

当代小学教育丛书
学会数学地思维
——小学数学教学案例解读

主 编 成尚荣
分册主编 钱阳辉 谢惠良

江苏教育出版社

图书在版编目(CIP)数据

学会数学地思维: 小学数学教学案例解读/成尚荣主编-南京: 江苏教育出版社, 2001

(当代小学教育丛书)

ISBN7-5343-4230-9

.学... .成... .数学课-教学理论-小学

.G623.502

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2001)第 052400 号

学会数学地思维

主 编 成尚荣

分册主编 钱阳辉

责任编辑 徐正康

出版发行: 江苏教育出版社

(南京市马家街 31 号, 邮政编码: 210009)

网 址: <http://www.edu-publisher.com>

经 销: 江苏省新华书店

照 排: 江苏苏中印刷厂

印 刷: 江苏苏中印刷厂

(泰州市南门经济开发区, 邮政编码: 225315)

开本 850×1168 毫米 1/32 印张 10.125 插页 1 字数 243000

2001 年 8 月第 1 版 2001 年 8 月第 1 次印刷

印数 1-10000 册

ISBN7-5343-4230-9

G·3925 定价: 14.20 元

江苏教育版图书若有印刷装订错误, 可向承印厂调换

苏教版图书邮购一律免收邮费。邮购电话: 025-3211774, 邮购地址: 南京市马家街 31 号, 江苏教育出版社发行科。盗版举报电话: 025-3300420、3303538。提供盗版线索者我社给予奖励。

丛书总序

教育部基础教育司司长 李连宁

由江苏省教育科学研究所和江苏教育出版社组织编写的《当代小学教育丛书》是一套有追求的好书。

基础教育是科教兴国的奠基工程，对提高中华民族素质、培养各级各类人才，促进社会主义现代化建设具有全局性、基础性和先导性作用。而小学教育作为基础教育乃至整个教育的基础，在人的终身发展以及民族素质提高中具有极为重要的作用。因此，小学教育既小又大。认真研究小学教育规律，切实帮助小学教师转变教育观念，提高小学教育的质量和水平，具有重要的理论价值，更具有重大的实践意义。小学教育似乎人人都懂，但真正理解其实质，把握其真谛的并不能算多，真正把小学教育抓准、抓实、抓好的，则更不容易。这就需要提供切实有效的范例引导。正是从这种实际和认识出发，《当代小学教育丛书》以先进的教育理念、独特的研究视角、新颖的表达方式，探索并较好地回答了广大小学教师在教育教学实践中经常遇到的一些重要问题，是广大小学教育工作者学习、贯彻全国基础教育工作会议精神，深入实施素质教育的好材料。

可以这么说，教育教学改革的最高境界是提升理念。理念是书的灵魂。一本(套)书资料再丰富，结构再完善，文字再妥帖，如果缺乏先进的理念支撑，就“立”不起来，就不能起到提升人的作用。《当代小学教育丛书》鲜明的特点之一，就是以教育科学理论为指导，深入浅出地阐述先进的教育理念。这些理念归结到一点，就是一切为了学生的发展，把素质教育的要求落实到每一个学生的生动活泼的发展上，落实到学生人格的完善上。捧读全书，我们不时能感受到字里行间闪烁着的先进教育理念之光。正是这些先进教育理念的支撑，使这套丛书有灵魂、有精神、有分量，因而具有一种感染力、说服力和提升力，有利于广大小学教师素质教育理念的确立和素质教育要求的落实。

独特的研究视角和方法是这套丛书的又一鲜明的特点。丛书选取了大量生动、典型的案例，并对这些案例作了深入、细致和贴切的分析，在分析的过程中阐明道理，探求规律，引领读者思考问题。当前，一些教育研究形成了僵化的模式，比如过分强调体系的构建，拉开架势做空洞文章等等，这些倾向某种程度上削弱了理论的指导性和影响力，使不少小学教师对教育科研产生了误解，使他们失去了对教育理论应有的热情。这套丛书不追求体系的完备，不对读者作空洞的说教，而采用个案的解读，和读者一起探寻问题的结论，在探寻的过程中使读者产生新的思考。这样的追求是值得充分肯定的。它缩短了理论与实践之间、理念与广大小学教师之间的距离，增强了理论的亲和力，使教育理论更富魅力！

