

学 考 方 略

高一数学

本册主编：程煜生

编 委：黄孟良 聂元昌

杜典意 吴远伦

李 哲 樊庆礼

目 录

第一章	集合与简易逻辑	1
第 1 节	集合	2
第 2 节	子集、全集、补集	6
第 3 节	交集与并集	9
第 4 节	含绝对值的不等式的解法	13
第 5 节	一元二次不等式的解法	18
第 6 节	逻辑联结词	25
第 7 节	四种命题	32
第 8 节	充分条件与必要条件	38
第二章	函数	52
第 1 节	映射	53
第 2 节	函数	59
第 3 节	函数的单调性和奇偶性	68
第 4 节	反函数	77
第 5 节	指数	84
第 6 节	指数函数	90
第 7 节	对数	97
第 8 节	对数函数	104
第 9 节	函数的应用举例	114
第 10 节	实习作业	123
第三章	数列	144
第 1 节	数列	146
第 2 节	等差数列	152
第 3 节	等差数列的前 n 项求和公式	157

第 4 节	等比数列	164
第 5 节	等比数列的前 n 项和	171
第 6 节	数列的应用	177

第四章 三角函数 193

第 1 节	角的概念的推广及弧度制	194
第 2 节	任意角的三角函数	202
第 3 节	同角三角函数的基本关系式	210
第 4 节	正弦、余弦的诱导公式	221
第 5 节	两角和与差的正弦、余弦、正切	228
第 6 节	二倍角的正弦、余弦、正切	241
第 7 节	正弦函数、余弦函数的图象和性质	269
第 8 节	函数 $y = A \sin(\omega x + \varphi)$ 的图象	294
第 9 节	正切函数的图象和性质	309
第 10 节	已知三角函数值求角	318
第 11 节	三角变换中的最值问题	327
第 12 节	三角知识的综合运用	342

第五章 平面向量 385

第 1 节	向量	386
第 2 节	向量的加法与减法	392
第 3 节	实数与向量的积	397
第 4 节	平面向量的坐标运算	404
第 5 节	线段的定比分点	410
第 6 节	平面向量的数量积及运算律	416
第 7 节	平面向量的数量积的坐标表示	421
第 8 节	平移	427
第 9 节	正弦定理、余弦定理	431
第 10 节	解斜三角形的应用举例	436

第一章

集合与简易逻辑



知能梳理

1. 理解集合、子集、交集、并集、补集的概念;了解空集和全集的意义;了解属于、包含、相等关系的意义;掌握有关的术语和符号,并会用它们正确表示一些简单的集合.
2. 掌握 $|ax+b|<c$ 与 $|ax+b|>c(c>0)$ 型不等式的解法;熟练掌握一元二次不等式的解法;弄清一元二次方程、一元二次不等式与二次函数的关系.
3. 理解逻辑联结词“或”、“且”、“非”的含义;理解四种命题及其相互关系;掌握充要条件.
4. 初步理解、掌握集合的思想、数形结合的思想以及等价转换思想的应用.



考点析测

1. 本章所包含的有关集合、命题、充要条件、解不等式等内容是中学数学的基础,也是高考命题的热点.
2. 本章所涉及的集合的思想、数形结合的思想、等价转换的思想和分类讨论的思想是基本的数学思想,是高考命题的重点.
3. 对集合的考查,主要以选择题、填空题的形式出现,考查集合的概念、表示方法以及集合之间的关系和运算.
4. 对命题的考查,主要是考查复合命题的真假判断、充要条件和反证法的运用.
5. 对不等式解法的考查,主要是考查含绝对值的不等式和一元二次不等式的

解法,其中要突出注意数形结合的思想和分类讨论的思想的运用.

第 1 节 集合



重点难点

重点 集合的基本概念与表示方法.

难点 运用集合两种常用的表示方法——列举法与描述法,正确表示一些简单集合.



学法指导

加强对集合的元素特性的理解,掌握集合通常的两种表示方法.要重视把已学的知识综合运用于集合,使之将集合的概念渗透到以往所学的数学知识之中,特别是数集、方程、不等式的解集等.学习时要明确:

1. 认清一个集合,关键是认清(1)元素是什么?(2)元素有何属性?如: $A = \{m \mid m = t^2 + 1, m \in \mathbf{R}\}$ 与 $B = \{x \mid x = y^2 + 1, x \in \mathbf{R}\}$ 表示同一个数集.表示集合时,与所采用字母名称无关.而 $P = \{(x, y) \mid x = y^2 + 1\}$ 表示一个点集,它的元素是点 (x, y) ,与集合 A 不同.

