摇图书在版编目（悦陨）数据

摇高中同步学·练·考援数学援高二援上 辕林绍华编援
哈尔滨：北方文艺出版社，圆园园缘
摇陨杂月晕苑原缘猿员苑原员缘圆园原缘

摇Ⅰ援高援援摇Ⅱ援林援援摇Ⅲ援数学课－高中－教学
参考资料摇Ⅳ援郧远猿源

中国版本图书馆悦陨孕数据核字（圆园园缘）第园苑猿缘员园号

总 主 编摇喻选芳
本科主编摇林绍华
编摇摇委摇王摇涛摇易华丽摇吴清华摇熊明珠摇李海峰摇张智忱
刘玉英摇高易新摇林绍华摇陈建森摇万兴灿摇周钦鉴
鲍同强摇徐摇惠摇钟卫华摇陈晓明摇杜光艳摇关志学
胡常思摇景宝珍

高 中 同 步 学·练·考
早葬灶早凿怎灶早遭怎曾澡燥灶早则葬灶早
重 难 点 解 析 与 能 力 训 练 丛 书摇数 学摇高二（上）
扎澡燥灶早灶葬灶凿蚤葬灶躁蚤藻曾蚤赠怎灶藻灶早造蚤曾怎灶造蚤葬灶糟燥灶早泽澡怎

责任编辑 辕李玉鹏摇于祺盛
封面设计 辕明悦平面动画设计工作室
出版发行 辕北方文艺出版社
地摇摇址 辕哈尔滨市道外区大方里小区 员园号楼
网摇摇址 辕澡贼贼责:辕辕憎憎憎援遭枣憎赠援糟燥皂
邮摇摇编 辕员缘园园园园
电摇摇话 辕（园源缘员）愿远员员源园园
电子信箱 辕遭枣憎赠岳遭枣憎赠援糟燥皂
经摇摇销 辕新华书店
印摇摇刷 辕黑龙江大学印刷厂
开摇摇本 辕苑愿苑×员园怨圆摇员辕员远
印摇摇张 辕猿园援缘
字摇摇数 辕缘园园千
版摇摇次 辕圆园园缘年 缘月第 员版
印摇摇次 辕圆园园缘年 缘月第 员次印刷
定摇摇价 辕猿远援园园元
书摇摇号 辕陨杂月晕苑原缘猿员苑原员缘圆园原缘辕郧·员园源

目　　录

第六章 不等式

本章目标

1. 理解不等式的性质及证明，理解绝对值不等式 $|a|-|b|\leq|a+b|\leq|a|+|b|$；
2. 掌握两个（不扩展到三个）正数的算术平均数不小于它们的几何平均数的定理，并会简单地应用它求函数最值，注意运用条件即“一证二定三等”；
3. 掌握分析法、综合法、比较法证明简单的不等式，并掌握某些简单不等式的解法，培养辨证唯物主义思想和分析解决问题的能力。

第一节 不等式的性质

知识梳理

1. 实数性质：$a>b\Rightarrow a-b>0$

$a=b\Rightarrow a-b=0$

$a<b\Rightarrow a-b<0$

2. 不等式的性质：

定理 1 如果 $a>b$，那么 $b<a$；

如果 $b<a$，那么 $a>b$。

定理 2 如果 $a>b$，且 $b>c$，那么 $a>c$。

定理 3 如果 $a>b$，那么 $a+c>b+c$。

推论 如果 $a>b$，且 $c>d$，那么 $a+c>b+d$。

定理 4 如果 $a>b$，且 $c>0$，那么 $ac>bc$；

如果 $a>b$，且 $c<0$，那么 $ac<bc$。

推论 1 如果 $a>b>0$，且 $c>d>0$，那么 $ac>bd$。

推论 2 如果 $a>b>0$，那么 $a^n>b^n$（$n\in N$，且 $n>1$）。

定理 5 如果 $a>b>0$，那么 $\sqrt[n]{a}>\sqrt[n]{b}$（$n\in N$，且 $n>1$）。

重点解说

1. 实数性质是比较实数大小的重要依据，也为不等式证明比较法之差比法提供了有力的保证。
2. 不等式的性质定理 2 不可逆用；定理 3 的推论为同向相加性，不可忽视不等式的方向。

难 点 讨 论

员援不等式两边同乘某数或某式时，不等号的方向与这个数或式的符号密切相关。

【例 员】（课本 孕苑习题）判断各命题的真假，并说明理由：

员援如果 葬跃遭，那么 葬糟跃遭糟；

圆援如果 葬糟圆≥遭糟圆，那么 葬≥遭援

〔讨论〕判断不等式是否成立，推理是否严密，关键是要牢扣不等式的基本性质，不可任意添加或改变条件。命题 员错误，因为 悦的符号不确定；命题 圆也是错误的，因为 悦圆不一定为正，悦圆可等于 园，所以命题 圆若加一个限制（悦≠园），则为正确的命题。

圆援同向不等式才能相加，同向不等式相乘时要注意符号的限制。

【例 圆】（课本 孕愿习题）如果 园约葬约遭约员，灶∈ 晕，试比较 $\frac{员}{葬}$，$\frac{员}{遭}$，员三者的大小。

〔讨论〕比较大小的重要依据即不等式的基本性质。因为 园约葬约员，所以 $\frac{员}{葬}$跃员，同样 $\frac{员}{遭}$跃员，故有 ($\frac{员}{葬}$)灶跃员灶，($\frac{员}{遭}$)灶跃员灶，即 $\frac{员}{葬}$跃员，$\frac{员}{遭}$跃员；而 $\frac{员}{葬}$与 $\frac{员}{遭}$的大小则取决于 $\frac{员}{葬}$与 $\frac{员}{遭}$的大小，因为 $\frac{员}{葬}$原 $\frac{员}{遭}$越 $\frac{遭原葬}{葬遭}$，所以 $\frac{员}{葬}$跃 $\frac{员}{遭}$跃园，所以（$\frac{员}{葬}$）灶 跃（$\frac{员}{遭}$）灶，故（$\frac{员}{葬}$）灶跃（$\frac{员}{遭}$）灶跃员。注意，根据不等式的性质 灶∈ 晕*，而已知 灶∈ 晕，所以 灶越园时应另作讨论。灶越园时，（$\frac{员}{葬}$）灶越（$\frac{员}{遭}$）灶越员，故结论应是（$\frac{员}{葬}$）灶≥（$\frac{员}{葬}$）灶≥员援

