

## I

## 前 言

## 第 一 编 数学教育概论

- 猿 第 一 章 数学教育研究的历史回顾  
 源 异 一 数学方面的根源  
 缘 异 二 心理学方面的根源  
 苑 异 猿 数学教育研究发展的三个历史阶段  
 苑 猿 一 数学教育研究发展初期  
 苑 猿 二 数学教育研究发展的黄金时代  
 苑 猿 猿 数学教育发展从反思步入成熟  
 猿 异 源 各种数学教育社团的成立
- 苑 第 二 章 数学教育的任务  
 苑 异 一 数学教育的界定  
 苑 异 二 费歇的数学教学开放性观点  
 苑 异 三 费序贝恩关于直观和数学的交互观点  
 苑 异 四 弗勒登塔尔的教育现象学  
 苑 异 五 鲍尔斯菲尔的经验主观性观点
- 苑 异 圆 数学教育的任务  
 苑 异 猿 现代数学教育的发展  
 苑 猿 一 普通心理学影响  
 苑 猿 二 建构主义与数学教育

猿	猿猿 认知科学与数学教育
猿	猿原 社会的影响
猿	异原 数学教育研究中的热点问题
猿	源员 数学学习的复杂性
猿	源圆 数学专业领域的主要作用
猿	源猿 数学概念的双重性：过程—对象
猿	源原 学生对证明的疏远
猿	源缘 数学教育与信息技术
源	源远 对教师任务的重新审视
源	第 猿章 数学教育的目标
源	异员 数学教育的宏观目标
源	员员 把握生活实践
缘	员圆 认识数学文化
远	员猿 加强全球化视野
远	员原 增进日常思维能力
远	员缘 培养社会责任心
苑	异圆 数学教育的微观目标
苑	圆员 来自发展领域的目标
苑	圆圆 来自知识技能领域的目标

## 第 圆编 数学学习理论

愿	第 源章 数学认知学习理论
愿	异员 皮亚杰的智力发展理论
愿	员员 智力发展阶段说
愿	员圆 对皮亚杰的智力发展理论的批评
愿	异圆 爱比力思维运算学说
愿	圆员 爱比力对皮亚杰理论的修正
愿	圆圆 运算方式内化为思维运算
愿	圆猿 运算的内化和实践的钻研

猿	异猿	加涅的认知学习理论
猿	猿	学习的信息加工模式
猿	猿	知识学习的八阶段
猿	猿	学习的结果
猿	异源	施万克认知结构差异理论
猿	源	特征性与功能性认知结构
猿	源	物理与技术意义下的“功能性思维”
猿	源	算法概念的建构
猿	异缘	社会建构主义与数学学习
猿	缘	基于维果茨基理论的社会建构主义
猿	缘	社会协商意义下的社会建构主义
猿	第 缘章	数学问题解决
猿	异员	问题、问题解决与问题解决者
猿	异圆	数学问题(解决)的概念与类型
猿	异猿	问题解决的过程与策略
猿	异源	数学问题解决的过程与策略
猿	源	广义启发法
猿	源	局部启发法
猿	异缘	基于问题解决的数学教学

## 第 猿编 数学活动与数学教学

猿	第 远章	数学教育中的数学活动
猿	异员	数学推理活动
猿	猿	数学推理的本质
猿	猿	类比推理——一种学生数学学习的基本过程
猿	猿	数学推理活动的选讲
猿	异圆	数学连结活动
猿	圆	数学连结的本质
猿	圆	数学连结的形式