2. 集合中元素的确定性,是指集合中的元素必须是确定的,即任何一个对象,都能判断它是或不是某个集合的元素,两种情况有且只有一种情况成立.

集合元素的互异性是指给定集合中的元素是互不相同的,同一个集合中不能重复出现同一元素.

集合元素的无序性是指集合的元素无先后顺序,元素完全相同的两集合是相同的集合.如: $\{1, 2, 3\}$ 与 $\{3, 1, 2\}$ 相同.

3. 集合表示要注意以下两点:

(1)用列举法表示集合时要把集合的元素全部列出来,不能遗漏;

(2)用描述法表示集合时要对元素的属性理解准确.

4. 熟记常用数集的符号表示: $\mathbf{N}$ —自然数集; $\mathbf{N}^*$ —正整数集; $\mathbf{Z}$ —整数集; $\mathbf{Q}$ —有理数集; $\mathbf{R}$ —实数集.



典题导析

【例 1】判断下列说法是否正确？说明理由.

- (1) 我们班里高个子的同学组成一个集合；
- (2) 接近 0 的实数组成一个集合；
- (3) $1, \frac{3}{2}, \frac{6}{4}, |-\frac{1}{2}|, 0.5$, 这些数组成的集合有五个元素；
- (4) 集合 $\{a, b, c, d, e\}$ 与集合 $\{b, c, d, a, e\}$ 表示同一个集合.

分析 集合的元素具有确定性、互异性和无序性.

解 (1)、(2) 中的对象是模糊的, 没有明确的标准, 所以 (1)、(2) 的说法都是错误的; (3) 中只有三个不同的值, 它们组成集合 $\{1, \frac{3}{2}, \frac{1}{2}\}$, 所以 (3) 也是错误的; (4) 正确, 这两集合中元素完全相同, 只是顺序不同, 它们表示同一个集合.

【同类变式】

1. 不能组成集合的是
 - A. 所有的正三角形
 - B. 大于 2 的所有整数
 - C. 面积很小的长方形
 - D. 离原点 O 的距离小于 1 的所有点
2. 试讨论集合 $\{3, x, x^2 - 2x\}$ 中, x 应满足的条件.

答案与提示

1. C; 2. $x \neq 0, -1, 3$.

【例 2】用列举法表示下列集合.

- (1) $\{y | y = 3 - x, x \in \mathbf{N}, y \in \mathbf{N}\}$;
- (2) $\{(x, y) | y = 3 - x, x \in \mathbf{N}, y \in \mathbf{N}\}$.

分析 (1) 是数的集; (2) 是有序数对 (x, y) 的集合, 可以理解为直角坐标平面上的点的集合, 也可理解为二元一次方程的解的集合.

解 因为 $x \in \mathbf{N}, y \in \mathbf{N}$ 且 $y = 3 - x$

所以 (1) 可表示为 $\{0, 1, 2, 3\}$

(2) 可表示为 $\{(0, 3), (1, 2), (2, 1), (3, 0)\}$

总结 解决集合问题,关键在于认清所给集合:一看元素的形式;二看元素的属性.要注意(1)、(2)中集合的区别.

【同类变式】

1. 集合 $\{x \in \mathbf{R} | x^2 - 2x + 1 = 0\}$ 用列举法表示为_____;
2. 已知集合 $A = \{x \in \mathbf{N} \mid \frac{12}{6-x} \in \mathbf{N}\}$, 用列举法表示为 $A =$ _____.

答案与提示

1. $\{1\}$; 2. $A = \{0, 2, 3, 4, 5\}$.

【例3】已知 $A = \{x | x = a + b\sqrt{2}, a, b \in \mathbf{Z}\}$, 判断下列元素与集合 A 之间的关系:

- (1) $x = 0$; (2) $x = \frac{1}{\sqrt{2} + \sqrt{3}}$; (3) $x = \sqrt{9 + 4\sqrt{2}}$.

