

# 第 1 编

## 数学教育概论

在过去的 30 年间，关于数学教育的研究蓬勃发展，数学教育已成为一门独立的学科。对于这门学科几乎没有一个普遍接受的定义，不同的研究者依据其对数学教育的不同解释与理解，从事着研究。正是这些数学教育观点上的差异，甚至冲突，给数学教育的发展注入了活力。为了加深对数学教育形成与发展内涵的理解，在本编中，我们将首先对数学教育研究的历史做一简短回顾。然后介绍几种有代表性的、对数学教育发展起举足轻重作用的数学教育的界定，然后提取各种界定中的合理内核，对数学教育的任务做一解释。紧接着概括现代数学教育发展的特征，总结数学教育研究的热点问题，便于广大数学教育工作者了解历史、把握现代、展望未来，共创数学教育研究的新天地。

# 第 1 章

## 数学教育研究的历史回顾

数学教育作为人类活动的一个领域，有着几千年的历史。根据柏拉图（Platon）所著《美诺》（Meno）中记载，在公元前 5 世纪，苏格拉底（Socrates）曾用巧妙的提问，去引导一个小奴隶发现以正方形的对角线为边的正方形，其面积是原正方形面积的两倍（苏格拉底与奴隶之间的具体对话，请查阅本章附录）。16 世纪的学者雷科德（R. Recorde）不仅教数学，而且也写教科书，在书中使用了苏格拉底的对话法去处理证明、定义和理解。19 世纪初，裴斯泰洛齐（J. H. Pestalozzi）、福禄倍尔（F. W. A. Froebel）等教育家提出要把教学方法建立在具体经验和发展心智官能的教学目的上，这些思想对学校数学教学产生了一定影响。这些事件都是数学教育活动的缩影。一直到 19 世纪末，在高等教育里开始培养数学教育的时候，数学教育终于以一个行业的面目出现了。这首先归功于德国著名数学家克莱茵（F. Klein），他于 19 世纪末将数学教学法课程引入大学，从而为数学教育在大学争得一席之地，他不仅在几所大学设立了这样的课程，而且指导了第一位数学教育博士，即哥廷根大学的施马克（R. Schimmack）博士。在其他国家也开设专门的数学教学课程，培养将来去

中学教数学的大学生 如日本参照美国师范学校的模式 于 1908 年前后创办了 75 所师范学校 与此同时 在美国兴起了一场运动 开始把师范学校发展成为教师学院；德国则在 20 世纪 20 年代建立了新的培养师资的高等教育机构——师范学校，数学教育作为一个学术领域就逐渐地发展起来，从事数学教学的大学教师不仅要教书，而且要进行数学教育研究工作。

在此我们首先追溯一下数学教育研究的两个根源，一是有关数学教学内容的研究的数学方面的根源，二是心理学方面的根源，主要是对哪些内容应该怎样教和学所进行的研究。然后沿着时间的脉络梳理一下数学教育发展的历史轮廓，分三个时间段来考察。最后从不同数学教育社团成立的角度看数学教育发展的历史。

## § 1 数学方面的根源

最先关心数学教育的数学家是德国的克莱茵，1872 年他在获得爱尔朗根 (Erlangen) 大学数学教授职位之际，发表了著名的“爱尔朗根纲领”，其中他给出了如何利用一种变换群的不变量去刻画一种几何学的论述，这对几何学的研究给予了富有成效的新的推动力，与此同时他也发表了一篇有关数学教育的就职演说，强调了数学所拥有的形式教育的价值，号召在大中学校进行更为活跃的教学，提倡未来的教师要有足够的数学知识，从而有能力从事独立的研究工作。同时他哀叹人文教育和科学教育的分离。在 1888 年 他建议普鲁士的各工程学院和大学合并，但是这种建议未被接受。于是他开始投入对中学数学教育改革的研究，他相信要使现在高等教育的要求得到满足，中小学数学课程必须作实质性的变革，他认为解析几何和微积分应该下放到中学去，函数的概念应该成为改革的首要。

到了 20 世纪初，不断有数学家投入到中小学改革中。法国在 1902 年通过政府的法令改革了它的几何教学，数学家鲍莱尔 (E. Borel) 哈达玛 (J. Hadamard) 和勒贝格 (H. Lebesgue) 等都写了有关文章

