



掌握奥赛解题方法 从容应对升学考试

NEW 新阳光
SunshineTM



《新阳光·金牌奥赛》编委会 编

高中数学 奥赛

解题方法与练习

强化素质教育 · 激发创新灵感
指导解题技巧 · 提升实践能力



北京出版集团
北京教育出版社



掌握奥赛解题方法 从容应对升学考试



本册主编：李海军

高中数学 奥赛

解题方法与练习

《新阳光·金牌奥赛》编委会 编

总主编：戴有刚 毕淑云 俞晓宏

编委：（以下名单按姓氏笔画排列）

于志斌	王红胡	王楚琦	尹志博	汪健文
孙冬梅	任延明	邵 斌	苏正翰	苏宇斌
苏灿云	李永哲	李笑毅	李海琴	陈京锐
陈天祥	辛德纯	蒋 颖	周 萌	金成智
金英兰	郑培强	施 恩	胡均宇	郭震恩
梁永久	黄凤光	崔晓波	舒 勇	

北京出版社出版集团
北京教育出版社

本书编辑特色

版块设计新颖, 知识讲解

思路清晰, 具有系统

性。灵活的新颖题

型帮你找到解题

的金钥匙。

第八章

多项式

多项式理论是代数学中一个重要内容。初中阶段学习的一元二次多项式是最简单、最基本的多项式。本讲对多项式理论从两个方面作进一步地探讨。一方面从多项式的系数, 引入次数大于等于3的高次多项式; 另一方面从多项式的系数, 引入整系数多项式、有理系数多项式、实系数多项式以及复系数多项式, 相应地, 将关于一元二次多项式的因式定理、根与系数关系的韦达定理作了推广。因此在本讲学习中可参照一元一次方程的解法。此外, 本讲内容又与整数理论中相应内容有所类似, 因此处理整数问题的许多手段, 也是解决多项式问题的常用方法。

知识讲解

1. 基本概念

关于 x 的形如 $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ ($a_n \neq 0$) 的表达式称为关于 x 的一元 n 次多项式, 这里 $a_0, a_1, \cdots, a_n$ 为常数 (称为系数); 非负整数 n 称为 $f(x)$ 的次数, 记为 $\deg f(x)$; 当 $n=0$ 且 $a_0 \neq 0$ 时, $f(x)$ 称为零次多项式; 0 称为零多项式, a_n 称为首项系数, a_0 称为常数项; 当 $a_n, a_{n-1}, \cdots, a_1, a_0$ 分别是整数、有理数、实数、复数时, 多项式 $f(x)$ 依次称为整系数、有理系数、实系数、复系数多项式。

两个多项式相等 (或恒等), 是指它们的次数相同, 且同次项的系数都对应相等。

两个多项式相加减是将它们的同次项相加减; 两个多项式乘积是由去括号展开且合并同次项而得。

若多项式 $f(x)$ 不能表示为两个次数比 $f(x)$ 低的实系数多项式的乘积, 则称 $f(x)$ 为实数集上不可约多项式。

2. 带余除法

(1) 带余除法定理: 对于任意给定的多项式 $f(x)$ 及 $g(x) \neq 0$, 存在唯一的多项式 $q(x)$ 及 $r(x)$, 使得 $f(x) = g(x) \cdot q(x) + r(x)$ (这里 $r(x)$ 是零次多项式, 或者 $r(x)$ 的次数 $\deg r(x) < \deg g(x)$)。

赛题精讲

例1 设 A_n 是所有多项式 $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ 的集合, 其中 $0 \leq a_0 = a_n \leq a_1 = a_{n-1} \leq \cdots \leq a_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} = a_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1} \leq \cdots \leq a_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$ 。求证: 如果 $P(x) \in A_n, Q(x) \in A_n$, 那么 $P(x)Q(x) \in A_{2n}$ 。

证明

记 $R_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}(x) = x^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} + x^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 1} + \cdots + x^0 \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ 。

容易发现 $P(x) \in A_n$ 的充分必要条件是存在 $b_0, b_1, \cdots, b_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \in [0, +\infty)$, 使得 $P(x) = b_0 R_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}(x) + b_1 R_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}(x) + \cdots + b_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} R_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}(x)$ 。

1 知识讲解

根据学习实际, 对章节的内容知识进行详细的讲解, 帮助大家更好地掌握数学基础知识。

2 赛题精讲

对近年来的竞赛题目进行精彩、详细的讲解, 能让学生在学习的同时提高解题技能。

3

分析

抓住知识的关键点, 注意规律的提示、方法的总结和技巧的培养, 提升分析、解决问题的能力。

证

连接 BP 、 PF 、 EQ 、 QC , 连 PQ 交 BF 于点 K , 连 FQ 交 BE 于 L , 连 BQ 交 FC 于 M .
 $\therefore \triangle BPK$ 和 $\triangle KPF$ 共边.