分析 x 与 A 的关系只有 $x \in A$ 和 $x \notin A$ 两种, 判断 x 是不是 A 中的元素, 即观察 x 能否写成 $a + b\sqrt{2} (a, b \in \mathbf{Z})$ 的形式.

解 (1) 因为 $0 = 0 + 0 \times \sqrt{2}$, 所以 $0 \in A$;

(2) 因为 $x = \frac{1}{\sqrt{2} + \sqrt{3}} = \sqrt{3} - \sqrt{2}$, 无论 a, b 为何整数, $a + b\sqrt{2} = \sqrt{3} - \sqrt{2}$ 都不成立,

所以 $\frac{1}{\sqrt{2} + \sqrt{3}} \notin A$;

(3) 因为 $x = \sqrt{9 + 4\sqrt{2}} = \sqrt{(2\sqrt{2} + 1)^2} = 2\sqrt{2} + 1$, 所以 $\sqrt{9 + 4\sqrt{2}} \in A$.

总结 研究元素与集合的关系, 一要注意集合的表示方法(列举法或描述法), 二要准确判断元素的属性.

【同类变式】

1. 设 $A = \{x | x = 4k + 1, k \in \mathbf{Z}\}$, 则 -1 _____ A , -7 _____ A ;
2. 设 $A = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$, $B = \{x \in A \text{ 时代数式 } x^2 - 1 \text{ 的值}\}$, 则 B 中的元素是_____.

答案与提示 1. $\notin, \in$; 2. $-1, 0, 3$.



巩固强化

1. 给出下列关系: $\frac{1}{2} \in \mathbf{R}, \sqrt{2} \notin \mathbf{Q}, 0 \in \mathbf{N}, -3 \in \mathbf{N}, 0.6 \in \mathbf{Z}$. 其中正确的个数为

A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

2. 有下列四个命题:① $\{0\}$ 是空集;②若 $a \in \mathbf{N}$,则 $-a \notin \mathbf{N}$;③集合 $A = \{x \in \mathbf{R} | x^2 + 1 = 0\}$ 不是空集;④集合 $B = \{x \in \mathbf{Q} | \frac{6}{x} \in \mathbf{N}\}$ 是无限集. 其中正确命题是

A. ②③ B. ②④ C. ②③④ D. ④

3. 下列四个关系式中,正确的是

A. $\emptyset \in \{a\}$ B. $\emptyset \in \{\emptyset\}$ C. $\{a\} \in \{a, b\}$ D. $\{a\} \in a$

4. 方程组 $\begin{cases} 2x+y+6=0 \\ x-y+3=0 \end{cases}$ 的解集是

A. $\{(-3, 0)\}$ B. $\{-3, 0\}$ C. $(-3, 0)$ D. $\{(0, -3)\}$

5. 若集合 $A = \{x | kx^2 + 4x + 4 = 0, x \in \mathbf{R}\}$ 只有一个元素,则实系数 k 的值为

A. 1 B. 0 C. 0 或 1 D. 以上都不对

6. 若 $A = \{x | x^2 + x = 0\}$,则 -1 _____ A ; 1 _____ A .

7. 集合 $A = \{(x, y) | x + 2y = 7, x, y \in \mathbf{N}\}$ 有 _____ 个元素, $(1, 3)$ _____ A , $(7, 0)$ _____ A .

8. 方程 $x^2 - 3ax + 2a^2 = 0 (a \neq 0)$ 的解集为 _____.

9. 不等式 $x - 5 > \sqrt{3}$ 的解集为 _____.

10. 已知集合 $A = \{x | ax^2 + 2x + 1 = 0, a \in \mathbf{R}\}$, (1)若 A 只有一个元素,求 a 的值;
(2)若 A 是空集,求 a 的范围;(3)若 A 中至多有一个元素,求 a 的取值范围.



迁移拓展

11. 设 x, y, z ,都是非零实数,试用列举法将 $\frac{x}{|x|} + \frac{y}{|y|} + \frac{z}{|z|} + \frac{xyz}{|xyz|}$ 可能取的值组成的集合表示出来.

12. 用符号语言描述法分别描述正奇数集合 A 、奇数集合 B 、能被3整除的整数集合 C .