值得一提的还有这套丛书的表达方式。由于丛书的编者、作者大都是来自小学教育第一线，并且具有丰富的教育教学经验和教育科研经验，因此，他们不以研究者自居，而是把自己和读者摆到平台上进行对话，共同分析问题，探求规律，因此，丛书就好像是在和读者娓娓交谈，亲切、平等、入耳、入心。许多章节，读起来如同橄榄在口，越品越有味道。

总之，我认为这是一套不可多得的好书，我乐意向广大小学教育工作者推荐，并相信它在小学教育和教师再教育方面会发挥积极的作用。

2001年教师节

丛书前言

江苏省教育科学研究所所长 成尚荣

孩子们的名字既叫明天，又叫今天。孩子们的明天应当是美好的，孩子们的今天也应该是幸福的。

小学教师既是孩子们美好明天的指引者和建设者，又是孩子们幸福今天的缔造者和保护者。教师决不能为了孩子所谓美好的明天，而不惜牺牲孩子实实在在的今天的幸福。

所以，小学教育，既小又大；小学教师既平凡又伟大。

如何让小学教师认识自己工作的深刻、远大意义？如何让小学教师提高自己的专业水平？如何让小学教师把自己的工作与国家基础教育课程改革、素质教育紧密地联系起来？……我们一直在苦苦思索和不懈追求。

我们想到了教育理念。提升理念应是基础教育改革的最高境界。当下，新的教育理念很多，但是把握其本质的并不多。基础教育改革的根本理念，就是以学生发展为本，尊重学生，信任学生，帮助学生，指导学生，促使每一个学生得到生动活泼的发展，教师与学生共同成长。当前，我们紧迫的任务是如何把以学生发展为本的理念转化为教师的行为，落实在教育过程和管理过程中。

我们想到了课程改革。课程是培养目标的施工蓝图，课程是观念与实践的中介。理念应体现、落实在课程改革之中。帮助小学教师提升理念，重要的是要帮助他们理解课程，把握课程，规范地实施课程，不仅成为执行者，还要成为课程的设计者、开发者和创造者。可以说，当下的不少教育改革、课程改革方面的书，似乎并没有受到教师们的认可和欢迎，收效甚微。

我们想到了案例研究。从具体的案例入手，让教师们在案例中体验、领悟，在所提供的丰富的情境和思考的空间中去反思和研究，把案例和自己的实践结合起来，在比较中辨别、提升，可能这是一种有效的，因而是受教师们欢迎的方法。关键是，选取什么样

的案例；同时，决不能局限在案例之中，而应以此及彼，由表及里，由浅入深，帮助教师跳出案例。

我们想到了案例后的解读。解读，是分析，更是引领，是“举一”后的“反三”，是登上“此岸”后向“彼岸”的前进。解读，就是要搭建对话平台，与教师促膝谈心、讨论；解读，要从案例入手，帮助教师拓宽视野，作理性思考和提升。案例应可读，解读应耐读。

这套丛书就是出于以上的一些想法，就是想形成以上一些风格和特点，即理念落实在课程中，要通过案例去分析，通过解读去提升。理念与课程，案例与解读，成为丛书的主题词和关键词。书稿出来后，不少专家给予很高的评价，不少教师也觉得这套丛书有新意，对实际的工作有启发。我想，这是大家对我们的鼓励。

小学教师是专业工作者，其专业不仅是学科专业，在某种程度上讲，教育科学研究应是他们更为重要的专业。这套丛书，从教育科研切入，把教育科研贯穿在丛书编写、使用的全过程，其目的就是希望把每位教师引导“走上从事一些研究的这条幸福的道路上来”（苏霍姆林斯基语）。我们期盼教师真正成为研究者。

这套丛书由我们江苏省教育科学研究所组织编写。参与研究的彭钢等同志有较为深厚的理论功底，又有较强的研究能力，深谙素质教育、课程改革、课堂教学的本义和真义。丛书的框架、体系、特点就是省教科所同志共同讨论形成的。周英俊同志不辞辛苦，极其负责地做好了各项联络、协调工作。

感谢各分册的主编。他们来自小学教育和地方教科研的第一线，不仅对课程改革、教学实际有充分的了解和切身的体验，而且具有较高的理论水平和很强的研究能力。他们是小学教育工作者，但又超越自己，站在较高的视点审视小学教育。实践证明，真正的教育专家，以至教育家诞生于实践的土壤。