$$\therefore \frac{BK}{KF} = \frac{S_{\triangle BPK}}{S_{\triangle KPF}}$$

$$= \frac{\frac{1}{2} \cdot PB \cdot PK \cdot \sin \angle BPK}{\frac{1}{2} \cdot PF \cdot PK \cdot \sin \angle FPK}$$

$$= \frac{PB \cdot \sin \angle BPK}{PF \cdot \sin \angle FPK}$$

$$\text{同理 } \frac{FL}{LQ} = \frac{EF \cdot \sin \angle FEB \cdot QM}{EQ \cdot \sin \angle BEQ \cdot MB} = \frac{QC \cdot \sin \angle QCF}{CB \cdot \sin \angle FCB}$$

$$\therefore \angle PAF = \angle PAB, \angle APF = \angle ABP,$$

$$\therefore \triangle APF \sim \triangle ABP,$$

$$\therefore \frac{BP}{PF} = \frac{AP}{AB}, \text{同理, } \frac{EF}{BC} = \frac{AF}{AC} = \frac{QC}{AQ}$$

$$\text{又 } \angle BPK = \angle BEQ, \angle FEB = \angle FCB, \angle QCF = \angle FPK, \text{且 } AP = AQ,$$

$$\therefore \frac{BK}{KF} \cdot \frac{FL}{LQ} \cdot \frac{QM}{MB} = 1,$$

由塞瓦定理的逆定理知, PQ 、 BE 、 CF 相交于一点 H , 即 P 、 Q 、 H 三点共线.

分析

塞瓦定理的逆定理是证明三线共点的根据, 但有时我们可以把三线共点的问题化为三线共点的问题来处理, 证法一就是一个典型的例子.

4

证法

具体指导试题的求证方法, 使学生在实践时做到举一反三、触类旁通。



知识训练

- 如图 1-21, 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle BAC = \frac{5\pi}{8}$, $\angle ABC = \frac{\pi}{8}$, 求它的内角平分线 CF 、中线 BE 和高 AD 三线共点. (1984·希腊数学奥林匹克题)
- 三角形 ABC 为锐角三角形, AD 为该三角形的一条高, 设 P 为线段 AD 上一点, 直线 BP 、 CP 分别交 AC 、 AB 于点 E 、 F , 证明: DA 平分 $\angle EDF$. (第 14 届爱尔兰数学奥林匹克竞赛题)
- 在正 $\triangle ABC$ 的边 BC 、 CA 、 AB 上有内分点 D 、 E 、 F 将边分成 $3:(n-3)$ ($n > 6$), 线段 AD 、 BE 、 CF 相交所成的三角形面积是正三角形面积的 $\frac{4}{49}$ 时, 求 n 的值. (1992·日本数学奥林匹克预选赛 6)
- 在 $\triangle ABC$ 中, $AB=12$, $AC=16$, M 是 BC 中点, E 、 F 分别在 AB 、 AC 上, EF 交 AM 于 G , $AE=2AF$, 求比值 $\frac{EG}{GF}$. (1990·第 29 届 IMO 预选赛)
- 在 $\triangle ABC$ 中, AN 是 A 到 $\angle ABC$ 的平分线所作的垂线, N 为垂足; AM 、 CL 分别是 A 、 C 到 $\angle C$ 、 $\angle B$ 的平分线所作的垂线, M 、 L 为垂足, MN 的延长线交 AC 于 F , BF 的延长线交 CL 于 E , BL 交 AC 于 D , 求证: $DE \parallel MN$. (1996·江苏省竞赛题 3)
- 设 M 、 N 是 $\triangle ABC$ 内部的两点, 且满足 $\angle MAB = \angle NAC$, $\angle MBA = \angle NBC$. 证明: $\frac{AM}{AB} \cdot \frac{AN}{AC} + \frac{BM}{BA} \cdot \frac{BN}{BC} + \frac{CM}{CA} \cdot \frac{CN}{CB} = 1$. (1998·IMO 预选赛)
- $\triangle ABC$ 的内切圆分别切三边 BC 、 CA 、 AB 于点 D 、 E 、 F , 点 X 是 $\triangle ABC$ 的一个内点, $\triangle XBC$ 的内切圆也在 D 点与 BC 边相切, 并与 CX 、 XB 分别相切于点 Y 、 Z , 证明: 四边形 $EFZY$ 是圆内接四边形. (第 36 届 IMO 预选赛)

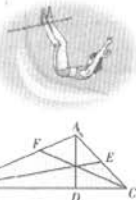


图 1-21

5

精美插图

针对具体的内容配以精美的插图, 让大家在学习的同时更有良好的视觉享受。

6

知识训练

通过练习大量的竞赛试题、模拟试题, 对各个知识点进行系统的专业化训练, 这样不但能巩固原有的基础知识, 也能达到提升解题能力的目的。



前言

用最简单的方法解最难的题——这就是奥赛解题方法吸引学生眼球的最根本的原因。

多年来,许多教师、家长和学生都在苦苦追寻着:哪种方法更能开阔视野、启迪思维、开发智力、提升能力?怎样才能在不断创新的竞赛中运筹帷幄?怎样才能把知识转化为能力?