应用创新

13. 集合 $A = \{x | x = 3n + 1, n \in \mathbf{Z}\}$, $B = \{x | x = 3n + 2, n \in \mathbf{Z}\}$, $C = \{x | x = 6n + 3, n$

$\in \mathbb{Z}\}$.

(1) 若 $c \in C$, 求证必有 $a \in A, b \in B$ 使 $c = a + b$;

(2) 对任意 $a \in A, b \in B$, 是否一定有 $a + b \in C$? 证明你的结论.

第 2 节 子集、全集、补集



重点难点

重点 子集、补集的概念.

难点 弄清元素与子集、属于与包含之间的区别.



学法指导

1. 要理解子集、真子集、补集的概念. 一般地, 对于两个集合 A 与 B , 如果集合 A 的任何一个元素都是集合 B 的元素即任 $x \in A$, 可以推出 $x \in B$, 那么集合 A 就是集合 B 的子集; S 中子集 A 的补集记号及其意义为: $C_S A = \{x | x \in S \text{ 且 } x \notin A\}$.

2. 要掌握下列性质: (1) $\emptyset \subseteq A$ (即空集是任何集合的子集); (2) $A \subseteq A$ (任何非空集合 A 都有两个特殊的子集 A 和 $\emptyset$); (3) 传递性, 若 $A \subseteq B, B \subseteq C$, 则 $A \subseteq C$ 或 $A \subsetneq B, B \subsetneq C$, 则 $A \subsetneq C$; (4) 若 $A \subseteq B, B \subseteq A$, 则 $A = B$; (5) $C_U (C_U A) = A, C_U \emptyset = U, C_U U = \emptyset$.

一般地, 若非空集合 A 有 n 个元素, 则 A 有 2^n 个子集, $2^n - 1$ 个真子集, $2^n - 2$ 个非空真子集.

3. 要学会用文氏图来表示集合与集合之间的关系.



典题导析

【例 1】若 $A = \{a, b\}, B = \{x | x \subseteq A\}$, 则集合 A 与集合 B 的关系是

A. $A \subseteq B$

B. $A \subsetneq B$

C. $A \in B$

D. $A \notin B$

分析 $x \subseteq A$ 表示 x 是 A 的子集, 由 $B = \{x | x \subseteq A\}$ 可知 A 的子集都是 B 的元

素,因此 A 和 B 的关系是元素和集合的关系.

解 $\because x \in B, x \subseteq A, \therefore B$ 中的元素以集合形式出现. 又 $\because A$ 的子集有 $\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}, \therefore B = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$, 即 $A \in B$, 故选 C.

总结 解答此类问题关键是弄清有关符号的意义, 正确理解集合与元素、集合与集合的关系; 在写出 A 的全部子集时, 可按子集中元素的个数分类, 做到不重复, 不遗漏, 特别不要忘记 $\emptyset$ 和 A 本身.

【同类变式】

1. 设 $M = \{x \in C_{\mathbf{R}} \mathbf{Q} | x \leq \sqrt{13}, a = \sqrt{4}\}$, 则下列关系中正确的是

A. $a \in M$ B. $\{a\} \not\subseteq M$ C. $a \not\subseteq M$ D. $\{a\} \subseteq M$

2. 已知集合 $M = \{0, 1, 2\}$, 则 M 的真子集有 _____ 个, 它们分别是 _____.

答案与提示

1. B 2. 7, $\emptyset, \{0\}, \{1\}, \{2\}, \{0, 1\}, \{0, 2\}, \{1, 2\}$.

【例 2】已知 $A = \{x \in \mathbf{R} | x < -1 \text{ 或 } x > 5\}$, $B = \{x \in \mathbf{R} | a \leq x < a + 4\}$, 若 $B \not\subseteq A$, 求实数 a 的取值范围.

解 如图 1-1 表示集合 A ,

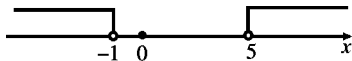


图 1-1

$\because B \not\subseteq A, \therefore a + 4 \leq -1 \text{ 或 } a > 5$,

即 $a \leq -5 \text{ 或 } a > 5$.

总结 涉及讨论数集(用不等式表示的)关系的问题, 通常可借助数轴来观察.

【同类变式】

1. 已知集合 $A = \{x | 1 \leq x < 4\}$, $B = \{x | x < a\}$, 若 $A \not\subseteq B$, 求实数 a 的取值集合.