和教科书。在英国，皇家科学学院的佩里 J. Perry 制定了使用数学的新大纲并在 1901 年向大不列颠科学协会提交报告，严厉批评了当时的数学教学，认为应该采用更加直观和以实验为基础的教学方法。哥伦比亚大学的穆尔 E. H. Moore 于 1902 年从美国数学会主席的位置上退休，他赞同佩里的批评，并提倡一种将数学各分支统整起来的课程。他还号召职业数学家们投身到中小学的数学改革中去。当然他们的投入主要是采取编写教材的方式，对中小学数学该教什么的问题进行了叙述。这些知名数学家对于数学教学改革的关心为当代数学家做出了榜样，在以后几十年的数学教育研究中无不出现数学家的身影如弗勒登塔尔(H. Freudenthal)、陈省身教授等等。

在数学家关心并参与数学教育的同时，心理学上的一系列研究对数学教育发展也产生深刻影响。

## § 2 心理学方面的根源

首先是心理学上关于思维的研究常常涉及到解数学问题的心智能力的问题，涉及数学思维发展的问题。19 世纪末，作为智力测量创始人的比纳(A. Binet)建立了他的心理实验室。1920 年刚刚获得自然科学博士学位的皮亚杰(J. Piaget)来到了比奈实验室他当时的任务是：将遗传学家伯特在英国发展起来的推理测试工作用到巴黎的儿童身上，并加以标准化。他对儿童如何获得答案的过程特别感兴趣，尤其是当答案不正确时儿童的思维过程引起他的关注。“皮亚杰更关心发展进程中个体内部的变化”<sup>〔1〕</sup>在研究中他逐渐形成了“临床法”的研究方法，他的研究对数学教育研究的内容和方法论都产生了重大影响。

在这同时霍尔(G. S. Hall)也于 1883 年在霍普金斯大学建立了心理实验室，他主张儿童的发展方式和人类的发展方式大致相同，认为在儿童期去影响智力的发展是没有多大意义的。他把小学数学的教学看成是为了养成习惯，从而在他的小学课程中，分配给算术的

时间很少，强调要把儿童的兴趣放在首位。第一次世界大战后，霍尔的思想成为美国反智力运动的一个组成部分，那个运动对数学在学校课程中的地位造成了威胁。

另外，1896年库尔普 O. Kuelpe 在符茨堡 (Wuerzburg) 建立了心理实验室，形成了对思维研究有很大影响的学派，他们宣称：不带有任意意象 (image) 的抽象思维是存在的，思维的研究不是通过它的内容而是通过它的作用去进行的。库尔普的学生韦特墨 (M. Wertheimer) 创立的格式塔心理学 (Gestalt psychology) 对创造过程和问题解决给以一定程度的研究，他通过许多数学的例子，阐述了他的建设性思维理论。符茨堡学派中另外的心理学家塞尔兹 (O. Selz) 和邓克尔 (K. Duncker) 都对问题解决过程进行深入的分析，其中包含许多复杂的数学问题，撰写了有深入影响的著作。受到塞尔兹影响的一位心理学家维果茨基建立了一种心理发展的理论，他主张教育应该指导发展而不是跟随发展，他使用了一种动态的研究方法，即在教学的条件下下去观察思维发展的过程；他还提出关于最近发展区的概念，这些思想相继得到西方研究者的接受和采用。

这些对思维的心理学研究为人们理解怎样学习数学的问题提供了帮助。而心理学中的另一个研究传统，即有关学习心理学的研究，对数学教育发展有着更直接、更大的影响。如桑代克 (Thorndike) 的行为主义理论强调，如果对外部刺激有满意反应，由此而引起的学习是主动的和有选择的学习，他认为刺激与反应之间的联结可以通过一种正强化，即成功就能获得报偿而得到加强，他以这种思想编写了一系列算术课本 (1917) 而后又撰写了《算术心理学》(1922) 和《代数心理学》(1923)，在这些著作中他的刺激和反应原则充分地用于数学教学中。他的理论与训练迁移说产生了冲突，训练迁移说认为思维可以通过特殊科目的教学而得到一般性的训练。而桑代克并没有否定迁移的可能，他指出“只是，一、不能认为迁移必然发生；二、它极少自动地发生；三、通过直接的教学以达到所要的结果通常比起期望波及的效果要更有效、更经济”。<sup>[2]</sup> 桑代克认为只有在迁移情况含