这些想法其实存在着一定的误区,中医讲究把脉,奥赛也一样,只要你把住了它的脉,问题就会变得极其简单。

《新阳光金牌奥赛——高中数学奥赛解题方法与练习》一书就是在奥校教练员、部分省市教研员依据最新教学教材、教学大纲、考试说明和奥赛说明,结合奥赛智力训练的实际情况,经过大量细致的调研、认真分析,针对高中生应具备的学科基础知识和基本技能的前提下,顺应着由浅入深的脉动编写而成的。

本书具有以下特色:

一、在快乐中学习,适用于所有想学奥赛数学的同学

本书涵盖了高中数学的全部基础知识、基本方法、基本技能和学科思想,并对课本内容做了必要概述、合理变通和适当拓展。本书由浅入深的解析、重点突出的评述、竞赛训练题的罗列,会使同学们在瞬间感受到游刃于课本与课外之间的快乐。

二、本书所选训练题具有典型性、通透性

最简单的方法往往适用于最难的题。因此本书通过典型习题,富有





启发性的解答,对于较难的习题进行详尽透彻的分析,使学生能顺着分析的脉搏,开动脑筋,悟出自己的解题方法来。

三、缩短知识与实践的距离

怎样把知识转化为能力?本书对此进行了详尽的诠释。它既考虑到内容编排的科学性,又注意到它的可读性,层次清晰,拓展了同学们对各种题型的解题思路,提高了把握关键问题的能力。最重要的是同学们会在本书中发现解题的规律技巧和解题的关键,对消化、掌握知识有巨大的帮助。

四、高才生轻巧攻关的摇篮

本书整合了目前社会上众多奥赛训练方法的精髓,深入浅出地演示了精彩的解题方法,加上本书画龙点睛的归纳总结,为高才生提供了超前的、全面的解题方法,也为同学们参加奥赛或各种升学考试起到相当大的指导作用,是同学们学习奥赛数学的最新、最快捷的方式。

由于时间仓促,书中难免谬误之处,敬请批评指正。





目 录

代 数

- 第一章 集合、映射 2
- 第二章 函数 14
- 第三章 三角函数 34
- 第四章 不等式 52
- 第五章 复数 88
- 第六章 数列与数学归纳法 103
- 第七章 排列组合与二项式定理 127
- 第八章 多项式 141

几 何

- 第一章 几个重要的定理 150
- 第二章 三角形的心 166
- 第三章 直线形 199



➤ 第四章 共圆、共线、共点	212
➤ 第五章 圆	239
➤ 第六章 几何不等式	259
➤ 第七章 几何变换的性质及应用	270
➤ 第八章 立体几何	293
➤ 第九章 解析几何	314

代

数

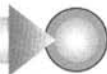


第一章

集合、映射



知识讲解



1. 集合、映射

(1) 集合: 集合与集合间的子集、真子集、等集的关系; 集合间的交、并、补运算.

(2) 映射与函数: 函数是非空数集 A 到非空数集 B 的映射, 函数的定义域与值域是其图象覆盖的 x 轴与 y 轴的范围.

2. 有限集元素的数目

(1) 有限集的阶: 有限集 A 的元素数目叫做这个集合的阶, 记作 $|A|$ [或 $n(A)$].

(2) 集族的阶: 若 M 为由一些给定的集合构成的集合, 则称集合 M 为集族.

设 A 为有限集, 由 A 的若干个子集构成的集合称为集合 A 的一个子集族, 求满足一定条件的集族的阶是一类常见的问题.

显然, 若 $|A| = n$, 则由 A 的所有子集构成的子集族的阶为 2^n .

3. 映射, 映射法

▶ 定义 1 设 X 和 Y 是两个集合 (二者可以相同). 如果按照某种对应关系 f , 对于每个 $x \in X$, 都有唯一确定 $y \in Y$ 与之对应, 则称这个对应关系为 X 到 Y 的映射, 记为 $f: X \rightarrow Y$ 或 $y = f(x); x \in X \rightarrow y \in Y$. 这时, $y = f(x) \in Y$ 称为 $x \in X$ 的象, 而 x 称为 y 的原象. 特别当 X 和 Y 都是数集时, 映射 f 称为函数.

▶ 定义 2 设 f 为从 X 到 Y 的一个映射.

(1) 如果对于任何 $x_1, x_2 \in X, x_1 \neq x_2$, 都有 $f(x_1) \neq f(x_2)$, 则称 f 为单射;

(2) 如果对于任何 $y \in Y$, 都有 $x \in X$, 使得 $f(x) = y$, 则称 f 为满射;

(3) 如果映射 f 既为单射又为满射, 则称 f 为双射;

(4) 如果 f 为满射且对任何 $y \in Y$, 恰有 X 中的 m 个元素 $x_1, x_2, \dots, x_m$, 使得 $f(x_i) = y, i = 1, 2, \dots, m$, 则称 f 为 (倍数为 m 的) 倍数映射.

▶ 定理 1 设 X 和 Y 都是有限集, f 为从 X 到 Y 的一个映射,

(1) 如果 f 为单射, 则 $|X| \leq |Y|$;

(2) 如果 f 为满射, 则 $|X| \geq |Y|$;

(3) 如果 f 为双射, 则 $|X| = |Y|$;

(4) 如果 f 为倍数为 m 的倍数映射, 则 $|X| = m|Y|$.