易 误 警 示

【例 员】如果 葬跃遭，糟跃凿，是否可推出 葬糟跃遭凿？举例说明。

误解：可推出，根据同向不等式可相乘，符号不变，如 葬越源，遭越猿，糟越圆，凿越员时满足。

正解：不可推出，因为同向不等式可相加但相乘时一定要注意符号，如 葬越源，遭越圆，糟越原员，凿越原圆，此时 葬糟越原源，遭凿越原源，此时 葬糟越遭凿，结论不成立。

〔警示〕回答错误的原因在于忽视不等式同向相乘时的条件，原内容应是 葬跃遭跃园，糟跃凿跃园援

【例 圆】若实数 曾，赠满足 原猿约曾垣赠约猿，求 曾原赠的取值范围。

误解：疫 原猿约赠约猿摇亦 原猿约原赠约猿摇又 原猿约曾垣赠约猿摇亦 原远约曾原赠约远援

正解：疫 原猿约赠约猿摇亦 原猿约原赠约猿摇又 原猿约曾垣赠约猿摇亦 原远约曾原赠约远

又 曾约赠摇摇摇亦 原远约曾原赠约园援

〔警示〕员援注意深刻挖掘题中条件，充分利用每个条件；

圆援曾与 赠的大小决定了 曾原赠的符号援

猿援考虑问题定要周密援

名 题 精 析

【例 员】摇下列命题：（员）葬跃遭 且 葬，遭同号，则有 $\frac{员}{葬}$约 $\frac{员}{遭}$；（圆）若 $\frac{员}{葬}$跃员，则 葬约员；（猿）若 葬≥遭

且 葬糟≥遭糟，则有 糟≥园；（源）若 葬跃遭，灶∈ 晕则有 葬圆灶垣员跃遭圆灶垣员，其中正确命题的序号为

·圆·

________援

〔精析〕本题属开放性题型，必须准确无误地判断各个命题的真假，方能选出正确的答案。

〔解答〕(员 中 $\frac{员}{葬}$原$\frac{员}{遭}$越$\frac{遭原葬}{葬遭}$，疫葬 遭同号且 葬跃遭摇亦$\frac{遭原葬}{葬遭}$约园摇亦$\frac{员}{葬}$约$\frac{员}{遭}$摇亦(员 正确；(圆 中$\frac{员}{葬}$跃员摇亦$\frac{员原葬}{葬}$跃园摇亦葬(员原葬 跃园摇亦园约葬约员而 葬约员不准确，亦(圆 错误；(猿 中 葬糟≥遭糟摇亦糟(葬原遭 ≥园 又 葬≥遭摇亦葬原遭≥园 当 葬原遭跃园时 糟≥园成立，当 葬原遭越园 糟≤砥 亦(猿 错误；(源 直接考虑函数 赠越曾^{员}的单调性援因为 赠越曾^{员}在 砥上单调递增，所以有 葬跃遭时，葬^{员}跃遭^{员}成立，故(源 正确。综上所述，答案为(员 和(源 援

【例 圆】摇已知 原员≤葬垣遭≤员，员≤葬原圆遭≤源 求 葬垣园遭的取值范围。

〔精析〕已知若干个代数式的范围，求另外一个代数式的范围，应直接从已知代数式出发，不应先解其中某些量范围，否则范围将扩大。

〔解答〕设 葬垣园遭越曾(葬垣遭 垣赠(葬原圆遭

亦葬垣园遭越(曾垣赠 葬垣(曾原圆赠 遭

亦$\begin{cases}曾垣赠越员\\曾原圆赠越猿\end{cases}$摇摇解为 曾越$\frac{缘}{猿}$，赠越原$\frac{圆}{猿}$

亦葬垣园遭越$\frac{缘}{猿}$(葬垣遭 原$\frac{圆}{猿}$(葬原圆遭

而 原$\frac{缘}{猿}$≤$\frac{缘}{猿}$(葬垣遭 ≤$\frac{缘}{猿}$，原$\frac{愿}{猿}$≤ 原$\frac{圆}{猿}$(葬原圆遭 ≤ 原$\frac{圆}{猿}$，亦 原$\frac{员猿}{猿}$≤葬垣园遭≤员

【例 猿】摇已知 曾跃赠跃园 试比较$\sqrt{\frac{赠圆垣员}{曾圆垣员}}$与$\frac{赠}{曾}$的大小。

〔精析〕利用不等式的性质，当两数均为正时，可通过将其同时 灶次方后再比较大小。

〔解答〕疫 $\left(\sqrt{\frac{赠圆垣员}{曾圆垣员}}\right)^{圆}$原$\left(\frac{赠}{曾}\right)^{圆}$越$\frac{赠圆垣员}{曾圆垣员}$原$\frac{赠圆}{曾圆}$越$\frac{曾圆原赠圆}{曾圆(曾圆垣员)}$越$\frac{(曾垣赠)(曾原赠)}{曾圆(曾圆垣员)}$

疫曾跃赠跃园摇亦$\frac{(曾垣赠)(曾原赠)}{曾圆(曾圆垣员)}$跃园

亦$\frac{赠圆垣员}{曾圆垣员}$原$\frac{赠圆}{曾圆}$跃园摇又 曾 赠跃园摇亦$\sqrt{\frac{赠圆垣员}{曾圆垣员}}$跃$\frac{赠}{曾}$

【例 源】摇已知 渣葬渣约员，渣遭渣约员，比较 渣葬垣遭渣垣渣葬原遭渣与 圆的大小。

〔精析〕对两上不易直接比较大小的非负数可采用比较其平方的大小，并充分利用题设的条件而解得。

〔解答〕(渣葬垣遭渣垣渣葬原遭渣)^{圆}越(葬垣遭)^{圆}垣(葬原遭)^{圆}垣园渣葬^{圆}原遭^{圆}渣越圆葬^{圆}垣圆遭^{圆}垣园渣葬^{圆}原遭^{圆}渣

越$\begin{cases}源葬^{圆}摇(渣葬渣\geq 渣遭渣)\\源遭^{圆}摇(渣葬渣约渣遭渣)\end{cases}$

亦 渣葬垣遭渣垣渣葬原遭渣越$\begin{cases}圆渣葬渣摇(渣葬渣\geq 渣遭渣)\\圆渣遭渣摇(渣葬渣约渣遭渣)\end{cases}$

又疫 渣葬渣约员且 渣遭渣约员摇亦 渣葬垣遭渣垣渣葬原遭渣约圆

【例 缘】摇设 枣(曾 越员垣造燥早$_{曾}$猿 早(曾 越圆造燥早$_{曾}$圆 其中 曾跃园且 曾≠员 试比较 枣(曾 与 早(曾 的大小。

〔精析〕比较大小的基本方法差比，对数运算法则要熟练掌握，利用对数函数单调性时要注意底数的范围。

〔解答〕 枣(曾) 原早(曾) 越遭猿曾/源曾

①园约曾约员时，园约猿/源曾约猿/源约员摇亦遭猿曾/源曾跃园

②曾跃员时，猿/源曾跃猿/源

若 园约猿/源曾约员即 员约曾约源/猿时，遭猿曾/源曾约园;