有与训练情况‘全等因素’条件下迁移才会发生。他的这种全等因素论以后发展为新行为主义的累积学习论。

一些心理学家对桑代克这些理论提出异议，如贾德（C. H. Judd）通过一项研究反驳桑代克理论：他让五、六年级的学生练习用标枪射击水底下的目标，那些学过折射定律的学生比起那些未学过这条定律的学生来，更能考虑到目标深度的变化。贾德议论说，迁移是通过一般化实现的。他写道“那种认为迁移并不普遍发生或只轻度发生的心理学是动物意识心理学。高等心理过程的心理学则教导我们：一切教育的目的和目标都是在发展系统的思想，这种思想能从它被获得的情景中迁移到别的情景中去。一般化思想的体系把人类的经验提到抽象、一般化、概念性理解的高度去加以阐明和澄清”。<sup>[3]</sup>许多数学家也都为训练价值进行辩护，如芝加哥大学的杨（J. W. A. Young）指出比数学内容更为重要的是这样一个事实，即它最典型、最清晰、最简单地给出了一些思维模式的范例，它们对任何人都有着极大的重要性。训练迁移一直是心理学家和数学教育工作者争论的重要议题，有时使他们两者处于对立的阵营。如对于发现学习法，心理学家们的看法相互分歧，而数学教育工作者们则倾向于抱正面的和乐观的态度。但是随着认知心理学的到来，数学教育工作者与心理学家的关系更多的是合作。

### § 3 数学教育研究发展的三个历史阶段

#### 3.1 数学教育研究发展初期

19世纪末至20世纪50年代，一些局部的实验成为各个数学教育研究方向的萌芽。

正如上述两个根源中提到的，早期的数学教育作为一个研究领域是由数学家们奠定的。如，德国的克莱茵，英国的戈弗雷、布兰福德等，美国的史密斯和杨都是数学教育研究领域的先驱。他们虽然

没有做过很多当今意义下的数学教育研究工作，但是所进行的一些实验研究或者发表报告分别开创了不同的数学教育研究方向。如史密斯 1895 年在密执安州某州立师范学校教数学时，做了一个小小实验，主要涉及在学数学和解数学问题中的性别差异，他主要引用霍尔（1891）代表作《儿童入学时的心理内容》中的一段报告——女孩在空间概念方面擅长，而男孩则在数概念方面领先，来考察自己班上学生（多为女生）的考试成绩，也考察另一个学校所教班级的成绩记录，发现男学生的成绩稍好些，特别是在算术和几何上。他总结了导致差异的一些原因，包括选择因子和主考人的性别等，虽然这些实验和分析很不系统和成熟，但是这些活动为研究数学学习中性别差异课题奠定了基础。

这一时期人们还特别注意对儿童的研究，首先在德国和美国受到教育学家的重视。如在美国霍尔是儿童教育的创始人，20 世纪初在霍尔创办的克拉克大学、哥伦比亚大学和哈佛大学就有研究数概念或空间概念的论文，其研究思想主要是强调自然主义和描述性的学习。在这个领域除了霍尔，还有 20 世纪初的教育家蒙台梭利（M. Montessori）关于将活动与材料应用于教导儿童学数学的论述的影响，也是不可低估的。还有其他一些研究倡导的计数活动、猜谜、及模式辨认仪器，直到今天还被使用着。当然他们对儿童在数学教育中的表现研究得不是很多，而只是随意地提出一些问题，然后观察学生的反应，或者采用问卷的方式，肤浅地对儿童进行研究。伯斯威尔和贾德曾对 1925 年以前的算术研究作了调查，并指出：“目前数学的再组织工作在许多不同的方面通过许多实验工作者的努力在进行着，它是被当作当前众多科学研究的一种直接的成果来看待的……。当前运动的主要特征可以说是在于：它要求以下列一些工作作为改革的依据，即对学校的工作成绩做出缜密的测量；对社会的要求，以及对学生的智力过程做出分析研究”。<sup>[4]</sup>可见当时在数学教育领域已经开始重视儿童学习的研究，这些是当今数学学习中儿童智力研究的前奏。