▶ 定理 2 设有限集 $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$, f 是 A 到 A 上的映射, 记 $f_1(x) = f(x), f_{r+1}(x) = f[f_r(x)] (x \in A, r \in \mathbb{N}^*)$, 则 f 是一一映射 (即双射) 的充要条件是: 对任意 $a_i \in A$, 存在 $m_i \in \mathbb{N}^*, 1 \leq m_i \leq n$, 使得 $f_{m_i}(a_i) = a_i$, 而 $f_s(a_i) \neq a_i (s \in \mathbb{N}^*, 1 \leq s \leq m_i - 1)$.



赛题精讲



例 1

已知集合 $A = \{(x, y) | |x| + |y| = a, a > 0\}, B = \{(x, y) | |xy| + 1 = |x| + |y|\}$. 若 $A \cap B$ 是平面上正

八边形的顶点所构成的集合,则 a 的值为



解 点集 A 由顶点为 $(a, 0), (0, a), (-a, 0), (0, -a)$ 的正方形的四条边构成(如图 1-1).

将 $|xy| + 1 = |x| + |y|$, 变形为 $(|x| - 1)(|y| - 1) = 0$, 所以, 集合 B 由四条直线 $x = \pm 1, y = \pm 1$ 构成.

欲使 $A \cap B$ 为正八边形的顶点所构成, 只有 $a > 2$ 或 $1 < a < 2$ 这两种情况.

(1) 当 $a > 2$ 时, 由于正八边形的边长只能为 2, 显然有 $\sqrt{2}a - 2\sqrt{2} = 2$,

故 $a = 2 + \sqrt{2}$.

(2) 当 $1 < a < 2$ 时, 设正八边形边长为 l , 则

$$l \cos 45^\circ = \frac{2-l}{2}, l = 2\sqrt{2} - 2,$$

这时, $a = 1 + \frac{l}{2} = \sqrt{2}$.

综上所述, a 的值为 $2 + \sqrt{2}$ 或 $\sqrt{2}$ 时.

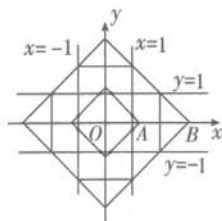


图 1-1

例 2

设有集合 $A = \{x | x^2 - [x] = 2\}$ 和 $B = \{x | |x| < 2\}$, 求 $A \cap B$ 和 $A \cup B$ (其中 $[x]$ 表示不超过实数 x 之值的最大整数).

分析

应首先确定集合 A 与 B .

从而 $B = \{x | -2 < x < 2\}$. 显然, $2 \in A$.

$\therefore A \cup B = \{x | -2 < x \leq 2\}$.

若 $x \in A \cap B$, 则 $x^2 = [x] + 2, [x] \in \{1, 0, -1, -2\}$,

从而得出 $x = \sqrt{3} ([x] = 1)$ 或 $x = -1 ([x] = -1)$.

于是 $A \cap B = \{-1, \sqrt{3}\}$.

评述

若将 B 集合改为 $B = \{x | |x| < 4\}$, 则 A 成立是 B 成立的_____条件.

例 3

证明: 正整数集 $\mathbf{N}^*$ 不能分成三个没有公共元素的非空子集, 使得从两个不同子集中各任取一个正整数 x, y , 而 $x^2 - xy + y^2$ 属于第三个子集. (1999 · IMO 预选題)

分析

以否定形式给出的命题适合用反证法证明.

点拨

反证法是证明否定形式给出的命题的一般方法. 题中引理体现对集合的理解.

证明

设 $f(x, y) = x^2 - xy + y^2$, 假设 $\mathbf{N}^*$ 能分成满足条件的三个子集, 则 $\mathbf{N}^* = A \cup B \cup C$, 不妨设 $1 \in A, b \in B, c \in C$, 其中 $b < c$, 且 $1, b, c$ 分别是这三个子集中最小的数, 从而有 $1, 2, \dots, b-1 \in A$.

引理 1 x, y 和 $x+y$ 不可能属于三个不同的子集, 若 $x \in A, y \in B, x+y \in C$, 则由假设知, $Z = f(x+y, x) \in B$, 又因为 $f(x+y, x) = f(x+y, y) \in A$, 即 Z 既属于 A 又属于 B , 此与 A, B, C 三个集合互不相交矛盾, 故 x, y 和 $x+y$ 不可能属于三个不同的子集.

引理 2 子集 C 包含一个 b 的倍数, 如果子集 C 所包含的 b 的倍数中最小的一个为 kb , 则 $(k-1)b \in B$. 设 r 是 c 除以 b 的余数, 如是 $r=0$, 则 $c=nb \in C$. 如是 $r>0$, 因为 c 是 C 中最小的数, 所以 $c-r \notin C$. 又因为 $r \leq b-1$, 所以 $b \in A$. 由于 $r+(c-r)=c$, 由引理 1 知 $c-r \notin B$, 于是 $c-r \in A$. 由 $b \in B$, 得 $f(c-r, b) = (c-r)^2 - (c-r)b + b^2 = n^2b^2 - nb^2 + b^2 = mb \in C$. 故子集 C 包含一个 b 的倍数. 若 $kb \in C$. 其中 k 是满足 $nb \in C$ 的 n 的最小值,

且 $b + (k-1)b = kb$. 由引理 1, 知 $(k-1)b \notin A$. 又因为 $(k-1)b \in C$, 所以 $(k-1)b \notin B$. 故引理 2 得证.