若猿/源曾跃员即 曾跃源/猿时，遭猿曾/源曾跃园;

若猿/源曾越员即 曾越源/猿时，遭猿曾/源曾越园援

综上：当 园约曾约员或 曾跃源/猿时，枣(曾) 跃早(曾)；

当 曾越源/猿时，枣(曾) 越早(曾)；

当 员约曾约源/猿时，枣(曾) 约早(曾)援

【例 远】 摇求证：若 葬垣遭垣糟跃园，葬遭垣遭糟垣糟葬跃园且 葬遭糟跃园，则 葬跃园，遭跃园，糟跃园援

〔精析〕 要证 葬、遭、糟均为正数，即判断 葬、遭、糟的符号，必须准确把握实数的性质，如：两正数之和为正数，两负数之和为负数，同号两数相乘符号为正，异号相乘得负。本题中 葬遭糟跃园，可得 葬、遭、糟中至少有一个为正，且另外两个同号。

〔解答〕 由 葬遭糟跃园知 葬、遭、糟至少一个为正，不妨设 葬跃园，假设 遭、糟不全为正，则 遭约园且 糟约园，疫葬垣遭垣糟跃园摇亦葬跃原遭原糟跃园，亦葬遭约遭(原遭原糟) 越原遭²原遭糟，即 葬遭垣遭糟约原遭²，亦葬遭垣遭糟垣糟葬约原遭²垣糟葬约园，与题设矛盾，故 遭、糟全为正，故得证援

能力训练

一、选择题

员援如果 葬跃遭，糟跃凿，则一定有（摇摇摇）

粤援糟原凿跃葬原遭摇摇月援遭原糟跃葬原凿摇摇悦援葬垣凿跃遭垣糟摇摇阅援凿原葬跃遭原糟

圆援若 葬约猿，则一定有（摇摇摇）

粤援葬原圆/猿约猿原圆/猿摇摇摇摇月援渣葬渣原圆/猿约猿原圆/猿

悦援葬原渣圆/猿渣约猿原渣圆/猿渣摇阅援渣葬原圆/猿渣约渣猿原圆/猿渣

猿援若 曾约员且曾跃园，则有（摇摇摇）

粤援曾跃曾²跃曾³摇摇月援曾²跃曾跃曾³摇摇悦援曾跃曾³跃曾²摇摇阅援曾³跃曾跃曾²

源援已知 葬约遭约园，则下列关系式中不能成立的是（摇摇摇）

粤援员/葬跃员/遭摇摇月援渣葬渣跃渣遭渣摇摇悦援葬²跃遭²摇摇阅援√原葬约√原遭

缘援若 皂约灶，责约择，且（责原皂）（责原灶）约园，（择原皂）（择原灶）约园，则 皂、灶、责、择的大小顺序是（摇摇摇）

粤援皂约责约择约灶摇摇月援责约皂约择约灶摇摇悦援皂约责约灶约择摇摇阅援责约皂约灶约择

远援若 葬跃遭跃糟 则 $\frac{员}{葬原糟}$ 垣 $\frac{员}{糟原遭}$ 的值为（摇摇摇）

粤援正数摇摇月援负数摇摇悦援非正数摇摇阅援非负数

苑援设 葬跃遭跃园 下列各数小于 员的是（摇摇摇）

粤援圆^{葬原遭}摇摇月援$\left(\frac{葬}{遭}\right)^{\frac{员}{圆}}$摇摇悦援$\left(\frac{葬}{遭}\right)^{葬原遭}$摇摇阅援$\left(\frac{遭}{葬}\right)^{葬原遭}$

愿援设命题甲$\begin{cases}园约曾垣赠约源\\园约曾赠约猿\end{cases}$，命题乙$\begin{cases}园约曾约员\\园约赠约猿\end{cases}$ 那么（摇摇摇）

粤援甲是乙的充分非必要条件摇摇月援甲是乙的必要非充分条件

悦援甲是乙的充要条件摇摇摇摇摇阅援甲是乙的既不充分又不必要条件

怨援若 葬 遭为实数，则 葬遭（葬原遭） 约园成立的一个充要条件是（摇摇摇）

粤援园约$\frac{员}{葬}$约$\frac{员}{遭}$摇摇月援园约$\frac{员}{遭}$约$\frac{员}{葬}$摇摇悦援$\frac{员}{葬}$约$\frac{员}{遭}$摇摇阅援$\frac{员}{遭}$约$\frac{员}{葬}$

员园援已知 葬 遭 皂∈砸垣，葬约遭 那么一定成立的是（摇摇摇）

粤援$\frac{葬垣皂}{遭垣皂}$约$\frac{葬}{遭}$摇摇月援$\frac{葬垣皂}{遭垣皂}$跃$\frac{葬}{遭}$摇摇悦援$\frac{葬原皂}{遭原皂}$跃$\frac{葬}{遭}$摇摇阅援$\frac{葬原皂}{遭原皂}$约$\frac{葬}{遭}$

二、填空题

员援已知 葬约遭 葬遭约园 则$\frac{员}{葬}$________$\frac{员}{遭}$（填“ 跃”或“ 约”或“ 越”）

圆援已知 葬^{圆}约曾约葬 酝越造燥早$_葬$曾^{圆}，晕越造燥早$_葬$（造燥早$_葬$曾）援孕越（造燥早$_葬$曾）^{圆}，则有 酝、晕、孕的大小关系为________援

猿援已知 葬 遭 糟∈砸^{垣}且 葬跃遭跃糟 则 $\sqrt{葬遭}$ $\sqrt{遭糟}$ $\sqrt{葬糟}$ 悦从小到大的排列顺序是________援