尽管人们对小学算术课程不断提出质疑，认为要改变形式地学习算术的现状，提倡非形式地加以学习，但是他们坚信懂得算术的重要性，对算术课程在小学中的地位没有异议。但对中学的课程就两样了。在 20 世纪 20 年代和 30 年代，对高中是否人人要读数学提出了疑问，使得数学在高中课程中的地位受到了攻击，从而引起一些数学教育工作者对高中数学教学的目标进行再考察。由于这些目标长久以来是由数学专家们所确定的，为了学生能够进入大学学习高等数学作好准备。针对这个现象，一些研究人员探讨是否可能有其他教学目标。他们考察学习过程、教科书、专业文献、学生考试成绩以及专家们的意见，或者征求教师的意见来寻找目标。期间，对高中数学学习的“训练价值”或“迁移效果”进行了大量研究，福西特 H. Fawcett) 对此进行了探讨，并撰写了被广为引述的博士论文 (1938 年)，他指出要把高中的论证几何课建立在非数学的情景上，通过术语、定义、假设的建立去促进学生的发展，使这门课成为一种促进反思思维的课。

另有一部分人从个人数学能力的差异去研究数学课程的设计，如果不同的学生读不同的数学，就要找出一定的方法，以便确定哪些学生学习某些特殊的课较为有利，学生被按能力分班，他们设计特殊的测验，来研究学生在代数与几何上所犯的 error，以及研究数学能力与其他能力的相互关系，等等。

这个阶段对于高中数学课程的研究还包括：代数、几何、三角这样的科目是应该分科进行教学，还是作为一门统一的或相关的数学课。把不同的数学分支合成一门单一课程最初见于 19 世纪的法国和普鲁士。在英国，这种单一化运动进展缓慢，如 1907 年梅尔 (D. Mair) 设计了一门统一数学的课，但直到 1921 年才有统一的测验。在美国，这种运动甚至走入歧途。

这些研究都是涉及数学课程领域的，它们是高中数学课程发展的重要阶段。

### 3.2 数学教育研究发展的黄金时代

数学教育研究发展到 20 世纪 50 年代初期,已经具有一定的规模(大量是实验性研究)而且数学课程问题(即数学应教什么和怎么教),在整个研究进程中占支配地位。研究者试图在学校数学课程中提出一些实质性的改革,由此诞生了一些流行于当时的课题,如学生能否将他们的数学知识从一种场所迁移到另一种场所?不同年龄的学生是怎样学习同样的数学技能的?等等。另外,在这段时期数学教育工作者意识到数学教育与其他学科的紧密联系,如在确定数学教育领域的工作时,往往要听从数学家和心理学家的指导。如国际数学教学委员会(ICMI)的前身国际数学联合会的秘书长认为,数学太重要了,必须由数学家们操纵。与此同时心理学家的研究工作,如皮亚杰和布鲁纳(Bruner)的认知心理学对学校数学教育产生很大影响。因此研究人员倡议要更多地进行协作研究,要找出把具有才干和特长的人们联合起来共同从事研究的途径。正是各方面的协作,从 20 世纪 50 年代中期开始,数学教育发展进入了黄金时代。

20 世纪 50 年代中期至 70 年代,这是数学教育发展的第一个黄金时代,主要特点是各路研究者逐渐联合,对数学学习、数学教学和数学课程问题展开讨论和研究。泰勒(Tyler)在 1967 年的一次题为“数学教育所需要的研究”的大会中指出:“在这研究事业内部应鼓励多种多样的研究兴趣,而不是强调某种超人的模式,认为这种超人有着一个优秀研究人员的所有兴趣和可取的品质。……研究,它并不是一种孤家寡人的事业,也不是只和单纯的一类人有关。它是一个规模宏大的集体的事业,它涉及多方面的才干,而且也需要多方面的活动,以期获得最大的效果。”<sup>[5]</sup>

数学家、心理学家、教育家、课堂教师和诸如物理学家、工程师、经济学家等各种数学的应用者开始联合起来,为数学课程的设计出谋划策,对数学的学习与教学进行深入研究,而且研究不断地跨越学科的界限和国界。如皮亚杰 1964 年对美国进行了访问,康奈尔大学

和加州大学专门为迎接他召开了关于认知研究与课程发展的讨论会，在北美的数学教育研究人员中则掀起了一阵“皮亚杰热”。又如 1971 年 4 月，在东京的日本国立教育研究所召开的美日数学教育联合讨论会上，集合了来自两个国家的几十位数学教育工作者，会上大部分的报告和讨论都是关于课程改革方面的。1972 年在英国埃塞特召开了第二届数学教育国际大会，数学学习心理学的研究成为这次会议的主要议题。