引理 3 对于任意正整数 n , $(nk-1)b+1 \in A$, $nkb+1 \in A$, (数学归纳法) 当 $n=1$ 时, 因为 $1 \in A$, $(k-1)b \in B$. 由引理 1 知 $(k-1)b+1 \notin C$. 又因为 $b-1 \in A$, $kb \in C$. 再由引理 1, 得 $(k-1)b+1 \notin B$, 故 $(k-1)b+1 \in A$. 同理, 因为 $(k-1)b+1 \in A$, $b \in B$, $kb+1 \notin C$. 又因为 $1 \in A$, $kb \in C$, $kb+1 \notin B$. 所以 $kb+1 \in A$. 假设 $[(n-1)k-1]b+1 \in A$, $(n-1)kb+1 \in A$. 由于 $(n-1)kb+1 \in A$, $(k-1)b \in B$, $(nk-1)b+1 \in C$, 又因为 $[(n-1)k-1]b+1 \in A$, $kb \in C$. 所以 $(nk-1)b+1 \notin B$, 从而 $(nk-1)b+1 \in A$. 同理, 由于 $(nk-1)b+1 \in A$, $b \in B$, $nkb+1 \notin C$. 又因为 $(n-1)kb+1 \in A$, $kb \in C$, $nkb+1 \notin B$, 故 $nkb+1 \in A$. 综上, 引理 3 成立.

由上述引理, 知 $kb+1 \in A$, $kb \in C$. 所以 $f(kb+1, kb) = (kb+1)^2 - (kb+1)kb + (kb)^2 = (kb+1)kb+1$ 由引理 3 知 $f(kb+1, kb) \in A$, 而由假设, 知 $f(kb+1, kb)$ 应属于 B , 矛盾.

故假设不成立, 原命题为真.

例 4 将与 105 互质的所有正整数从小到大排成数列, 求这个数列的第 1 000 项.

解

设 $U = \{1, 2, \dots, 105\}$, $A_3 = \{a | a \in U, \text{且 } 3 | a\}$, $A_5 = \{a | a \in U, \text{且 } 5 | a\}$, $A_7 = \{a | a \in U, \text{且 } 7 | a\}$, 则

$$\text{card}(A_3) = \frac{105}{3} = 35, \text{card}(A_5) = \frac{105}{5} = 21, \text{card}(A_7) = \frac{105}{7} = 15,$$

$$\text{card}(A_3 \cap A_5) = \frac{105}{3 \times 5} = 7, \text{card}(A_5 \cap A_7) = \frac{105}{5 \times 7} = 3, \text{card}(A_7 \cap A_3) = \frac{105}{3 \times 7} = 5,$$

$$\text{card}(A_3 \cap A_5 \cap A_7) = \frac{105}{3 \times 5 \times 7} = 1,$$

$$\therefore \text{card}(U) = 105.$$

在 1 到 105 中, 与 105 互质的数有

$$\text{card}(\complement_U A_3 \cap \complement_U A_5 \cap \complement_U A_7) = \text{card}(U) - \text{card}(A_3 \cup A_5 \cup A_7) = \text{card}(U) - [\text{card}(A_3) + \text{card}(A_5) + \text{card}(A_7)] + [\text{card}(A_3 \cap A_5) + \text{card}(A_3 \cap A_7) + \text{card}(A_5 \cap A_7)] - \text{card}(A_3 \cap A_5 \cap A_7) = 105 - (35 + 21 + 15) + (7 + 3 + 5) - 1 = 48.$$

设与 105 互质的正整数按从小到大的顺序排列为 $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$, 则 $a_1 = 1, a_2 = 2, a_3 = 4, \dots, a_{48} = 104, a_{49} = 105 + 1, a_{50} = 105 + 2, a_{51} = 105 + 4, \dots, a_{96} = 105 + 104, \dots$

因为 $1\,000 = 48 \times 20 + 40$, 所以 $a_{1\,000} = 105 \times 20 + a_{40}$.

由于 $a_{48} = 104, a_{47} = 103, a_{46} = 101, a_{45} = 97, a_{44} = 94, a_{43} = 92, a_{42} = 89, a_{41} = 88, a_{40} = 86$,

所以 $a_{1\,000} = 105 \times 20 + 86 = 2\,186$.

例 5 设 $I = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$, $(\complement_I A) \cap B = \{3, 7\}$, $A \cap (\complement_I B) = \{2, 8\}$, $(\complement_I A) \cup (\complement_I B) = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$, 求 $A, B, (\complement_I A) \cap (\complement_I B)$.