源援若 α∈〔原$\frac{\pi}{猿}$，$\frac{\pi}{远}$〕，则 泽蚤灶α 垣糟燥泽α 的范围为________援

缘援已知 原员≤葬垣遭≤员，员≤葬原遭≤猿 则 葬垣猿遭的范围为________援

远援已知 员园约葬约圆园，员缘约遭约猿远，则 葬原遭的范围为________，葬遭的范围为________，$\frac{葬}{遭}$的范围为________援

三、解答题

员援求证：（员） 葬跃遭跃园，凿跃糟跃园$\Rightarrow\frac{葬}{糟}$跃$\frac{遭}{凿}$

（圆） 葬 遭∈砸， $\sqrt[猿]{葬}$跃$\sqrt[猿]{遭}$$\Rightarrow$葬跃遭

圆援已知实数 葬 遭 糟 凿满足下列条件：

①凿跃糟 ②葬垣遭越糟垣凿 ③葬垣凿约遭垣糟

请将 葬 遭 糟 凿按从大到小的顺序排列。

猿援已知函数 枣（曾） 越葬曾^{圆}垣遭曾 且 员≤枣（原员）≤圆 圆≤枣（员） ≤源

求 枣（原圆） 的取值范围。

源援若 原圆约葬约遭约猿 原圆约糟约园 试求（葬原遭） 糟的取值范围。

缘援已知：葬跃园，遭跃园，葬原园越遭原园，试确定葬、遭、糟的大小关系。

第二节摇算术平均数与几何平均数

知 识 梳 理

员援两个定理

定理员摇如果葬、遭沂砸，那么葬垣遭≥园葬遭（当且仅当葬越遭时取等号）；

定理园摇如果葬、遭是正实数，那么$\frac{葬垣遭}{园}$≥$\sqrt{葬遭}$（当且仅当葬越遭时取等号）

园援两个概念

算术平均数：$\frac{葬垣遭}{园}$为葬、遭的算术平均数援

几何平均数：$\sqrt{葬遭}$为葬、遭的几何平均数

猿援定理的应用———求最值；证明不等式。

重 点 解 说

员援定理员与定理园的条件注意区别。

园援平均数一般是对正数而言，算术平均数大于等于几何平均数的几何解释要理解。

猿援应用重要不等式求最值时注意三个条件：一正二定三等。

难 点 讨 论

员援利用重要不等式求最值时，不可忽视三个条件：一正二定三等。

【例员】（课本 孕员远练习猿）已知曾≠园，当曾取何值时，曾垣$\frac{愿员}{曾}$的值最小，最小值是多少？

〔讨论〕利用重要不等式可求曾垣$\frac{愿员}{曾}$的最值，疫曾≠园，亦曾跃园，亦曾垣$\frac{愿员}{曾}$≥园$\sqrt{曾垣\frac{愿员}{曾}}$越员愿（等号当且仅当曾垣$\frac{愿员}{曾}$时成立即曾越依怨时成立），故曾越依怨时，曾垣$\frac{愿员}{曾}$的最小值为员愿。此处若曾加一个限制如曾跃豫，则等号不可能取的，此时不等式失效。

园援曾垣赠≥园曾赠对曾、赠沂砸成立，不需曾、赠均为正数。

【例园】已知曾垣赠越员，求曾赠的取值范围。

〔讨论〕疫曾垣赠越员，且曾 赠≤砸有 曾垣赠≥圆渣曾赠渣，

亦圆渣曾赠渣≤员摇亦 渣曾赠渣≤$\frac{员}{圆}$摇摇摇亦 原$\frac{员}{圆}$≤曾赠≤$\frac{员}{圆}$援

此题不能简单地由 曾垣赠≥圆曾赠得出 曾赠≤$\frac{员}{圆}$，当曾 赠异号时，曾赠仍有限制。

易误警示

【例员】求函数 赠越$\frac{曾垣缘}{\sqrt{曾垣原}}$的最小值。

误解：赠越$\frac{曾垣缘}{\sqrt{曾垣原}}$越$\frac{曾垣原垣员}{曾垣原}$越$\sqrt{曾垣原}$垣$\frac{员}{\sqrt{曾垣原}}$≥圆摇亦函数最小值是 圆

正解：赠越$\frac{曾垣缘}{\sqrt{曾垣原}}$越$\sqrt{曾垣原}$垣$\frac{员}{\sqrt{曾垣原}}$摇令 贼越$\sqrt{曾垣原}$ 亦贼≥圆

考查函数 赠越贼垣$\frac{员}{贼}$在〔圆 垣）上单调递增，亦赠≥圆垣$\frac{员}{圆}$越$\frac{缘}{圆}$

故函数最小值是$\frac{缘}{圆}$援

〔警示〕利用重要不等式求最值时不可忽视等号成立的条件，错解的根源就在于此。

【例圆】求函数 赠越造燥早圆曾垣造燥早曾圆的值域。

误解：赠越造燥早圆曾垣造燥早曾圆越造燥早圆曾垣造燥早圆曾员≥猿摇亦值域为〔猿 垣）

正解：赠越造燥早圆曾垣造燥早曾圆越造燥早圆曾垣造燥早圆曾员

若 造燥早圆曾跃园 则 赠≥猿

若 造燥早圆曾约园 则 赠≤ 原员

故值域为（ 原肄， 原员 ∪〔猿 垣）

〔警示〕利用重要不等式求最值时不可忽视前提即为正数的前提。

名题精析

【例员】摇求证：曾跃园时，曾垣圆曾垣$\frac{源}{曾}$跃远成立。

〔精析〕本题的实质在于证明三个正数之和大于一个常数，且三正数之积为定值。因此应想到利用重要不等式。

〔解答〕疫曾跃园摇摇亦曾，圆曾，$\frac{源}{曾}$∈砸垣摇亦曾垣圆曾垣$\frac{源}{曾}$≥猿援$\sqrt[猿]{曾·圆曾·\frac{源}{曾}}$越远

（等号当且仅当 曾越圆曾越$\frac{源}{曾}$）时成立

疫曾跃园摇亦曾越圆曾越$\frac{源}{曾}$不可能成立

亦等号不可能取到，亦不能取等号，亦曾垣圆曾垣$\frac{源}{曾}$跃远成立援

【例圆】摇当 曾跃原员 求函数 枣(曾) 越曾垣$\frac{员}{曾垣员}$的最小值。

〔精析〕利用重要不等式求和的最小值，要凑“积定”，而 曾垣员与$\frac{员}{曾垣员}$积定，所以此处要加项。

〔解答〕疫曾跃原员 摇亦曾垣员跃园

亦枣(曾) 越曾垣$\frac{员}{曾垣员}$越曾垣员垣$\frac{员}{曾垣员}$原员≥圆原员越员（等号当且仅当 曾垣员越$\frac{员}{曾垣员}$即 曾越园时成立）

故所求最小值为 员 且此时 曾越园

【例猿】摇已知 θ 为锐角，求函数 赠越糟燥泽θ 泽蚤灶 圆θ 的最大值。

〔精析〕利用重要不等式求积的最大值凑“积定”，而对于 糟燥泽θ 与 泽蚤灶 圆θ，有 糟燥泽θ 垣泽蚤灶 圆θ 越员，故想到求（糟燥泽θ 泽蚤灶θ）圆越糟燥泽θ 糟燥泽θ 泽蚤灶 圆θ 的最大值。

〔解答〕疫θ 为锐角摇摇亦糟燥泽θ 跃园，泽蚤灶θ 跃园

亦赠越糟燥泽θ 泽蚤灶θ 越$\sqrt{糟燥泽^{圆}\theta泽蚤灶^{圆}\theta}$ 越$\sqrt{糟燥泽\theta糟燥泽\theta泽蚤灶^{圆}\theta}$ 越圆$\sqrt{\frac{员}{圆}糟燥泽\theta\cdot\frac{员}{圆}糟燥泽\theta\cdot泽蚤灶^{圆}\theta}\leqslant$圆$\sqrt{（\frac{员}{猿}）^{猿}}$ 越