2. 已知集合 $p = \{x | x^2 + x - 6 = 0\}$, $S = \{x | ax + 1 = 0\}$, 若 $S \subseteq p$, 求实数 a 的取值集合.

答案与提示

1. $\{a | a \geq 4\}$, 2. $\{0, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}\}$.

【例 3】已知全集 $S = \{1, 3, x^3 + 3x^2 + 2x\}$, $A = \{1, |2x - 1|\}$, 如果 $C_S A = \{0\}$, 则这样的实数 x 是否存在? 若存在, 求出 x ; 若不存在, 请说明理由.

分析 由 $C_S A = \{0\}$, 知 $0 \in S$ 且 $0 \notin A$. 这样思路就清楚了.

解 $\because C_S A = \{0\}$, $\therefore 0 \in S$ 且 $0 \notin A$, 于是有 $x^3 + 3x^2 + 2x = 0$, $x(x+1)(x+2) = 0$, 即 $x_1 = 0, x_2 = -1, x_3 = -2$. 当 $x = 0$ 时, $|2x-1| = 1$ 不合题意; 当 $x = -1$ 时, $|2x-1| = 3, 3 \in S$; 当 $x = -2$ 时, $|2x-1| = 5$, 但 $5 \notin S$. 因此, 实数 x 的值存在, $x = -1$.

总结 解决此类问题的关键是理解补集的概念及 $C_S A = \{x | x \in S \text{ 且 } x \notin A\}$ 的含义.

【同类变式】

1. 设全集 $U = \{2, 3, a^2 + 2a - 3\}$, $A = \{b, 2\}$, $C_U A = \{5\}$, 求实数 a, b 的值.
2. 设全集 $S = \mathbf{Z}$, $A = \{x \in \mathbf{Z} | x < 4\}$, $B = \{x \in \mathbf{Z} | x \leq 2\}$, 则 $C_S A$ 与 $C_S B$ 的关系是_____.

答案与提示

1. $a = 2, b = 3$ 或 $a = -4, b = 3$; 2. $C_S A \subsetneq C_S B$.



巩固强化

1. 已知 I 是全集, M, N 是非空子集, 且 $M \subsetneq N$, 则下列关系正确的是
A. $M \subsetneq C_I N$ B. $N \subsetneq C_I M$ C. $C_I N \subsetneq M$ D. $C_I N \subsetneq C_I M$
2. 设两集合 $S = \{x | x = 2n, n \in \mathbf{Z}\}$, $P = \{x | x = 4n + 2, n \in \mathbf{Z}\}$, 则下列关系正确的是
A. $S \subseteq P$ B. $S = P$ C. $S \supsetneq P$ D. $S \subsetneq P$
3. 下列四个命题: ①空集没有子集; ②空集是任何一个集合的真子集; ③空集 $\emptyset$ 的元素个数为零; ④任何一个集合至少有两个子集. 其中正确的有
A. 0 个 B. 1 个 C. 2 个 D. 3 个
4. 已知 $M = \{y | y = x^2 - 2x - 1, x \in \mathbf{R}\}$, $P = \{x | -2 \leq x \leq 4\}$, 则集合 M 与 P 的关系是
A. $M = P$ B. $P \in M$ C. $M \subsetneq P$ D. $M \supsetneq P$
5. 全集 $U = \{a, b, c, d, e\}$, $A = \{a, b\}$, $B \subsetneq C_U A$, 则集合 B 的个数是
A. 5 B. 6 C. 7 D. 8
6. 已知 $A = \{\text{菱形}\}$, $B = \{\text{正方形}\}$, $C = \{\text{平方四边形}\}$, 那么 A, B, C 之间的关系是_____.
7. 已知全集 $U = \mathbf{N}$, 集合 $A = \{x > 5\}$, 则 $C_U A$ 用列举法表示为_____.