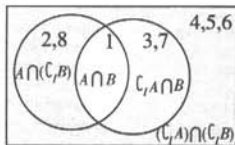


图 1-2

点拨

此题要用到容斥原理. 利用容斥原理解决问题时要注意如何设计题中基本的集合, 如本题中的 $A_3 - A_7$.

分析

对集合数目比较少时常利用维恩图解决问题.

解

用维恩图表示集合 I, A, B 的关系, 表示集合 A, B 的两个相交圆将表示全集 I 的矩形分成互不相交的四个部分, 它们分别表示 $A \cap (\complement_I B)$, $A \cap B$, $(\complement_I A) \cap B$, $(\complement_I A) \cap (\complement_I B)$, 如图 1-2.

依题意, 知 $A \cap B = \{1\}$. 又 $A \cap (\complement_I B) = \{2, 8\}$, $(\complement_I A) \cap B = \{3, 7\}$, 由维恩图知, $A = \{1, 2, 8\}$, $B = \{1, 3, 7\}$, $(\complement_I A) \cap (\complement_I B) = \complement_I(A \cup B) = \{4, 5, 6\}$.

点拨

借助于集合的维恩图表示是解决集合问题的常用方法. 在集合运算中, 直接运用集合运算律 $\complement_I(A \cup B) = (\complement_I A) \cap (\complement_I B)$, $\complement_I(A \cap B) = (\complement_I A) \cup (\complement_I B)$ 可以使解题简便.

例 6 集合 $M = \{u | u = 12m + 8n + 4l, m, n, l \in \mathbb{Z}\}$, 与 $P = \{v | v = 20p + 16q + 12r, p, q, r \in \mathbb{Z}\}$ 的关系为

解

对任意 $v_0 \in P$, 有 $v_0 = 20p + 16q + 12r = 12r + 8(2q) + 4(5p) \in M$, 故 $P \subseteq M$.

同理, 对任意 $v_0 \in M$, 有 $v_0 = 12m + 8n + 4l = 20n + 16l + 12(m - n - l) \in P$, 所以 $M \subseteq P$.

因此, $M = P$.

例 7 设 $S = \{1, 2, \dots, n\}$, A 为至少含有两项的公差为正的等差数列, 其项都在 S 中且当将 S 的其他元素置于 A 之中后, 均不能构成与 A 有相同公差 of 的等差数列. 求这种 A 的个数 (只有两项的数列也视为等差数列).

解

当 $n = 2k$ 为偶数时, 满足题中要求的每个数列 A 中必有连续两项, 在 $\{1, 2, \dots, k\}$ 和 $\{k+1, k+2, \dots, 2k\}$ 中各任取一数, 并以二数之差作为公差可以作出一个满足要求的数列 A . 容易看出, 这个对应是双射. 故知 A 的个数为 $k^2 = \frac{n^2}{4}$.

当 $n = 2k+1$ 为奇数时, 情况完全类似. 唯一的不同在于这时第二个集合 $\{k+1, k+2, \dots, n\}$ 有 $k+1$ 个元素. 故 A 的个数为 $k(k+1) = \frac{(n^2-1)}{4}$.

点拨

映射法解决计数问题, 关键是如何构造一一映射.

例 8 设 a_n 为下述自然数 N 的个数: N 的各位数字之和为 n 且每位数字都只能取 1, 3 或 4. 求证: 对每个自然数 N , a_{2n} 都是完全平方数. (1991 · 全国高中联赛试题)

证明

记各位数字之和为 n 且每位数字都是 1 或 2 的所有自然数的集合为 S_n , 并记 $|S_n| = f_n$, 则 $f_1 = 1$, $f_2 = 2$, 且当 $n \geq 3$ 时有 $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$, 这意味着 $\{f_n\}$ 恰为斐波那契数列.

作对应 $S_n \ni N \rightarrow N' \in N'$ 如下: 先将 N 的数字中自左至右的第一个 2 与它后邻的数字相加, 其和作为一位数字; 然后再把余下数字中第一个 2 与它后邻的数字相加, 所得的和作为下一位数字; 依此类推, 直到无数再相加为止. 所得的新自然数 N' 除最后一位数可能为 2 之外, 其余各位数字均为 1, 3 或 4. 若记所有 N' 的集合为 T_n , 则容易看出, 上述对应是由 S_n 到 T_n 的双射. 从而有 $|T_n| = |S_n| = f_n$, 且显然有

$$f_n = a_n + a_{n-2}, n = 3, 4, \dots \quad ①$$

对于任一数字和为 $2n$, 各位数字均为 1 或 2 的自然数 N , 必存在正整数 k , 使得下列两条之一成立:

(1) N 的前 k 位数字之和为 n ;

(2) N 的前 k 位数字之和为 $n-1$, 第 $k+1$ 位数字为 2.

则立即可得

$$f_{2n} = f_n^2 + f_{n-1}^2, n = 2, 3, \dots \quad ②$$

由①和②得到

$$a_{2n} + a_{2n-2} = f_{2n} = f_n^2 + f_{n-1}^2,$$

$$a_{2n} - f_n^2 = -(a_{2n-2} - f_{n-1}^2). \quad ③$$

因为 $a_2 = 1, a_3 = 1, a_4 = 4, f_2 = 2$, 所以 $a_4 - f_2^2 = 0$. 于是由③递推即得

$$a_{2n} = f_n^2, n = 1, 2, 3, \dots$$

即 a_{2n} 为完全平方数.