$\frac{圆\sqrt{猿}}{怨}$摇当等号且仅当$\frac{员}{圆}$糟燥泽θ 越泽蚤灶$^{圆}\theta$ 即 θ 越$\frac{\pi}{源}$取得，故 赠越糟燥泽θ 泽蚤灶θ 最大值$\frac{圆\sqrt{猿}}{怨}$援

【例源】摇已知 葬跃园，遭跃园且 猿葬遭越葬垣遭垣员，求 葬遭的最小值。

〔精析〕分析已知，既有 葬遭又有 葬垣遭，所以先利用重要不等式将形式统一。

〔解答〕疫葬跃园，遭跃园摇摇摇摇亦葬垣遭$\geqslant$圆$\sqrt{葬遭}$

则 猿葬遭越葬垣遭垣员变形为 猿葬遭$\geqslant$圆$\sqrt{葬遭}$垣员摇亦猿（$\sqrt{葬遭}$）^{圆}原圆$\sqrt{葬遭}$原员$\geqslant$园

亦$\sqrt{葬遭}\geqslant$员或$\sqrt{葬遭}\leqslant$原$\frac{员}{猿}$（舍）摇亦葬遭$\geqslant$员摇故 葬遭的最小值为 员

【例缘】摇在垂直于水平面的墙壁上悬挂一矩形镜框，某人在距离墙壁 曾皂处仰视此镜框，镜框的上、下边缘与此人的水平视线相距分别为 葬皂，遭皂，此人看到整个镜框的视角要最大，求 曾援

〔精析〕要求何时角最大，事实上是一个最大值问题，而对一个角而言，应考虑其三角函数值，如正切。

〔解答〕设此人看到整个镜框的视角为 θ，则 贼葬灶θ 越$\frac{\frac{葬}{曾}原\frac{遭}{曾}}{员垣\frac{葬}{曾}\cdot\frac{遭}{曾}}$越$\frac{葬原遭}{曾垣\frac{葬遭}{曾}}$要使 θ 最大，即 贼葬灶θ 最大，即 曾

垣$\frac{葬遭}{曾}$最小，而 曾垣$\frac{葬遭}{曾}\geqslant$圆$\sqrt{葬遭}$（等号当且仅当 曾越$\frac{葬遭}{曾}$即 曾越$\sqrt{葬遭}$时取得）

亦曾越$\sqrt{葬遭}$时，视角最大援

【例远】摇求函数 枣（曾）越$\frac{曾^{圆}垣缘}{\sqrt{曾^{圆}垣源}}$的最小值。

〔精析〕求函数 枣（曾）的最小值，关键在于变形，变为 赠越贼垣$\frac{员}{贼}$型，但要注意，若利用重要不等式要注意“贼跃园”的限制，且要保证等号成立。若 贼跃员或 园约贼约员，则不能保证等号成立，此时要利用函数在区间上的单调性。对 赠越贼垣$\frac{员}{贼}$在（园，员）上单调递减，（员，垣∞）上单调递增

〔解答〕疫枣（曾）越$\frac{曾^{圆}垣缘}{\sqrt{曾^{圆}垣源}}$摇摇亦枣（曾）越$\frac{曾^{圆}垣源垣员}{\sqrt{曾^{圆}垣源}}$越$\sqrt{曾^{圆}垣源}$垣$\frac{员}{\sqrt{曾^{圆}垣源}}$

疫$\sqrt{曾^{圆}垣源}\geqslant\sqrt{源}$越圆，亦$\sqrt{曾^{圆}垣源}$沂（员，垣∞）

亦考虑函数 枣（曾）越曾垣$\frac{员}{曾}$在（员，垣∞）上单调递增。

亦枣（曾）$\geqslant$猿垣$\frac{员}{猿}$越$\frac{缘}{猿}$摇摇亦枣（曾）最小值为$\frac{缘}{猿}$援

能力训练

一、选择题

员援若 园跃葬跃遭跃园，则 葬垣 $\frac{源}{(园葬原遭)遭}$ 的最小值为（摇摇摇）

粤援猿摇摇摇月援员摇摇摇悦援愿摇摇摇阅援员圆

圆援赠越源原 $\frac{源}{曾}$ 原曾圆的最值情况是（摇摇摇）

粤援当 曾越依 $\sqrt{园}$ 时，有最大值 园摇摇摇月援当 曾越园时，有最小值 园

悦援当 曾越 $\sqrt{园}$ 时，有最大值 园　　　阅援当 曾越 $\sqrt{园}$ 时，有最小值 园

猿援已知 葬跃遭跃园，全集∪越砸，酝越｛曾渣遭约曾约 $\frac{葬垣遭}{园}$｝，晕越｛曾渣 $\sqrt{葬遭}$ 约曾约葬｝，孕越｛曾渣遭约曾约 $\sqrt{葬遭}$｝，则（摇摇摇）

粤援孕越酝∩悦哉晕摇摇摇月援孕越悦哉酝∩晕摇摇悦援孕越酝∩晕摇摇阅援孕越酝∪晕

源援函数 赠越曾垣 $\frac{源}{曾原员}$（曾跃员）的最小值是（摇摇摇）

粤援园摇摇摇月援猿摇摇悦援源摇摇阅援缘

缘援函数 赠越造燥早园曾垣造燥早曾园的值域为（摇摇摇）

粤援［猿，垣∞）摇摇摇摇摇摇摇摇摇月援（原∞，原猿］

悦援（原∞，原员］∪［猿，垣∞）　　阅援以上都不对

远援已知 曾跃园，葬，遭，糟为实数，且 葬，遭为正，则（摇摇摇）

粤援糟燥泽曾原 $\frac{遭}{曾}$ 约糟燥泽园 $\sqrt{葬遭}$ 摇摇摇月援糟燥泽曾原 $\frac{遭}{曾}$ 跃糟燥泽园 $\sqrt{葬遭}$

悦援糟燥泽曾原 $\frac{遭}{曾}$ ≤糟燥泽园 $\sqrt{葬遭}$ 摇摇摇阅援糟燥泽曾原 $\frac{遭}{曾}$ ≥糟燥泽园 $\sqrt{葬遭}$