员苑	圆猿	数学连结活动的选讲
员苑	异猿	数学的算法活动
员苑	猿员	算法活动的本质
员圆	猿圆	数学算法活动的选讲
圆缘	第 苑章	现代数学教学模式
圆缘	异员	基于教学文化的数学教学模式
圆园	员员	关于教学文化
圆园	员圆	新旧数学教学文化的对照
圆猿	员猿	基于教学文化的教学模式——“核心概念与 旅游日记”
圆原	异圆	应用取向的数学教学
圆缘	圆员	应用取向的数学教学的特点
圆苑	圆圆	应用取向的数学教学方法
圆缘	圆猿	日常数学教学中的应用取向性
圆缘	圆原	关于应用取向教学的几个注意问题
圆苑	异猿	项目取向的数学教学模式
圆愿	猿员	项目取向的数学教学的特点
圆缘	猿圆	项目取向的数学教学方法
圆圆	猿猿	计算机在项目取向教学中的作用
圆原	猿原	项目取向数学教学的案例
圆缘	异原	数学的情境教学——抛锚式教学
圆园	源员	抛锚式教学的目标
圆园	源圆	抛锚式教学的设计原则
圆猿	源猿	抛锚式教学的方法
圆猿	源原	抛锚式教学案例研究
圆愿	异缘	基于开放问题的数学教学模式
圆愿	缘员	基于开放问题的数学教学的特征
圆缘	缘圆	开放式问题的类型及其案例
圆缘	缘猿	开放式问题建构

圆园	缘原	基于开放问题的教学方案设计
圆园	缘缘	基于开放问题的教学评价标准
圆园	第 愿章	数学教育中计算机的作用
圆园	异员	计算机与数学教育
圆园	员员	计算机与多元表征体系
圆园	员圆	教师与计算机的伙伴关系
圆园	员猿	远程教学与虚拟教室
圆园	员源	计算机对数学内容的影响
圆园	员圆	计算机与数学思想的表达
圆园	圆圆	表达数学思想的微型世界
圆园	圆圆	计算机与数学教学的不同领域
圆园	异猿	计算机与学生取向数学教学模式
圆园	猿员	教学模式的基本特征
圆园	猿圆	在教学中学习(学生教学学生)
猿猿	猿猿	“教学中学习”的主要措施
猿源	猿源	“教学中学习”的各种形式
猿圆	猿缘	体验与发现式学习
猿苑	猿远	自由学习活动
猿苑	猿苑	小组活动
猿怨	猿愿	项目综合活动

## 第 源 编 数学教师

猿缘	第 怨章	数学教育中教师的作用
猿缘	异员	“好”数学教师的一般特征
猿苑	员圆	现代数学教师的作用
猿愿	圆圆	学生数学学习的支持者与理解者
猿圆	圆圆	数学教育研究者
猿愿	异猿	数学教师教学实践评价模式
猿愿	猿员	对教师的检验

猿园	猿园 检验数学教学的阶段—维度评价模式(简称猿云)
猿园	猿猿 使用评价模式的基本流程
猿猿	猿原 案例分析

## 第 猿 编 数学课程

猿苑	第 猿章 数学课程改革的若干趋势
猿苑	猿园 我国数学课程改革
猿苑	猿员 数学课程改革的背景
猿怨	猿圆 改革的概况
猿猿	猿猿 我国数学课程改革的基本趋势
猿缘	猿源 具体内容的改革
猿愿	猿缘 国际数学课程改革
猿愿	猿远 几个主要国家和地区的数学课程改革概况
猿猿	猿园 国际数学课程改革的趋势
猿园	参考文献

在过去的几十年间数学教育蓬勃发展。这一方面是因为,数学教育长期以来受到数学、自然科学、心理学、社会学、教育学、哲学等研究领域的关注,这些领域的研究成果往往最先促进数学教育的发展。反之,数学教育的发展又为其他领域的研究提供操作平台。另一方面是因为,被公认的数学的国际性,带动了数学教育研究的国际化。由世界著名数学家(如德国数学家 运肇)倡导的国际数学教育大会(国际数学教育大会),已有近一百年的历史,它为世界各国数学教育研究者提供宽广的交流平台。