感谢各位审委。他们认真审阅了书稿，实事求是地提出了具体、中肯的修改意见，而且不止一次地与作者交换意见，帮助他们修改。审委的审阅态度和水平，对丛书质量的提高起到了极其重要的作用。

感谢谷公胜、沈克强、王铁军、杨启亮等专家，阅读书稿后写出评论性文章，给丛书以肯定、鼓励和指导。

感谢江苏教育出版社的领导和小学教育编辑室的各位同志，对江苏省教科所的支持，对小学教育的关心，对丛书编写的指导。由于教育出版社的努力，使我们在教师节前夕收到了这份不同寻常的礼物。

教育部基教司李连宁司长为丛书写了序，概括了丛书的作用和鲜明特点，指出了小学教育改革创新方向。基教司正在主持全国的基础教育课程改革，李司长从课程改革的高度指导丛书的编写和出版，我们深表谢意和敬意。

丛书将分批与读者见面。我们期待大家的指导性意见。

2001 年教师节

目 录

全书导读	10
第一编 数学地思维——数学思维论	13
第一章 数学思维材料的组织——从静态提供到动态展现 ..	13
第一节 过程性	14
第二节 探索性	17
第三节 条件化	23
第四节 结构化	25
第五节 策略化	32
第二章 数学思维方法的运用——从偏重解释到注重发现 ..	38
第一节 观察和实验	38
第二节 归纳和类比	45
第三节 联想和猜想	55
第四节 抽象和概括	61
第五节 方法的综合	67
第三章 数学思维方式的培养——从逻辑分析到辩证运用 ..	73
第一节 发散思维	73
第二节 集中思维和发散思维	80
第三节 形象思维	86
第四节 抽象思维和形象思维	106
第五节 直觉思维	115
第六节 分析思维和直觉思维	125
第四章 数学思维观念的导向——从“熟能生巧”到“思想点化”	131
第一节 数学思想观念的引领	131
第二节 数学化思想	141
第三节 模型化思想	149
第四节 化归思想	155
第二编 学会数学地思维——数学思维教学论	162
第五章 认知建构——从记忆储存到结构构建	162
第一节 基于经验的建构	162

第二节	基于旧知的建构	172
第三节	固着点——基本概念、原理和结构	177
第六章	问题解决——从简单模仿到探索发现	181
第一节	问题——数学及数学教育的核心	181
第二节	探索——展开问题解决的过程	191
第三节	变化——追求多种效应案例	200
第七章	开放性教学——从一维集中到多元发散	206
第一节	教学内容的开放	207
第二节	教学过程的开放	214
第三节	开放题	223
第八章	自主性教学——从被动接受到主动创建	231
第一节	两个“结构”——自主学习的工具	231
第二节	提前渗透——促进自主迁移	237
第三节	创设情境——诱发积极性	243
第四节	引导参与——发挥主动性	250
第五节	注重实践——培养创造性	257
参考书目	262

全书导读

数学是人们对客观世界定性把握和定量刻画的基础上，逐步抽象概念，形成方法和理论，并进行应用的过程。这一过程充满着观察、实验、模拟、猜测、矫正、调控、探索与创造等。可见，数学有两个侧面：一个是形式层面的数学，即静态的知识；一个是发现层面的数学，即动态的思维。只有把这两者结合起来，才是完整的数学。为此，日本学者藤田提出通过“数学常识”和“数学思维能力”的组合来培养“数学智力”的教学目标，真正使学生学会数学地思维。这里的“数学常识”是指数学知识中最基本的概念、原理和结构，通过这些基础知识的教学，“数学思维能力”也就积淀在这部分知识上。所以，原苏联数学教育家斯托利亚尔认为：数学教学应该是数学思维活动的教学。

培养学生的思维能力，学会数学地思维，是当前小学数学教学所要研究的一个重点，是使孩子们越学越聪明的根本出路。按照斯托利亚尔的观点，要使数学教学成为数学思维活动的教学，首先要认识数学思维的原理，并结合小学数学正确地把握它的特殊性；其次要用数学思维的原理指导教学过程，使教学过程具有某种特质，为学生数学思维的发展创造更好的条件。为此，全书分为两编：数学地思维——数学思维论，学会数学地思维——数学思维教学论。