苑援葬，遭，糟均为正实数，且 葬遭糟越葬垣遭垣糟，则 葬垣遭垣糟的最小值为（摇摇摇）

粤援猿摇摇摇月援猿摇摇悦援怨摇摇阅援猿

愿援葬遭没有最大值的条件是（摇摇摇）

粤援葬垣遭为定值摇摇摇摇摇摇摇月援葬，遭≥园，且 葬垣遭为定值

悦援葬，遭≥园，且 葬垣遭为定值　　阅援葬遭约园，且 葬垣遭为定值

怨援实数 葬，遭满足 葬垣遭越员，且 葬，遭≥园，则下列四数中最大的数是（摇摇摇）

粤援 $\frac{员}{园}$ 摇摇月援葬垣遭摇摇悦援园葬遭摇摇阅援葬

员园援若 园约葬约员，园≤曾约赠约员，且 造燥早葬曾·造燥早葬赠越员，那么 曾赠（摇摇摇）

粤援无最大值也无最小值摇摇摇月援无最大值有最小值

悦援有最大值无最小值摇摇摇摇阅援有最大值也有最小值

二、填空题

员援若 园约曾约 $\frac{缘}{园}$，则当 曾越________时，赠越曾（缘原园曾）有最大值________援

园援已知 曾园垣赠园越皂，葬园垣遭园越灶，则 葬曾垣遭赠的最大值是________援

猿援设一长方体的体积是 员园园园糟皂猿，则它的表面积的最小值为________援

源援函数 赠越 $\frac{(曾垣源)(曾垣怨)}{曾}$（曾跃园）的最小值为________援

缘援若 园约θ约 $\frac{\pi}{园}$，则 泽蚤灶 $\frac{\theta}{园}$（员垣糟燥泽θ）的最大值为________援

远援已知 皂跃园，灶跃园且 皂垣灶越远，则 皂圆垣灶圆的最小值是________援

三、解答题

员援设 曾，赠∈砸垣，且 曾垣赠越员，求$\frac{员}{曾}$垣$\frac{员}{赠}$的最小值援

圆援已知 曾圆垣赠圆越员，求 宰越圆曾赠垣曾垣赠（曾，赠∈砸垣）的最大值援

猿援若函数 枣（曾）越愿曾垣$\frac{员远}{(曾垣员)^{圆}}$（曾≥园），试求 枣（曾）的最小值；若 早（曾）越曾，试求 枣〔早（曾）〕的最小值援

源援已知 葬，遭，曾，赠∈砸垣，葬垣遭越员园，（$\frac{葬}{曾}$垣$\frac{遭}{赠}$）越员，且 曾垣赠的最小值为 员愿，求 葬，遭的值援

缘援从边长为 圆葬的正方形纸片各角各减一小块边长为 曾（园约曾约葬）的正方形后再折成一个无盖的盒子，则 曾为何值时，盒子容积最大，最大容积为多少？

第三节摇不等式的证明

知 识 梳 理

员援比较法证明不等式的两个依据：员援葬原遭跃园⇒葬跃遭是差比的依据；圆援葬，遭跃园时，$\frac{葬}{遭}$跃员⇒葬跃遭是商比的根据。

圆援对较复杂的不等式的证明一般先用分析法探求证明途径，再用综合法加以证明。

猿援换元法、反证法、放缩法、构造函数法要求能理解。

重 点 解 说

员援比较法之差比的目标是 园，而因式分解有利于证明不等式；不是任意一个不等式都能利用商比来证明。

圆援分析法证明不等式时，注意数学语言的准确性，一般采用“要证明……，只需证明……”的格式。

难点讨论

员援一个式子的值与 园的大小比较，取决于这个数的符号，而分解因式是判断符号的有效途径。

【例员】（课本 孕猿源练习 员） 求证：葬圆垣猿遭圆≥圆遭（葬垣遭）

〔讨论〕 先作差：左边 原右边 越葬圆垣猿遭圆原圆遭（葬垣遭）

再变形：左 原右 越葬圆垣猿遭圆原圆葬遭原圆遭圆越葬圆原圆葬遭垣遭圆越（葬原遭）圆

然后分析：疫（葬原遭）圆≥园摇摇亦左≥右

最后结论：亦葬圆垣猿遭圆≥圆遭（葬垣遭）

圆援证明不易入手时，应先用分析法探求途径。

【例圆】（课本 孕猿苑第 源题（员））求证：√猿垣√缘约源

〔讨论〕 若直接作差（√猿垣√缘原源）的符号不易判断，故不可取；因左式含根式，所以想到平方，即要证√猿垣√缘约源 即证 愿垣圆√员缘约员远 即证 圆√员缘约愿 即证 √员缘约源 而 √员缘约√员远成立，所以原不等式可证。

易误警示

【例员】 已知 葬 遭 糟为不全相等的正数，求证：$\frac{遭垣糟原葬}{葬}$垣$\frac{糟垣葬原遭}{遭}$垣$\frac{葬垣遭原糟}{糟}$跃猿

误解：将原不等式变形为：

$\frac{遭垣糟}{葬}$垣$\frac{糟垣葬}{遭}$垣$\frac{葬垣遭}{糟}$跃远摇摇亦$\frac{遭}{葬}$垣$\frac{糟}{葬}$垣$\frac{糟}{遭}$垣$\frac{葬}{遭}$垣$\frac{葬}{糟}$垣$\frac{遭}{糟}$跃远

又 葬 遭 糟沂砸垣摇摇亦$\frac{遭}{葬}$垣$\frac{葬}{遭}$≥圆 $\frac{糟}{葬}$垣$\frac{葬}{糟}$≥圆 $\frac{糟}{遭}$垣$\frac{遭}{糟}$≥圆

疫葬 遭 糟不全相等摇摇亦等号不能同时取得

亦$\frac{遭}{葬}$垣$\frac{糟}{葬}$垣$\frac{糟}{遭}$垣$\frac{葬}{遭}$垣$\frac{葬}{糟}$垣$\frac{遭}{糟}$跃远成立，亦原不等式得证。

〔警示〕 证明题逻辑混乱，这是在用分析法写过程时常见的错误，故我们提倡用分析法探求证明途径而用综合法写过程。

【例圆】 在证明（粤 式 跃（月） 式过程中，关键是证明$\frac{（粤） 式}{（月） 式}$跃员 这种说法对吗？

误解：这种说法正确，疫$\frac{葬}{遭}$跃员摇亦葬跃遭成立。

〔警示〕 $\frac{葬}{遭}$跃员不能推出 葬跃遭 只有当 遭跃园时根据不等式的性质才有 葬跃遭 而 遭约园时，情况则刚好相反。

名题精析

【例员】 摇已知 葬跃遭跃糟 求证$\frac{员}{葬原遭}$垣$\frac{员}{遭原糟}$垣$\frac{员}{糟原葬}$跃园

〔精析〕 比较法是证明不等式的常规方法，而在符号的判断上因式分解又是常用方法，故先将左式通分。

〔解 答〕 $\frac{员}{葬原遭}$ 垣 $\frac{员}{遭原糟}$ 垣 $\frac{员}{糟原葬}$ 越 $\frac{(遭原糟)(糟原葬)垣(葬原遭)(糟原葬)垣(葬原遭)(遭原糟)}{(葬原遭)(遭原糟)(糟原葬)}$ 越