8. 满条件 $\{1, 2, 3\} \subsetneq M \subsetneq \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ 的集合 M 的个数为_____.
9. 设集合 $A = \{(x, y) \mid x > 0, y > 0\}$, $B = \{(x, y) \mid xy > 0\}$, 则 A 与 B 的关系是_____.
10. 设集合 $A = \{(x, y) \mid \frac{y}{x} = 1\}$, $B = \{(x, y) \mid y = x\}$, 则 A 与 B 的关系是_____.
11. 设集合 $A = \{x, xy, x - y\}$, $B = \{0, |x|, y\}$, 若 $A = B$, 求 x, y 的值.
12. 已知 $A = \{x \mid -2 \leq x \leq 5\}$, $B = \{x \mid m + 1 \leq x \leq 2m - 1\}$, 若 $B \subseteq A$, 求实数 m 的取值范围.



迁移拓展

13. 已知集合 $A \subsetneq \{2, 3, 7\}$, 且 A 中至多有一个奇数, 写出所有满足条件的集合 A .
14. 设 $A = \{x \mid x^2 + 4x = 0\}$, $B = \{x \mid x^2 + 2(a+1)x + a^2 - 1 = 0\}$.
- ①若 $B \subseteq A$, 求实数 a 的值的集合;
- ②若 $A \subseteq B$, 求实数 a 的值的集合.
15. 设 $U = \{-\frac{1}{3}, 5, -3\}$, $-\frac{1}{3}$ 是 $A = \{x \mid 3x^2 + px - 5 = 0\}$ 与 $B = \{x \mid 3x^2 + 10x + q = 0\}$ 的公共元素, 求 $C_U A, C_U B$.



应用创新

16. 同时满足 (1) $M \subseteq \{1, 2, 3, 4, 5\}$; (2) 若 $a \in M$, 则 $6 - a \in M$ 的非空子集有多少个? 写出这些子集来.

第3节 交集与并集



重点难点

重点 交集与并集的概念.

难点 交集与并集的概念、符号之间的区别与联系. 关键是要能达到会正确表

示一些简单集合的目标.



学法指导

1. 要正确理解交集、并集的意义,能正确运用交集、并集的符号和表示形式,会用文氏图表示两个集合的交集与并集.所谓 $A \cap B$ 是指 A, B 中所有的公共元素组成的集合,即 $A \cap B = \{x | x \in A \text{ 且 } x \in B\}$; $A \cup B$ 是 A, B 中的所有元素组成的集合,即 $A \cup B = \{x | x \in A \text{ 或 } x \in B\}$;要注意对“且”、“或”的理解.

2. 结合文氏图,掌握交集的性质: $A \cap A = A$; $A \cap \emptyset = \emptyset$; $A \cap B = B \cap A$; 若 $A \subseteq B$, 则 $A \cap B = A$, 反之也真.

掌握并集的性质: $A \cup A = A$; $A \cup \emptyset = A$; $A \cup B = B \cup A$; 若 $A \subseteq B$, 则 $A \cup B = B$, 反之也真.

3. 会求两个集合的交集、并集,并能用交集、并集的有关知识解决有关问题.区分交集和并集的关键是“且”与“或”,在处理有关交集和并集问题时,要从这两个词出发去揭示题设和结论之间的联系.

4. 对于数集可以借助数轴,以形助数求出交集与并集.



典题导析

【例 1】已知集合 $A = \{a^2, a+1, -3\}$, $B = \{a-3, 2a-1, a^2+1\}$, 若 $A \cap B = \{-3\}$, 求 $A \cup B$.

分析 $\because A \cap B = \{-3\}$, $\therefore -3 \in B$, 从而可求出 a 值, 进而可求 A, B .

解 $\because A \cap B = \{-3\}$, $\therefore -3 \in B$, $\because a^2+1 > 0$, $\therefore$ 集合 B 中能等于 -3 的元素有 $a-3$ 或 $2a-1$ 两种情形.

(1) 当 $a-3 = -3$, 即 $a=0$ 时, $A = \{0, 1, -3\}$, $B = \{-3, -1, 1\}$, 这时 $A \cap B = \{-3, 1\}$ 与已知 $A \cap B = \{-3\}$ 矛盾, 故舍去 $a=0$;

(2) 当 $2a-1 = -3$, 即 $a=-1$ 时, $A = \{1, 0, -3\}$, $B = \{-4, -3, 2\}$, 符合要求.

因此 $A \cup B = \{-4, -3, 0, 1, 2\}$.

【同类变式】

1. 已知实数集 $A = \{2, 3, a^2+4a+2\}$, $B = \{0, 7, 2-a, a^2+4a-2\}$, 且 $A \cap B =$

$\{3, 7\}$, 求集合 B .