在传统的认识中，数学思维就是指思维方法。事实上，数学思维是一个由数学思维材料、数学思维方法、数学思维方式、数学思维观念组成的一个立体结构。在这个结构中，材料是思维的基础，方法是思维的手段，方式是思维的形态，观念是思维的导向。就思维的方法方式而言，一般认为数学是逻辑和整理的方法。其实不然。正如日本数学家小平邦彦所言：“一般认为数学是按逻辑构成的科学，即使与逻辑不尽相同，却也大致一样。但是实际上，数学与逻辑没有关系，数学当然应该遵循逻辑，但逻辑在数学中的作用就像文法在文学中的作用一样，写合乎文法的文章与按文法拼成小说完全是两码事。”“通常的逻辑谁都明白，要是数学都能归结为逻辑”

辑，那么谁都应该懂数学了……所以我认为数学在本质上与逻辑不同。”大数学家彭加勒也表达了同样的思想，他指出，“逻辑用于证明，直觉用于发明”，“没有直觉，就像按语法写诗，语法都对，却没有思想”，“逻辑不能告诉我们，为什么这些思路可以构成通往目的地的一条通道，出发不久就会碰到岔路口，逻辑无法作出正确的判断”。的确，在学生的思维过程中充满着形象的、求异的、直觉的发现方式，充满着想像、类比、猜想等合情推理。所以，思维方法的运用应从偏重解释到注重发现，思维方式的培养应从逻辑分析到辩证运用。

在数学知识的发现和理解中，都蕴含着一个或几个关键性的思想，属于探究思维的部分，而其他部分，则属于常规的复现思维的部分。但在我们的教学中，很多时候把探究部分轻易转化为复现部分。复现部分的教学是显性的，是可以通过步骤来传授的；而探究部分的教学如果也变成可传授的语言，那就失去了思维教学的意义了。思维主要是靠启迪，而不是靠传授，越是传授得一清二楚，学习者就越不需要思维，即使传授的东西是范例，也仅是增加了知识性的储存。要使教学过程成为思维活动的教学，就要为这种活动创造良好的条件。为此，我们提出了要通过知识建构，充分展开知识发生发展的过程，要通过问题解决，充分展开发现解法的过程，让数学思维在这种展开了的过程中附着在典型的知识和问题上。同时，我们还认为，数学教学过程应该具有开放性和自主性的特征，才能诱发学生思维的独立性、深刻性、批判性和创造性。

以上所述，是就本书的主题、观点、框架的确立和形成所作的思考。具体在写作过程中，遵循理论与实践结合的原则，每一章都由多重案例加解读构成的。每一个案例都是有侧重地说明一个观点，案例后的解读一般都是先围绕主题结合案例进行分析，再由此引发思考，或深入剖析，或点明理论，或提供操作，力求让读者对这一观点有一个全面的把握和理解。

本书的导读及第四、五、六、七、八章由钱阳辉执笔，第一、二、三章由谢惠良执笔。编者在编写过程中参考与引用了国内外数学教育改革研究的成果，在此一并表示感谢。

限于理论视野的狭窄，思考能力的浅显，实践积累的贫乏，书中肯定有许多不足，敬请批评指正。

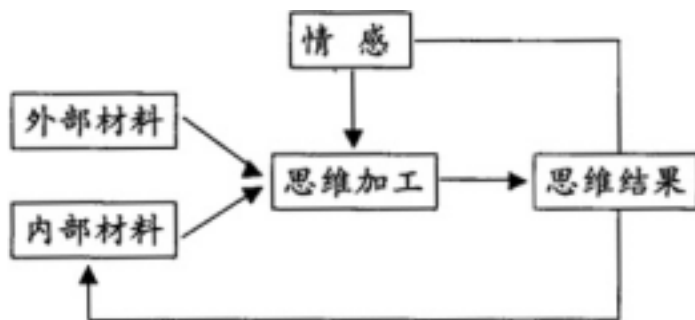
2001年9月

第一编 数学地思维 ——数学思维论

第一章 数学思维材料的组织 ——从静态提供到动态展现

数学思维过程是人脑对外部的数学信息的接收、分析、选择、加工和整合的过程。

如果我们把人脑比作一个“加工厂”，那么思维的材料就是“原料”，思维的结果就是“产品”，影响“产品”质量的第一要素就是来自人脑外部与内部“原料”的质量。除此之外，情感要素也是重要的因素之一，它起到“催化剂”的作用。这一过程可用下列图式表示：