另一个特点是，数学教育开始被作为一门实验性学科看待。1968 年，贝格尔(E. G. Begle) 在一份报告中指出，大量研究工作没有对数学教育的真正改进有实质性的用处，随后在 1969 年的第一届数学教育国际会议上他建议数学教育应仿效物理与自然科学所用的观察与推测的模式，他说“为了建立起一种数学教育的理论，我们需要遵循我们物理学的、化学的、生物学的等学科的同事们所用的方法。……我们需要对数学的教和数学的学作大量而仔细的、经验主义的观察，并以此为出发点；在观察中所见到的任何规律性的东西都将引出一假设。然后这些假设将由进一步的观察所检验、改正和明确起来等等。”<sup>[6]</sup>

他提出自己的研究信条，即“只有变得更为科学化，我们才能达到改进儿童教育这个人文主义的目的”。他为此设计了一系列结构性的教学单元，以便在比较教学方法时设法控制所产生的偏差。他所领导的全国美国数学能力纵向研究组在 20 世纪 60 年代初对十万名学生的成绩进行考察工作，希望肯定“新数学”课程改革的成效。这种课程评估工作，把心理学家和数学家结集起来，去建立思维能力的评估手段，以及将数学应用于非常规情景下的能力的评估手段，对待数学的方方面面的态度的评估手段，等等。对这些大型试验的分析和处理由于计算机技术的发展得以有效实现。

他还专门著书把近 7 000 份的研究工作按其涉及的会影响数学学习的变量如教师、学生、教材、教学特点等的多寡加以分类，然后对那些研究工作的主要结果进行评论。

这段时间在欧洲研究人员主要开发来自前苏联的活动论的应用。这种理论从社会环境和文化环境两方面去研究人们的日常活动，并把这些活动作为分析心理机能的元件。另一方面，欧洲的研究者也在进行所谓“教与学的实在论方法”的研究，把数学看作为一种产生自实际情景的人类活动，要学生通过研讨他们自己提出的问题而进行学习。在这两种研究中，所学知识和教学过程的社会性质是中心问题。研究人员开始严肃认真地对待数学教育在社会方面和文化方面的问题。

还有一大特点是，在许多国家数学教育正成为一门大学的学科，教师教育变得更加专业化了，建立起来的学科给人们开创了一些新的职业，这个领域开始考虑自己的活动。

### 3.3 数学教育发展从反思步入成熟

然而到了 20 世纪 70 年代末，人们对教育研究，特别是数学教育研究工作究竟有无贡献提出了质疑，如有一份批评指出“教育研究是在增长，但在多数情况下，它显然毫无成就”。它似乎既不能满足实践工作者的需要，也没有做出有价值的工作，使资助机构感到满意。研究人员开始感到沮丧，因为他们也没有达到自己所希望的研究目标。

鲍尔斯菲尔德 (Bauersfeld) 在 1979 年 4 月于波士顿召开的数学教育国际年会上，建议数学教育这个行业要进行“模式上的根本性变化”包括三个方面 首先要建立良好的数学教育理论框架 其次 研究和实践遵循着不同的模式，不要为了追求科学的尊严而模仿自然科学的研究设计；第三，为了将研究成果用于实践，数学研究要走出图书馆和实验室，走向课堂和学校；另外，研究人员应是跨学科研究群体的成员。

这个时期关于数学教育研究的发展，“反映了数学哲学及其与学和教的关系方面的重新关注”。<sup>[7]</sup>

20 世纪 80 年代开始，数学教育的研究不断地追求理论与实践的结

合。跨入信息时代的数学教育提出更多值得人们研究、探索的课题。

## § 4 各种数学教育社团的成立

数学教育发展的另一个标记是各种相关的社团由于发展的需要纷纷成立，承担了各种不同的数学教育理论与实践研究课题，从而也推动了数学教育的发展。这里首先要认识的是国际数学教育委员会。