正是通过我国数学教育专家与国际同行在这座平台上的交流,以及在平台下的沟通,我国数学教育逐步融入世界数学教育。前辈专家们无私的奉献,一方面让我们及时了解国际数学教育发展的动态,另一方面,向世界打开了了解中国数学教育的窗口。迎来了 21 世纪的中青年一代数学教育研究者,理应借着这个窗口,及时把握国际数学教育发展特点,深入开展数学教育的研究,提高我国数学教师整体的数学素质教育水平,共创具有时代特色、国际视野的中国数学教育体系。

本文作者深深体会到自己的责任,希望发挥自己的特长,将自己多年来对数学教育的思考、以及多年来积累的不同文字的资料整理成文,与我国有志于数学教育研究的广大教师共同展望数学教育的发展前景,探索我国教育理论研究的模式,让我国数学教育真正走向世界。

本书共有 15 章,分为五个部分。第一部分为数学教育概论,由第一章到第三章构成。第一章对数学教育研究进行历史的回顾,通过回顾去感受数学家、心理学家、教育家等对数学教育的关注与扶植,感受数学教育发展的迅猛趋势。第二章我们探讨数学教育的任务,首先介绍世界几位著名数学教育家对数学教育的各种理解,他们从教育三要素出发,即数学教育普遍关心的课程教学结构,以及能成功地向学生介绍有关教学内容的教学方法设计和学生数学学习的复杂过程,建构他们各自的数学教育模式。在此基础上,我们详细讨论数学教育的任务,揭示作为边缘学科的数学教育与自然科学、心理学、教育学、政治学、社会学等领域的密切关系,明确数学教育所从事的任务。紧接着我们将注意力转回现代数学教育的发展上,提出了现代数学教育研究的几个热点问题。第三章围绕着数学教育的目标展开讨论,从关于提高学生整体数学素养的宏观目标,谈到关于发展学生数学思维与技能技巧的微观目标。

第二部分讨论数学学习理论,由第四、五章构成,其中第四章是关于数学认知学习理论,主要介绍皮亚杰及其学生的智力发展理论与运算思维模式,从学生思维发展的角度,分析学生数学学习的复杂过程。接着从加涅的信息加工理论出发,剖析数学学习的特点以及可能获得的能力。现代建构主义理论为研究数学学习开辟了更广阔的领域,它强调知识的学习是个体主动建构的过程,是与社会协商得到发展的过程。第五章我们把知识的学习扩张到问题的解决,系统地对数学问题解决的概念、过程与策略进行阐述,并且介绍问题取向的数学教学。

第三部分为本书的重点部分,详细讨论数学活动与数学教学模

式,由第六章到第八章构成。数学教育研究者围绕数学内容传授和数学活动组织这两大领域展开了各具特色的理论与实践研究,第六章围绕数学活动展开讨论,首先阐述数学推理活动、连结活动、算法活动的本质与形式,然后介绍这些数学活动在教学中实施的过程与特点。第七章着重分析现代数学教学模式的理论与实践研究,主要介绍基于数学教学文化的教学模式、应用取向的教学模式、项目取向的教学模式、数学情境教学以及基于开放问题的数学教学模式。第八章我们讨论计算机与数学教育问题,首先讨论计算机对教学内容、教学方式、多元表征以及对教师带来的机遇和问题,然后着重介绍基于计算机的学生取向的数学教学模式。

第四部分围绕数学教师展开讨论,首先分析现代数学教师应该具有的素质与作用,探讨教师作为学生的学习伙伴、作为数学教育研究者的重要意义,然后具体介绍一种数学教师教学实践的检验模式,便于教师科学地衡量自己的教学活动。

第五部分是关于数学课程的。这里作者邀请华东师范大学课程与教学研究所的孔企平博士撰写。因为他多年来从事着数学课程理论的研究,并且亲自参与我国数学课程标准的制定以及数学教材的编写等。他在数学课程领域有深入严谨的研究。他为本书撰写的第五部分,首先详细介绍我国课程改革的背景、内容、特点以及若干趋势,然后从国际角度分析美、英、日三国的数学课程改革特色,同时介绍我国台湾地区数学课程改革。最后他总结了国际数学课程改革的趋势,主要突出应用性与实践性,课程开发基于学生的主体活动,课程目标更趋个性化与差别化。另外,数学课程强调与其他学科的综合。