从这一过程来看，数学思维是一个从外感到内化的交互作用过程。一方面，数学思维是主体将外部材料转化为内部材料的信息增殖过程，也是从感性认识上升到理性认识、从感性材料转化为理性材料的过程；另一方面，内部材料在经常得到恰当使用的情况下，趋向明晰化、强化和进化，表现为主体认知结构的完善和发展。同时，数学思维与情感也是一个互动的过程，良好的数学情感对数学思维具有启动、维护、加速的作用；而数学思维的结果又对学生喜欢数学、乐意接受数学思维的挑战具有强化的作用。

认知心理学认为，只有认知因素(认知结构和认知过程)，才是决定学习结果和学习效率的直接因素。学生已掌握的知识状况，即贮存的内部材料背景影响着新的学习和解题思维的展开。如果学生没有预先存在的可利用的、可区分的、清晰的认知结构，就不会产

生有意义的学习。教育心理学家加涅(Gagne)把“教”定义为“用来激活和支持内部学习过程的外部事件的安排”，把“学”定义为“由于经验而引起的学习者的知识变化”。因此，教学活动过程即学生的思维活动过程的优化，既要注意学习的外部材料的组织，使其体现过程性、探索性，更要重视学习的内部条件即思维内部材料的表征，使其体现条件化、结构化、策略化。

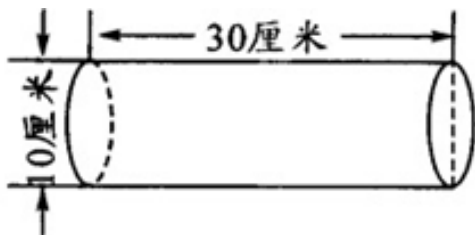
第一节 过程性

案例

“圆锥体积”的教学

1. 呈现问题情境。

“张师傅给了徒弟小王一根圆柱形木头(如图)，让他做一个底面直径是 10 厘米、高是 5 厘米的圆锥。如果你是小王，你准备怎样做？”



先由学生独立思考，再经过学习小组交流，总结出：

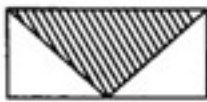
- (1) 截取长 5 厘米的圆柱形木头；
- (2) 找出圆柱一个底面的中心；
- (3) 沿着这个中心点和圆柱另一底面削去边缘部分。(辅以计算机教学媒体或实物演示)

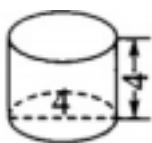
2. 猜测估计建立联系。

(1) 请你估计一下，这个做成的底面直径是 10 厘米、高是 5 厘米的圆锥体积是多少立方厘米？并说出估计的理由。

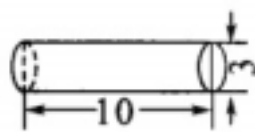
整理学生反馈的一些数据材料(见下页)。

(2) 根据已知圆柱及它的体积，请你估计一下下列圆锥的体积是多少。(单位:厘米)

估计体积(立方厘米)	200、196.25、100、300、130……
数据特征	比底面直径是10厘米、高是5厘米的圆柱体积(392.5立方厘米)小。
估计理由	<p>①因为要削去一部分,肯定比没有做圆锥之前的圆柱体积小。</p> <p>②根据图中阴影部分面积是整个长方形面积的一半,估计做好的这个圆锥体积是原来圆柱体积的一半。</p> <p>③凭经验,认为一半也不到。</p> 



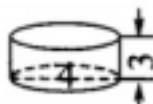
$V = 50.24$ 立方厘米



$V = 70.65$ 立方厘米



$V = 58.875$ 立方厘米



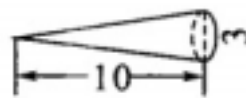
$V = 37.68$ 立方厘米



$V = ?$ 立方厘米



$V = ?$ 立方厘米



$V = ?$ 立方厘米

(3)通过刚才的练习,请你说一说,怎样估计一个圆锥的体积?