2. 设集合 $M = \{x | x^2 - x - 6 = 0\}$, $N = \{x | x^2 - 3x = 0\}$, 求 $M \cup N$.

答案与提示

1. $\{0, 7, 1, 3\}$; 2. $\{0, -2, 3\}$.

【例 2】已知集合 A, B, C 为非空集合, $M = A \cap C$, $N = B \cap C$, $P = M \cup N$, 则一定有

A. $C \cap P = C$ B. $C \cap P = P$ C. $C \cap P = C \cup P$ D. $C \cap P = \emptyset$

分析 此类问题为抽象集合间的运算, 利用文氏图可使计算直观、简便.

解 如图 1-2 所示, $M = A \cap C$, $N = B \cap C$, $P = M \cup N$, 则必有 $M \cup N \subseteq C$ 即 $P \subseteq C \therefore C \cap P = P$, 选 B.

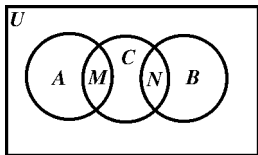


图 1-2

【同类变式】

1. (1999 年全国高考卷 · 1) 如图 1-3 所示, I 是全集, M, P, S 是 I 的三个子集, 则阴影部分所表示的集合是

A. $(M \cap P) \cap S$ B. $(M \cap P) \cup S$
C. $(M \cap P) \cap C_I S$ D. $(M \cap P) \cup C_I S$

2. 已知 $M = \{x | x \leq -1\}$, $N = \{x | x > a - 2\}$, 若 $M \cap N \neq \emptyset$, 则

A. $a < 1$ B. $a > 1$ C. $a \leq 1$ D. $a \geq 1$

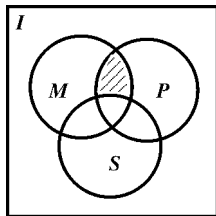


图 1-3

答案与提示

1. C; 2. A.

【例 3】已知 $A = \{x | x^2 + x - 6 = 0\}$, $B = \{x | mx + 1 = 0\}$, 且 $A \cup B = A$, 求实数 m 的取值的集合.

分析 $\because A = \{x | x^2 + x - 6 = 0\} = \{-3, 2\}$ 且 $A \cup B = A$ 即 $B \subseteq A$, $\therefore$ 应分 $B = \emptyset$, $B = \{-3\}$ 及 $B = \{2\}$ 三种情况讨论.

解 $\because A \cup B = A$, $\therefore B \subseteq A$; 又 $\because A = \{x | x^2 + x - 6 = 0\} = \{-3, 2\}$, $\therefore B = \emptyset$, $B = \{-3\}$ 或 $B = \{2\}$, 即 $m = 0$, $-3m + 1 = 0$ 或 $2m + 1 = 0$, 故实数 m 的取值的集合为 $\{\frac{1}{3}, -\frac{1}{2}, 0\}$.

总结 解决此类问题要注意 $A \cap B = A$ 等价于 $A \subseteq B$; $A \cup B = A$ 等价于 $B \subseteq A$

的应用.

【同类变式】

1. 已知 $A = \{1, 4, x\}$, $B = \{1, x^2\}$, 且 $A \cap B = B$, 求 x 的值及集合 B .

2. 已知 $A = \{2, 5\}$, $B = \{x | x^2 + px + q = 0\}$, $A \cup B = A$, $A \cap B = \{5\}$, 求 p, q 的值.

答案与提示

1. 当 $x = \pm 2$ 时, $B = \{1, 4\}$; 当 $x = 0$ 时, $B = \{1, 0\}$. 2. $p = -10, q = 25$.