虽然本书立足对数学教育的展望,由于数学教育是一个动态发展的过程,本书只能对发展过程中相对稳定的内容进行分析。每当我们浏览数学教育的发展,我们忍不住感叹,数学教育的发展如此突飞猛进!作者衷心地希望与所有教师或其他研究人员共同分享与交流有关数学教育研究的内容。在这知识型社会中,每个人都应该成

为孜孜不倦的学习者,我希望以这本书为抓手,向那些奋战在数学教学实践第一线的教师学习,能汲取他们优秀的教学经验,充实数学教育理论。

我愿借此机会表达我对丛书主编钟启泉教授的谢意,感谢他对我信任与鼓励,使我有勇气编著此书。感谢德国柏林洪堡大学的刁葆华教授,尹永厚教授以及杂墨道教授,为我访学德国时的潜心著书提供安逸的环境与丰富的资源。

徐斌艳

2005年 缘月

# 第 1 编

---

## 数学教育概论

在过去的几十年间,关于数学教育的研究蓬勃发展,数学教育已成为一门独立的学科。对于这门学科几乎没有一个普遍接受的定义,不同的研究者依据其对数学教育的不同解释与理解,从事着研究。正是这些数学教育观点上的差异,甚至冲突,给数学教育的发展注入了活力。为了加深对数学教育形成与发展内涵的理解,在本编中,我们将首先对数学教育研究的历史做一简短回顾。然后介绍几种有代表性的、对数学教育发展起举足轻重作用的数学教育的界定,然后提取各种界定中的合理内核,对数学教育的任务做一解释。紧接着概括现代数学教育发展的特征,总结数学教育研究的热点问题,便于广大数学教育工作者了解历史、把握现代、展望未来,共创数学教育研究的新天地。

# 第 1 章

## 数学教育研究的历史回顾

数学教育作为人类活动的一个领域,有着几千年的历史。根据柏拉图(Plato)所著《美诺》(Meno)中记载,在公元前 5 世纪,苏格拉底(Socrates)曾用巧妙的提问,去引导一个小奴隶发现以一个正方形的对角线为边的正方形,其面积是原正文形面积的两倍(苏格拉底与奴隶之间的具体对话,请查阅本章附录)。17 世纪的学者雷科德(Recorde)不仅教数学,而且也写教科书,在书中使用了苏格拉底的对话法去处理证明、定义和理解。18 世纪初,裴斯泰洛齐(Pestalozzi)、福禄倍尔(Froebel)等教育家提出要把教学方法建立在具体经验和发  
展心智官能的教学目的上,这些思想对学校数学教学产生了一定影响。这些事件都是数学教育活动的缩影。一直到 19 世纪末,在高等教育里开始培养数学教育的时候,数学教育终于以一个行业的面目出现了。这首先归功于德国著名数学家克莱茵(Klein),是他于 19 世纪末将数学教学法课程引入大学,从而为数学教育在大学争得一席之地,他不仅在几所大学设立了这样的课程,而且指导了第一位数学教育博士,即哥廷根大学的施马克(Schmalz)博士。在其他国家也开设专门的数学教学课程,培养将来去

中学教数学的大学生,如日本参照美国师范学校的模式,于1874年前后创办了~~第一~~所师范学校;与此同时,在美国兴起了一场运动,开始把师范学校发展成为教师学院;德国则在19世纪90年代建立了新的培养师资的高等教育机构——师范学校,数学教育作为一个学术领域就逐渐地发展起来,从事数学教学的大学教师不仅要教书,而且要进行数学教育研究工作。