1908 年在罗马举行的第四次国际数学家代表大会（ICM）上成立了名为国际数学教育委员会（ICTM）的新组织。克莱茵被选为第一任主席（任职到 1925 年他逝世时为止），日内瓦大学的费尔（Hermi Fehr）为秘书长。由费尔与巴黎多艺大学的莱桑（C. Laisant）1899 年创办的杂志《数学教学》成为委员会的官方杂志。这个机构的成立象征着职业数学家对数学教育的积极关心。国际数学教育委员会的公开目的是报道世界各国各类学校的数学教学的状况，它成为各国数学教育研究交流的纽带。各国也相继成立子委员会，对自己国家的数学教育状况进行调查与总结，然后向国际委员会汇报。当时递交的报告多数是描述性的，如罗列一些教学大纲或主要课程，国际委员会再试图进行国际间的比较研究。

1920 年成立了全美数学教师理事会（NCTM）该机构致力于改进数学的教育与学习，为中小学及高等院校的数学教育工作者提供交流的话题与舞台，被公认为努力保证所有学生获得最优秀数学教育、为每个数学教师提供发展机会的带头人。1989 年制定的学校数学课程与评价标准，1991 年发表的教学数学的专业标准以及 1995 年推出的学校数学评价标准成为现代数学教育改革达到旺盛的标志。<sup>[8]</sup>

到 20 世纪 60 年代末，数学教育发展进入黄金时代，各国相继建立自己的研究机构，英国在切尔西（Chelsea）学院和诺丁汉（Nottingham）大学建立了数学教育研究中心，他们不仅开发有独创性的新教学材料，而且借助这些教材对教与学提出指导性建议；同期在法国也成立了数学教学研究所（IREM）在荷兰成立了现在的弗勒登塔

尔研究所 IOWO) 从事课程的开发与研究。在德国成立了数学教学研究  
研究所 (IDM) 现代的许多德国数学教育家是从这个研究所起步的 他们  
从事着数学教与学的不同方向的研究, 包括数学课程的研究与开发;  
数学教学基础研究 学科教学研究 教师培训教材的开发与研究等。

在澳大利亚, 1977 年莫那西 ( Monash ) 大学的克莱门茨 (K.  
Clements) 和澳大利亚教育研究理事会的福伊斯特 (J. Foyster) 创立了  
澳大利亚数学教育研究组 (MERGA), 它的第一次讨论会吸引了大约  
80 名参加者。

1976 年夏天在德国卡尔斯鲁厄 (Karlsruhe) 召开的第三届数学教育  
国际大会上, 宣告正式成立数学教育心理学国际组 (PME) 它于  
1977 年 8 月底在乌德勒支 (Utrecht) 召开第一次代表大会。这个机构  
是隶属 ICMI 的一个研究组 它现有来自 39 个国家约 500 名组员。

结 语 反观数学教育研究的历史, 我们惊喜地发现, 数学教育  
长期以来受到数学家、科学家、心理学家、社会学家、哲学家等的关  
注, 这为今后的发展打下扎实的基础。数学教育研究萌发于 19 世纪  
末。从 20 世纪 50 年代起数学教育发展进入第一次黄金时代, 这一  
时代表现出三大特点, 一是来自自然科学、数学、心理学等领域的专  
家, 从不同角度对数学课程与教学进行系统研究; 二是数学教育被看  
作一门实验性学科; 三是数学教育真正成为大学的一门学科。直至  
20 世纪 70 年代人们开始理性地对待数学教育的发展, 并深刻反思  
已有的研究成果, 认识到数学教育研究需要系统的理论框架以及相  
应的实践模式。从 20 世纪 80 年代中期起, 数学教育研究再一次进  
入黄金时代, 研究课题充分反映时代的特点。

## 附 录

苏格拉底的方法<sup>[9]</sup>

苏格拉底 (对奴隶) 请告诉我这是否正方形 你能否理解。

奴隶：是。

苏：我们是否可以在这里加上一个相等的正方形？

奴：是。

苏：有了两个是否可以加上第三个？

奴：是。

苏：最后在这个角上是否还可以再添上一个？

奴：是。

苏：这里是否共有四个正方形？

奴：是。

苏：现在整个图形是原来图形的多少倍？

奴：4 倍。

苏：但你是否记得，它应该是某个图形的 2 倍？

奴：当然记得。

苏：从顶点到顶点连结这样一条直线，是否就将正方形分成两个相等部分？

苏格拉底（问奴隶的主人门诺 Meno）：亲爱的门诺，你是怎么想的，他是否表达了任何不是他自己的意见？

门诺：没有，全部是他自己的想法。

## 注 释

[1]（美）R·W·柯普兰著 李其维等译：《儿童怎样学习数学》上海教育出版社 1985 年版 第 46 页。

[2][3][4][5][6]（美）Kilpatrick, Jeremy(1999)‘一份数学教育研究的历史’见〔美〕D.A. 格劳斯主编 陈昌平等译：《数学教与学研究手册》上海教育出版社 1999 年版 第 20 页 第 21 页 第 30 页 第 71 页 第 73 页。