$\frac{(葬原遭)^{圆}垣(遭原糟)^{圆}垣(糟原葬)^{圆}}{圆(葬原遭)(遭原糟)(葬原糟)}$ 跃园(疫葬跃遭跃糟)

故原不等式成立

【例圆】摇已知 葬，遭，糟 砸^{垣}，求证 $\frac{遭糟垣糟葬垣葬遭}{葬垣遭垣糟}$ ≥ 葬遭糟

〔精析〕若不等式中含有奇数项的和，可通过对不等式乘以 圆 变成偶数项的和，然后利用重要不等式证明。

〔解答〕疫遭^{圆}糟^{圆}垣糟^{圆}葬^{圆}≥圆葬遭糟^{圆}摇遭^{圆}糟^{圆}垣葬^{圆}遭^{圆}≥圆葬遭^{圆}糟摇葬^{圆}遭^{圆}垣糟^{圆}葬^{圆}≥圆葬^{圆}遭糟

亦遭^{圆}糟^{圆}垣糟^{圆}葬^{圆}垣葬^{圆}遭^{圆}≥葬遭糟(葬垣遭垣糟)

又 葬，遭，糟 砸^{垣}摇亦 $\frac{遭^{圆}糟^{圆}垣糟^{圆}葬^{圆}垣葬^{圆}遭^{圆}}{葬垣遭垣糟}$ ≥ 葬遭糟

【例猿】摇若 葬跃遭跃糟跃园，求证：葬^{圆葬}遭^{圆遭}糟^{圆糟}跃(葬遭糟)$^{\frac{葬垣遭垣糟}{猿}}$

〔精析〕证明不等式时，若不等式的两边同为正，左右两边为幂的形式，一般采用商比法证明。

〔解答〕疫 $\left(\frac{葬^{圆葬}遭^{圆遭}糟^{圆糟}}{(葬遭糟)^{葬垣遭垣糟}}\right)^{猿}$ 越 $\left(\frac{葬}{遭}\right)^{葬}$·$\left(\frac{遭}{葬}\right)^{遭}$·$\left(\frac{葬}{糟}\right)^{葬}$·$\left(\frac{糟}{葬}\right)^{糟}$·$\left(\frac{遭}{糟}\right)^{遭}$·$\left(\frac{糟}{遭}\right)^{糟}$ 越 $\left(\frac{葬}{遭}\right)^{葬原遭}$

$\left(\frac{葬}{糟}\right)^{葬原糟}$ $\left(\frac{遭}{糟}\right)^{遭原糟}$ 摇又 葬跃遭跃糟跃园摇亦 $\frac{葬}{遭}$跃员，$\frac{葬}{糟}$跃员，$\frac{遭}{糟}$跃员摇且 葬原遭跃园，葬原糟跃园，遭原糟跃园

亦 $\left(\frac{葬}{遭}\right)^{葬原遭}$跃员，$\left(\frac{葬}{糟}\right)^{葬原糟}$跃员，$\left(\frac{遭}{糟}\right)^{遭原糟}$跃员摇亦 $\frac{葬^{圆葬}遭^{圆遭}糟^{圆糟}}{(葬遭糟)^{\frac{葬垣遭垣糟}{猿}}}$跃员即 葬^{圆葬}遭^{圆遭}糟^{圆糟}跃(葬遭糟)$^{\frac{葬垣遭垣糟}{猿}}$

【例源】摇求证：原$\sqrt{猿}$≤$\sqrt{猿}$曾垣$\sqrt{员原曾^{圆}}$≤圆

〔精析〕见到$\sqrt{员原曾^{圆}}$应首先考虑 曾的范围即 原员≤曾≤员，进而联想到 糟燥泽（或 泽蚤灶），故采用换元法援

〔解答〕令 曾越糟燥泽，θ∈〔园，π〕

则$\sqrt{猿}$曾垣$\sqrt{员原曾^{圆}}$越$\sqrt{猿}$糟燥泽垣泽蚤灶越圆泽蚤灶(θ垣$\frac{\pi}{猿}$)

疫θ∈〔园，π〕摇摇亦θ垣$\frac{\pi}{猿}$∈〔$\frac{\pi}{猿}$，$\frac{源\pi}{猿}$〕

亦泽蚤灶(θ垣$\frac{\pi}{猿}$)∈〔原$\frac{\sqrt{猿}}{圆}$，员〕摇摇亦圆泽蚤灶(θ垣$\frac{\pi}{猿}$)∈〔原$\sqrt{猿}$，圆〕

亦 原$\sqrt{猿}$≤$\sqrt{猿}$曾垣$\sqrt{员原曾^{圆}}$≤圆

【例缘】摇已知：曾，赠 砸^{垣}，曾垣赠越员援

求证：(曾垣$\frac{员}{曾}$)^{圆}垣(赠垣$\frac{员}{赠}$)^{圆}≥$\frac{圆缘}{圆}$

〔精析〕若将不等式左边展开为 曾^{圆}垣$\frac{员}{曾^{圆}}$垣赠^{圆}垣$\frac{员}{赠^{圆}}$垣源用重要不等式得左边≥愿没有达到证明左式≥$\frac{圆缘}{圆}$的目的，且“左边≥愿”中等号不可能成立，故完成本题的关键是如何使用条件“曾垣赠越员”援

〔解答〕疫(曾垣$\frac{员}{曾}$)^{圆}垣(赠垣$\frac{员}{赠}$)^{圆}越曾^{圆}垣$\frac{员}{曾^{圆}}$垣赠^{圆}垣$\frac{员}{赠^{圆}}$垣源越(曾^{圆}垣赠^{圆})(员垣$\frac{员}{曾^{圆}赠^{圆}}$)垣源

又 曾^{圆}垣赠^{圆}≥$\frac{(曾垣赠)^{圆}}{圆}$越$\frac{员}{圆}$（等号当且仅当 曾越赠时取的）

由 员越(曾垣赠)^{圆}越曾^{圆}垣赠^{圆}垣圆曾赠≥源曾赠得摇摇曾赠≤$\frac{员}{源}$

亦$\frac{员}{曾}$≥源摇摇亦员垣$\frac{员}{曾赠}$≥员远（当且仅当 曾越赠时取的）

亦（曾 垣赠）（员垣$\frac{员}{曾赠}$）≥$\frac{员远}{圆}$摇摇亦（曾 垣赠）（员垣$\frac{员}{曾赠}$）垣源≥$\frac{圆源}{圆}$

即（曾垣$\frac{员}{曾}$）圆垣（赠垣$\frac{员}{赠}$）圆≥$\frac{圆源}{圆}$

【例 远】摇已知 葬，遭，糟∈砸垣，求证$\frac{员}{葬垣遭}$垣$\frac{员}{遭垣糟}$垣$\frac{员}{糟垣葬}$≥$\frac{怨}{圆（葬垣遭垣糟）}$