在此我们首先追溯一下数学教育研究的两个根源,一是有关数学教学内容的研究的数学方面的根源,二是心理学方面的根源,主要是对哪些内容应该怎样教和学所进行的研究。然后沿着时间的脉络梳理一下数学教育发展的历史轮廓,分三个时间段来考察。最后从不同数学教育社团成立的角度看数学教育发展的历史。

## 异员 数学方面的根源

最先关心数学教育的数学家是德国的克莱茵,1874年他在获得爱尔朗根(~~莱比锡~~)大学数学教授职位之际,发表了著名的“爱尔朗根纲领”,其中他给出了如何利用一种变换群的不变量去刻画一种几何学的论述,这对几何学的研究给予了富有成效的新的推动力,与此同时他也发表了一篇有关数学教育的就职演说,强调了数学所拥有的形式教育的价值,号召在大中学校进行更为活跃的教学,提倡未来的教师要有足够的数学知识,从而有能力从事独立的研究工作。同时他哀叹人文教育和科学教育的分离。在1875年,他建议普鲁士的各工程学院和大学合并,但是这种建议未被接受。于是他开始投入对中学数学教育改革的研究,他相信要使现在高等教育的要求得到满足,中小学数学课程必须作实质性的变革,他认为解析几何和微积分应该下放到中学去,函数的概念应该成为改革的首要。

到了19世纪初,不断有数学家投入到中小学改革中。法国在1802年通过政府的法令改革了它的几何教学,数学家鲍莱尔(~~拉瓦锡~~)、哈达玛(~~皮埃尔-西蒙·拉瓦锡~~)和勒贝格(~~亨利·勒贝格~~)等都写了有关文章

和教科书。在英国,皇家科学学院的佩里(援)制定了使用数学的新大纲,并在1869年向大不列颠科学协会提交报告,严厉批评了当时的数学教学,认为应该采用更加直观和以实验为基础的教学方法。哥伦比亚大学的穆尔(援)于1871年从美国数学会主席的位置上退休,他赞同佩里的批评,并提倡一种将数学各分支统整起来的课程。他还号召职业数学家们投身到中小学的数学改革中去。当然他们的投入主要是采取编写教材的方式,对中小学数学该教什么的问题进行了叙述。这些知名数学家对于数学教学改革的关心为当代数学家做出了榜样,在以后几十年的数学教育研究中无不出现数学家的身影,如弗勒登塔尔(援)、陈省身教授等等。

在数学家关心并参与数学教育的同时,心理学上的一系列研究对数学教育发展也产生深刻影响。

## 异圆 心理学方面的根源

首先是心理学上关于思维的研究常常涉及到解数学问题的心智能力的问题,涉及数学思维发展的问题。19世纪末,作为智力测量创始人的比纳(援)建立了他的心理实验室。1890年刚刚获得自然科学博士学位的皮亚杰(援)来到了比奈实验室,他当时的任务是:将遗传学家伯特在英国发展起来的推理测试工作用到巴黎的儿童身上,并加以标准化。他对儿童如何获得答案的过程特别感兴趣,尤其是当答案不正确时儿童的思维过程引起他的关注。“皮亚杰更关心发展进程中个体内部的变化”,在研究中他逐渐形成了“临床法”的研究方法,他的研究对数学教育研究的内容和方法论都产生了重大影响。

在这同时,霍尔(援)也于1884年在霍普金斯大学建立了心理实验室,他主张儿童的发展方式和人类的发展方式大致相同,认为在儿童期去影响智力的发展是没有多大意义的。他把小学数学的教学看成是为了养成习惯,从而在他的小学课程中,分配给算术的