讨论后归纳:

一个圆锥的体积比与它等底等高的圆柱体积小,可能是一半或一半也不到。

3. 实验得出结论。

(1)操作。上述的估计究竟对不对?请学生根据已经准备好的材料(等底等高的、等底不等高的、等高不等底的、不等底不等高的圆柱和圆锥若干个,沙子及实验盒等)以小组为单位验证一下。

(2)讨论。交流实验过程，得出实验结论：一个圆锥的体积是等底等高的圆柱体积的 $\frac{1}{3}$ 。

4. 运用结论，抽象归纳公式。

(1) 求出下列圆锥的体积。(题略)

(2) 归纳。计算圆锥体积的方法：先求出与这个圆锥等底等高的圆柱(假设)的体积，再将这个圆柱的体积乘以 $\frac{1}{3}$ 。

用字母公式表示：

$$V_{\text{圆锥}} = \frac{1}{3} V_{\text{与圆锥等底等高的圆柱}}$$

如果用 S 和 h 分别表示圆锥的底面积和高，那么

$$V_{\text{圆锥}} = \frac{1}{3} Sh。$$

5. 比较推理，新旧串联。

出示等底等高的圆锥和圆柱各一个，学生说出它们的体积关系后，运用电教手段使它们变为动态，并让学生回答下列问题：

(1) 把圆锥的高升高到原来的 3 倍，圆柱不变，这时两者之间的体积关系怎样？

(2) 把圆锥还原，而把圆柱的高升高到原来的 3 倍，这时两者之间的体积关系怎样？

(3) 把圆锥和圆柱的高同时增加到原来的 3 倍，这时它们的体积关系怎样？

6. 尝试解答例题，巩固练习。(略)

解读

现行人教版六年制教材第十二册“圆锥的体积”一节，提供的思维素材可以分成两部分：

1. 圆锥体积公式的推导。其基本方法是运用实验得出圆锥的体积公式。

2. 圆锥体积公式的应用。包括两道例题和一组练习。

由于现行数学教材内容主要只是数学思维结果的系统表述，如果在数学教学过程中，教师把教学内容的安排不作处理而直截了当地呈现在学生面前，就会掩盖数学知识获得的思维过程，这不利于培养学生的数学思维能力。因此，如何将作为思维结果的教学内容看做思维过程的材料，对它进行充实、重组和处理，把“现成”的

数学变成“活动的”、学生自己重新构建的数学，是教学设计的指导思想。

上述案例，根据这一教学设计的指导思想，把圆锥的体积这部分教学内容作了如下处理：

教材内容环节	教学过程设计环节	说 明
1. 给出实验方法 得出公式。	1. 呈现问题情境：由圆柱制作圆锥。	提出实际问题，激发求知欲，并建立圆柱与圆锥之间关系的表象。
	2. 猜测估计具体圆锥的体积，得出： $V_{圆锥} \leq \frac{1}{2} V_{圆柱}$ （等底等高）。	根据表象，进行猜想估计，产生“实验”的需要和框架。
	3. 实验得出结论： $V_{圆锥} = \frac{1}{3} V_{圆柱}$ （等底等高）。	提供丰富的材料，让学生在多次实验的基础上比较鉴别得出结论。
	4. 运用结论，抽象归纳公式： $V_{圆锥} = \frac{1}{3} Sh$ 。	变给出结论为构造结论，训练思维。
	5. 运用比较推理，新旧串联，强化记忆。	加强新旧联系，突出圆柱与圆锥体积关系，训练思维。
2. 安排例题、练习，以应用公式、巩固知识。	6. 尝试解答例题，巩固练习，布置作业。	在运用中强化，将知识转化为心智技能。

将教材中的两个环节基本内容扩充改造成上述的 6 个环节后，1~3 环节主要体现了思维的外感过程，即通过观察、比较、实验等活动，从外部获取思维材料信息，并进行初步加工。4~5 环节主要体现了思维的內化过程，即通过抽象、归纳、比较、推理等内部思维活动，对外感的思维材料信息进行深加工，并与已有知识联系，形成结构。最后的环节 6 是思维的再次外化。这样就使学生的数学认知结构得到发展。在教学目的方面，不仅能使学生掌握圆锥体积公式及其运用，而且培养了学生在解决问题时进行观察、比较、猜想、分析推理的能力。

第二节 探索性

案例

“两位数减一位数的退位减法”的教材处理