例 9

对 $|1, 2, 3, \dots, n|$ 的所有非空子集, 定义一个唯一正确的“交替和”如下: 按照递减的次序重新排列该子集, 然后从最大的数开始交替地减或加后继的数 (例如 $|1, 2, 4, 6, 9|$ 的交替和是 $9 - 6 + 4 - 2 + 1 = 6$, $|5|$ 的交替和就是 5). 对 $n = 7$, 求所有这种“交替和”的总和.

解

记 $N = \{1, 2, 3, \dots, n\}, M = \{1, 2, \dots, n-1\}$,

$$N' = \{ \{n, a_1, a_2, \dots, a_k\} \mid a_1, a_2, \dots, a_k \in M \},$$

$$M' = \{ \{a_1, a_2, \dots, a_k\} \mid a_1, a_2, \dots, a_k \in M \},$$

再证 N' 中元素 $\{n, a_1, a_2, \dots, a_k\}$ 与 M' 中元素 $\{a_1, a_2, \dots, a_k\}$ 对应, 显见这是 N' 到 M' 的一一对应.

因为 $|N'|$ 与 $|M'|$ 均为 2^{n-1} , 且两数组 $\{a_1, a_2, \dots, a_k\}$ 与 $\{n, a_1, a_2, \dots, a_k\}$ 的“交替和”恰为 n , 因此所有“交替和”的总和为 $n \cdot 2^{n-1}$.

特别地, 当 $n = 7$ 时, 得“交替和”为 448.

应用映射还可以证明某些与计数相关的不等式和等式. 这时可以通过分别计数来证明等或不等, 也可以不计数而直接通过适当的映射来解决问题.

例 10

将正整数 n 写成若干个 1 和若干个 2 之和, 和项顺序不同认为是不同的写法, 所有写法种数记为 $\alpha(n)$. 将 n 写成若干个大于 1 的正整数之和, 和项顺序不同认为是不同的写法, 所有写法的种数记为 $\beta(n)$. 求证对每个 n , 都有 $\alpha(n) = \beta(n+2)$.

证法一

将每项都是 1 或 2, 各项之和为 n 的所有数列的集合记为 A_n , 每项都是大于 1 的正整数, 各项之和为 n 的所有数列的集合记为 B_n , 则问题就是证明 $|A_n| = |B_{n+2}|$, 显然, 只需在两集合之间建立一个双射就行了.

设 $(a_1, a_2, \dots, a_m) = a \in A_n$, 其中 $a_{i_1} = a_{i_2} = \dots = a_{i_k} = 2, 1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq m$, 其余的 a_i 均为 1 且 $a_1 + a_2 + \dots + a_m = n$.

令

$$b_1 = a_1 + a_2 + \dots + a_{i_1},$$

$$b_2 = a_{i_1+1} + a_{i_1+2} + \dots + a_{i_2},$$

.....

$$b_k = a_{i_{k-1}+1} + a_{i_{k-1}+2} + \dots + a_{i_k},$$

$$b_{k+1} = a_{i_k+1} + a_{i_k+2} + \dots + a_{m+2},$$

$$b = (b_1, b_2, \dots, b_k, b_{k+1}),$$

则 $b \in B_{n+2}$.

定义

$$A_n \ni a \xrightarrow{f} b \in B_{n+2},$$

①

②

则 f 为双射. 事实上, 若 $a, a' \in A_n$, 且 $a \neq a'$, 则或者数列 a 和 a' 中 2 的个数不同, 或者 2 的个数相同但位置不全相同. 无论哪种情形, 由①和②知 $b = f(a)$ 与 $b' = f(a')$ 不同, 即 f 为单射. 另一方面, 对任何 $b \in B_{n+2}$, 利用①式又可确定 $a \in A_n$, 使得 $f(a) = b$, 即 f 为满射, 从而 f 为由 A_n 到 B_{n+2} 的双射. 即原命题得证.

证法二

使用证法一中的记号 A_n 和 B_n . 对于任意的 $(a_1, a_2, \dots, a_{m-1}, a_m) = a \in A_{n+2}$, 令 $a' = (a_1, a_2, \dots, a_{m-1})$. 显然, 当 $a_m = 1$ 时, $a' \in A_{n+1}$; 当 $a_m = 2$ 时, $a' \in A_n$, 容易看出, 映射

$$A_{n+2} \ni a \xrightarrow{f} a' \in A_{n+1} \cup A_n$$

是双射, 故有 $a(n+2) = a(n+1) + a(n)$. 注意到 $\alpha(1) = 1, \alpha(2) = 2$, 便知 $\alpha(n) = f_n$, 这里 $\{f_n\}$ 为非波那契数列.