[7] J. A. Dossey (1999):“数学的性质 其任务及影响”见〔美〕D.A. 格劳斯主编 陈昌平等译：《数学教与学研究手册》上海教育出版社 第 90 页。

[8] 有关该机构的最新研究动态请查阅 <http://www.nctm.org/>。

[9]〔荷〕弗勒登塔尔著 陈昌平等编译：《作为教育任务的数学》上海教育出版社 1995 年版 第 92 页。

# 第 2 章

## 数学教育的任务

### § 1 数学教育的界定

数学教育普遍关心的是课程的结构、教学主题与教学方案的选择,以及能成功地向学生介绍有关教学内容的教学方法设计,另外还要关注学生数学学习的复杂过程,它体现了一种宏观的教学观点,即教学要关注三要素间的关系,一是由个人或社会构成的主体(S),二是构成客观世界的各个真实部分(R),三是关于这些真实的理论知识(T)。(见图 2-1)

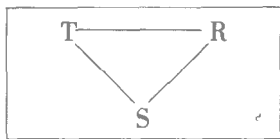


图 2-1 真实 R、主体 S 与理论 T 之间的三角模型

资料来源: Kapadia, Ramesh and Borovenik, Manfred (1991): *Chance encounters: Probability in Education*. Kluwer Academic Publishers. p.5.

如果我们把数学教育的重点放在理论顶点 T 上,那么内部的数学关系对教育显得非常重要,数学教育主要提供关于教什么、如何教以及何时教的指

导。如果我们以顶点  $S$  上的个体的认知结构为出发点，那么数学教育与心理学的分析相关；如果从社会情境下看这个顶点  $S$  上的学习对象，那么数学教育就以社会和班级的观察为中心；如果我们将重点放在顶点  $R$  上，那么数学教育突出的是研究专门理论如何构造真实 如何进行解决问题等。

通过对三角形各个顶点的分析，我们可以体验各个顶点之间的相互关系。对于理论顶点  $T$  的讨论 使我们能够洞察 为满足实际模型真实  $R$  的行为方式 并且洞察主体  $S$  从结构上考虑问题的方式与程度。对顶点  $S$  的心理学分析不仅要洞察主体思考的方式，而且要考察理论  $T$  的形成过程，以及相应的论证。显然  $R, S, T$  之间的关系是不断发展的，且具有重要的教学意义，它们可以提高课程结构的价值和实际教学的价值。在数学教育作为一门学科发展的简短历史中，这个教学三角形可以反映出许多重要的发展线索。

数学教育是一门应用性科学，而不是纯科学，它必须与教育及其内在的价值观念联系起来，因此它的基本思想是相对的，而非绝对的；它与课堂真实也有密切关系，那些来自历史、哲学或心理学的基本研究虽然非常重要，但是必须与课堂实践相结合。

20世纪 60年代“新数学”运动过多地注意了顶点  $T$  希望通过集合与逻辑等现代数学思想产生一种连贯的理论结构，这种理论结构是一个包含自我的实体。尽管这一过程证明了理论本身的合理性，但理论的获得却远离学习者，并且完全忽视了理论  $T$  与  $R$  和  $S$  的关系。在人们认识了这次运动的缺陷，即对实际经验的忽视后，逐渐开始注重顶点  $R$  的应用，但还是暴露很多问题，如解决实际问题是非常繁重的任务，其间包含的数学关系也过分琐碎，学习者很难把握解决问题的策略。另外，某些假性的“真实问题”因为其虚伪性也为学习者带来许多困难。也有一部分研究者把注意力放在顶点  $S$  上，对主体的思维进行研究，分析学习者概念获得的特征、问题解决的策略等。走过不平坦的研究道路，数学教育专家认识到统整三角形三个顶点，对数学教育的重要意义。由此产生了不少合理的数学