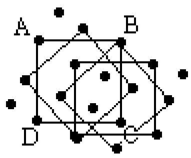


图3—4

另外，如果把某些两个相邻的正方形拼成的长方形相对顶点上的顶点也用皮筋连接起来便得图 3－4。在图 3－4 中，因为 AB、BC、CD、DA 都是相同长方形的对角线，所以 AB＝BC＝CD＝DA。通过图形的拼补可以算出角 A、B、C、D 都等于 90°，因此四边形 ABCD 也是正方形，图 2－4 中和 ABCD 一样的正方形有（2×2）4 个

通过仔细观察，边长比图 3－4 中 AB 线段还长，位置又不太正规的正方形不存在。故共可套出正方形：