巩固强化

1. 已知集合 $A = \{x \in \mathbf{N} | x \leq 5\}$, $B = \{x \in \mathbf{N} | x > 1\}$, 那么 $A \cap B =$

A. $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ B. $\{2, 3, 4, 5\}$ C. $\{2, 3, 4\}$ D. $\{x | 1 < x \leq 5, x \in \mathbf{R}\}$

2. 已知 $A = \{x | x^2 + \sqrt{m}x + 1 = 0\}$, 若 $A \cap \mathbf{R} = \emptyset$, 则实数 m 的取值范围是

A. $m < 4$ B. $m > 4$ C. $0 < m < 4$ D. $0 \leq m < 4$

3. 设集合 $A = \{x | -5 \leq x < 1\}$, $B = \{x | x \leq 2\}$, 则 $A \cup B =$

A. $\{x | -5 \leq x < 1\}$ B. $\{x | -5 \leq x \leq 2\}$ C. $\{x | x < 1\}$ D. $\{x | x \leq 2\}$

4. 下列关系: ① $a \in (A \cup B) \Rightarrow a \in A$; ② $a \in (A \cap B) \Rightarrow a \in (A \cup B)$; ③ $A \subseteq B \Rightarrow A \cup B = B$; ④ $A \cup B = A \Rightarrow A \cap B = B$. 其中正确的个数为

A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

5. 设集合 $M = \{x | f(x) = 0\}$, $N = \{x | g(x) = 0\}$, 那么方程 $f(x) \cdot g(x) = 0$ 的解集是

A. $M \cap N$ B. $M \cup N$ C. M D. N

6. 已知集合 $A = \{x | -2 \leq x \leq 7\}$, $B = \{x | m + 1 < x < 2m - 1\}$ 且 $B \neq \emptyset$, 若 $A \cup B = A$, 则

A. $-3 \leq m \leq 4$ B. $-3 < m < 4$ C. $2 < m < 4$ D. $2 < m \leq 4$

7. 设集合 $A = \{(x, y) | x^2 - y^2 = 3\}$, $B = \{(x, y) | 2x + y = 3\}$, 则 $A \cap B =$ _____.

8. 设全集 $I = \{0, 1, 2, 3, 4\}$, 集合 $A = \{0, 1, 2, 3\}$, 集合 $B = \{2, 3, 4\}$, 则 $(C_I A) \cup (C_I B) =$ _____.

9. 集合 A 含有 10 个元素, 集合 B 含有 8 个元素, 集合 $A \cap B$ 含有 3 个元素, 则集合 $A \cup B$ 有_____个元素.

10. 满足 $\{a, b\} \cup B = \{a, b, c\}$ 的集合 B 的个数是_____.
11. 设集合 $A = \{x | 1 \leq x < 4\}$, $B = \{x | x < a\}$, 若 $A \subsetneq B$, 求实数 a 的取值集合.
12. 设 $A = \{x | x^2 + 3x + 2 = 0\}$, $B = \{x | x^2 - ax + 2 = 0\}$, 若 $A \cup B = A$, 求由实数 a 的值组成的集合.



迁移拓展

13. 集合 $A = \{x | x^2 - ax + a^2 - 19 = 0\}$, $B = \{x | x^2 - 5x + 6 = 0\}$, $C = \{x | x^2 + 2x - 8 = 0\}$, 求 a 取何实数时, $A \cap B \supsetneq \emptyset$ 与 $A \cap C = \emptyset$ 同时成立?
14. 设全集 $U = \{\text{不超过 5 的正整数}\}$, $A = \{x | x^2 - 5x + 6 = 0\}$, $B = \{x | x^2 + px + 12 = 0\}$, $(C_U A) \cup B = \{1, 3, 4, 5\}$, 求 p 的值和 $A \cup B$.
15. 设 $A = \{x | x^2 + px - 12 = 0\}$, $B = \{x | x^2 + qx + r = 0\}$, 且 $A \neq B$, $A \cup B = \{-3, 4\}$, $A \cap B = \{-3\}$, 求 p, q, r 的值.
16. 已知 $A = \{y | y = x^2 + 2x + 4\}$, $B = \{y | y = ax^2 - 2x + 4a\}$, $A \cup B = B$. 求实数 a 的取值集合.



应用创新

17. 已知非空集合 $A = \{(x, y) | (a^2 - 1)x + (a - 1)y = 15\}$, $B = \{(x, y) | y = (5 - 3a)x - 2a\}$, 若 $A \cap B = \emptyset$, 求实数 a 的值.

第 4 节 含绝对值的不等式的解法



重点难点

重点 $|x| < a$ 与 $|x| > a (a > 0)$ 型不等式的解法.

难点 用数形结合法求解 $|ax + b| < c$ 与 $|ax + b| > c (c > 0)$ 型不等式. 关键是对绝对值意义的理解.