〔精析〕换元法是证明不等式的常规方法，换元的目的一是使得题目变得简洁，二是转化不熟悉的问题为熟悉的问题。换元法有整体换元，三角换元，均值换元等方法。

〔解答〕设 葬垣遭越曾，遭垣糟越赠，糟垣葬越扎，则 曾，赠，扎∈砸垣，且 圆（葬垣遭垣糟）越曾垣赠垣扎

亦问题转化为证明：

曾，赠，扎∈砸垣，$\frac{员}{曾}$垣$\frac{员}{赠}$垣$\frac{员}{扎}$≥$\frac{怨}{曾垣赠垣扎}$

即证（曾垣赠垣扎）（$\frac{员}{曾}$垣$\frac{员}{赠}$垣$\frac{员}{扎}$）≥怨

疫曾，赠，扎∈砸垣摇摇亦曾垣赠垣扎≥猿·$\sqrt[猿]{曾赠扎}$，摇摇$\frac{员}{曾}$垣$\frac{员}{赠}$垣$\frac{员}{在}$≥猿·$\sqrt[猿]{曾赠扎}$园

亦（曾垣赠垣扎）（$\frac{员}{曾}$垣$\frac{员}{赠}$垣$\frac{员}{扎}$）≥怨摇摇亦原不等式成立。

能力训练

一、选择题

员援设 曾跃赠跃园，则下列各式中正确的是（摇摇摇）

粤援曾跃$\frac{曾垣赠}{圆}$跃$\sqrt{曾赠}$跃赠摇摇摇摇摇月援曾≥$\frac{曾垣赠}{圆}$跃$\sqrt{曾赠}$跃赠

悦援曾跃$\frac{曾垣赠}{圆}$跃赠跃$\sqrt{曾赠}$摇摇摇摇摇阅援曾跃$\frac{曾垣赠}{圆}$≥$\sqrt{曾赠}$跃赠

圆援若 园约皂约灶，则下列不等式正确的是（摇摇摇）

粤援皂灶跃灶皂摇摇月援皂灶约灶皂摇摇悦援皂灶越灶皂摇摇阅援以上都不对

猿援下列不等式①曾圆垣猿跃圆曾（曾∈砸），②葬缘垣遭缘≥葬猿遭圆垣葬圆遭猿，③葬圆垣遭圆≥圆（葬原遭原员）其中正确的有（摇摇摇）

粤援员个摇摇月援圆个摇摇悦援猿个摇摇阅援园个

源援若 葬≠园，遭≠园，下列恒成立的不等式是（摇摇摇）

粤援$\frac{渣葬垣遭渣}{圆}$≥$\sqrt{渣葬遭渣}$摇摇摇摇摇月援$\frac{遭}{葬}$垣$\frac{葬}{遭}$≥圆

悦援（葬垣遭）（$\frac{员}{葬}$垣$\frac{员}{遭}$）≥源摇摇摇摇摇阅援$\frac{葬圆垣遭圆}{圆}$≥$\frac{（葬垣遭）圆}{圆}$

缘援若$\frac{曾圆}{源}$垣赠圆越员，则 曾圆垣赠圆的最值为（摇摇摇）

粤援无最大值，有最小值 原$\frac{员}{猿}$摇摇摇月援最大值 员远，最小值 原$\frac{员}{猿}$

悦援最小值 园，无最大值摇摇摇摇摇摇摇阅援最小值 园，最大值 员远

远援设 葬，遭，糟∈砸垣，则 葬圆垣遭圆垣糟圆原葬遭原遭糟原糟葬是（摇摇摇）

粤援正数摇摇月援负数摇摇悦援零摇摇阅援非负数

苑援设 葬员，葬圆，遭员，遭圆均是实数，则有（摇摇摇）

粤援（葬员遭员垣葬圆遭圆）圆跃（葬圆员垣葬圆圆）（遭圆员垣遭圆圆）

月援（葬员遭员垣葬圆遭圆）圆≥（葬圆员垣葬圆圆）（遭圆员垣遭圆圆）

悦援（葬员遭员垣葬圆遭圆）圆≤（葬圆员垣葬圆圆）（遭圆员垣遭圆圆）

阅援（葬员遭员垣葬圆遭圆）圆约（葬圆员垣葬圆圆）（遭圆员垣遭圆圆）

愿援已知 责，择∈砸且 责葬垣择葬越圆，则（摇摇摇）

粤援责垣择臆圆摇摇月援责垣择约圆摇摇悦援责垣择逸圆摇摇阅援以上都不对

怨援曾跃园，赠跃园时，粤越曾垣赠/员垣曾垣赠，月越曾/员垣曾垣赠/员垣赠，则 粤 月的大小关系为（摇摇摇）

粤援粤越月摇摇月援粤约月摇摇悦援粤≤月摇摇阅援粤跃月

员园援“（葬垣遭 跃园）” 的一个充分条件是（摇摇摇）

粤援葬跃园或 遭跃园摇摇月援葬跃园且 遭约园摇摇悦援葬跃园且 遭跃园摇摇阅援葬跃园或 遭约园

二、填空题：

员援已知 葬 遭为正数，那么 √葬垣√遭/√圆与√葬垣遭的大小关系是________援

圆援已知 曾越√缘垣√圆，赠越√猿垣√园，则 曾 赠的大小关系为________援

猿援已知 葬跃园且 葬≠员 那么 造燥早葬（葬猿垣员）与 造燥早葬（葬圆垣员）的大小关系为________援

源援已知 葬跃园，员/遭原员/葬跃员，则√员垣葬与员/√员原遭的大小关系是________援

缘援设 粤越员/圆员园垣员/圆员园垣员垣……垣员/圆员员原员，则 粤原员的符号为________（填“垣”或“原”或“不确定”）

远援建造一个容积为 愿米猿，深为 圆米的长方体无盖水池，如果池底和池壁的造价为每平方米分别为 员圆园元和 愿园元，那么水池的最低总造价为________元援

三、解答题

员援已知 葬，遭，皂，灶∈砸垣，求证 葬皂垣灶垣遭皂垣灶≥葬皂遭灶垣葬灶遭皂援

圆援若 葬，遭，糟为不全相等的正数，求证：圆（葬猿垣遭猿垣糟猿）跃葬圆（遭垣糟）垣遭圆（糟垣葬）垣糟圆（葬垣遭）

猿援已知：葬跃圆，求证：造燥早葬（葬原员）·造燥早葬（葬垣员）约员

源援已知：葬≠员，遭≠原员，葬遭越员，

求证：员原葬/员垣葬·员原遭/员垣遭≤园

缘援已知：葬，遭，糟∈砸垣且 葬垣遭垣糟越员，