时间很少,强调要把儿童的兴趣放在首位。第一次世界大战后,霍尔的思想成为美国反智力运动的一个组成部分,那个运动对数学在学校课程中的地位造成了威胁。

另外,1915年库尔普(约翰·爱德华·霍普金斯大学)在符茨堡(麻省理工学院)建立了心理实验室,形成了对思维研究有很大影响的学派,他们宣称:不带有任何意象(圣菲斯)的抽象思维是存在的,思维的研究不是通过它的内容而是通过它的作用去进行的。库尔普的学生韦特墨(厄内斯特·霍普金斯)创立的格式塔心理学(耶鲁大学)对创造过程和问题解决给以一定程度的研究,他通过许多数学的例子,阐述了他的建设性思维理论。符茨堡学派中另外的心理学家塞尔兹(约翰·爱德华·霍普金斯)和邓克尔(约翰·爱德华·霍普金斯)都对问题解决过程进行深入的分析,其中包含许多复杂的数学问题,撰写了有深入影响的著作。受到塞尔兹影响的一位心理学家维果茨基建立了一种心理发展的理论,他主张教育应该指导发展而不是跟随发展,他使用了一种动态的研究方法,即在教学的条件下观察思维发展的过程;他还提出关于最近发展区的概念,这些思想相继得到西方研究者的接受和采用。

这些对思维的心理学研究为人们理解怎样学习数学的问题提供了帮助。而心理学中的另一个研究传统,即有关学习心理学的研究,对数学教育发展有着更直接、更大的影响。如桑代克(爱德华·桑代克)的行为主义理论强调,如果对外部刺激有满意反应,由此而引起的学习是主动的和有选择的学习,他认为刺激与反应之间的联结可以通过一种正强化,即成功就能获得报偿而得到加强,他以这种思想编写了一系列算术课本(1909年),而后又撰写了《算术心理学》(1911年)和《代数心理学》(1914年),在这些著作中他的刺激和反应原则充分地用于数学教学中。他的理论与训练迁移说产生了冲突,训练迁移说认为思维可以通过特殊科目的教学而得到一般性的训练。而桑代克并没有否定迁移的可能,他指出“只是,一、不能认为迁移必然发生;二、它极少自动地发生;三、通过直接的教学以达到所要的结果通常比起期望波及的效果要更有效、更经济”。<sup>[10]</sup>桑代克认为只有在迁移情况含

有与训练情况“全等因素”条件下,迁移才会发生,他的这种全等因素论以后发展为新行为主义的累积学习论。

一些心理学家对桑代克这些理论提出异议,如贾德(悦援匀援允德)通过一项研究反驳桑代克理论:他让五、六年级的学生练习用标枪射击水底下的目标,那些学过折射定律的学生比起那些未学过这条定律的学生来,更能考虑到目标深度的变化。贾德议论说,迁移是通过一般化实现的。他写道“那种认为迁移并不普遍发生或只轻度发生的心理学是动物意识心理学。高等心理过程的心理学则教导我们:一切教育的目的和目标都是在发展系统的思想,这种思想能从它被获得的情景中迁移到别的情景中去。一般化思想的体系把人类的经验提到抽象、一般化、概念性理解的高度去加以阐明和澄清”。〔许多数学家也都为训练价值进行辩护,如芝加哥大学的杨(允宰援匀援允)指出,比数学内容更为重要的是这样一个事实,即它最典型、最清晰、最简单地给出了一些思维模式的范例,它们对任何人都有着极大的重要性。训练迁移一直是心理学家和数学教育工作者争论的重要议题,有时使他们两者处于对立的阵营。如对于发现学习法,心理学家们的看法相互分歧,而数学教育工作者们则倾向于抱正面的和乐观的态度。但是随着认知心理学的到来,数学教育工作者与心理学家的关系更多的是合作。

## 异痕 数学教育研究发展的三个历史阶段

### 猿景 数学教育研究发展初期

员世纪末至 圆世纪 缘年代,一些局部的实验成为各个数学教育研究方向的萌芽。

正如上述两个根源中提到的,早期的数学教育作为一个研究领域是由数学家们奠定的。如,德国的克莱茵,英国的戈弗雷、布兰福德等,美国的史密斯和杨都是数学教育研究领域的先驱。他们虽然