对于任意的 $(b_1, b_2, \dots, b_{k-1}, b_k) = b \in B_{n+2}$, 令

$$b' = \begin{cases} (b_1, b_2, \dots, b_{k-1}), & \text{当 } b_k = 2, \\ (b_1, b_2, \dots, b_{k-1}, b_k), & \text{当 } b_k > 2, \end{cases}$$

则当 $b_k = 2$ 时, $b' = 2$ 时, $b' \in B_n$; 当 $b_k > 2$ 时, $b' \in B_{n+1}$. 容易验证, 映射

$$B_{n+2} \ni b \xrightarrow{f} b' \in B_{n+1} \cup B_n \text{ 为双射,}$$

故有 $\beta(n+2) = \beta(n+1) + \beta(n)$. 又因 $\beta(3) = 1, \beta(4) = 2$, 所以 $\beta(n+2) = f_n = \alpha(n)$.

例 11

某城市有 10 条公共汽车线路, 现知沿其中 9 条线路可走遍所有车站, 但沿其中任何 8 条线路不能走遍所有车站, 问至少有多少个不同的车站? (1950 · 莫斯科数学竞赛题)

分析

此例是如下问题的特殊情形.

设 $A = A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_k, S = \{A_1, A_2, \dots, A_k\}$. 若 ① S 中每 r 个元素交集不空; ② 每 $(r+1)$ 个元素的交集为空集, 问 (1) $|A|$ 至少是多少? (2) 当 $|A|$ 最小时, $|A_i|$ 为多少?

对于 (1), 这可考虑是标集 $\{1, 2, \dots, k\}$ 的任一 r 元子集 $\{i_1, i_2, \dots, i_r\}$, 在 $A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \dots \cap A_{i_r}$ 中任取一个元素 a . 作映射 $f: (i_1, i_2, \dots, i_r) \rightarrow a$, 则 f 是标集的 r 元子集的集合到 A 的一个单射. 事实上, 若 $\{j_1, j_2, \dots, j_r\}$ 也对应于 a , 则会形成 $(r+1)$ 个集的交集不空, 矛盾. 故 $|A|$ 不少于标集的 r 元子集的个数, 即 $|A| \geq C_k^r$.

对于 (2), 考虑任一 A_i , 在 S 中任取其余 r 个集, 它们的交集至少有一个元 (不空), 而此交集与 A_i 取交为空集. 由于有 C_{k-1}^r 种不同取法, 故 $|A_i| \leq |A| - C_{k-1}^r$. 当 $|A| = C_k^r$ 时, $|A_i| \leq C_{k-1}^{r-1}$.

另一方面, A_i 与 S 中任选 $(r-1)$ 个其余的集取交集, 至少有一个元, 从而 $|A_i| \geq C_{k-1}^{r-1}$.

这说明, 当 $|A|$ 取最小值 C_k^r 时, 每个 A_i 的阶 $|A_i|$ 都是 C_{k-1}^{r-1} , 故得原题答案至少有 45 个车站.

例 12

设 $O-xyz$ 是空间直角坐标系, S 是空间中的一个有限点集, S_x, S_y, S_z 分别是 S 中所有点在坐标平面 yOz, xOz, xOy 上的正投影所成的集合. 求证: $|S|^2 \leq |S_x| \cdot |S_y| \cdot |S_z|$. (1992 · IMO 试题 5)

证明

对每点 $(i, j) \in S_x$, 令

$$T_{ij} = \{(x, i, j) \mid (x, i, j) \in S\},$$

$$\text{显然有 } S = \sum_{(i,j) \in S_x} T_{ij}.$$

由柯西不等式有

$$|S|^2 \leq \sum_{(i,j) \in S_x} 1 \cdot \sum_{(i,j) \in S_x} |T_{ij}|^2 = |S_x| \cdot \sum_{(i,j) \in S_x} |T_{ij}|^2, \quad (1)$$

考虑集合 $V = \sum_{(i,j) \in S_x} (T_{ij} \times T_{ij})$, 其中 $T_{ij} \times T_{ij} = \{(t_1, t_2) \mid t_1, t_2 \in T_{ij}\}$,

$$\text{显然, } |V| = \sum_{(i,j) \in S_x} |T_{ij}|^2.$$

定义映射 f 如下

$$V \ni ((x, i, j), (x', i, j)) \rightarrow ((x, j), (x', i)) \in S_y \times S_z, \text{ 不难看出 } f \text{ 为单射, 因此有 } |V| \leq |S_y| \cdot |S_z|. \quad (2)$$

由 ①、② 即得 $|S|^2 \leq |S_x| \cdot |S_y| \cdot |S_z|$.

例 13 设集合 $A = \{1, 2, \dots, 10\}$, A 到 A 的映射 f 满足下列两个条件:

① 对任意 $x \in A, f_{30}(x) = x$;

② 对每个 $k \in \mathbb{Z}^+, 1 \leq k \leq 29$, 至少存在一个 $a \in A$, 使得 $f_k(a) \neq a$.

求这样的映射的总数. (1992 · 日本奥林匹克预选赛)

解

注意到 $10 = 5 + 3 + 2, 30 = 5 \times 3 \times 2$. 这提示我们将 A 划分成三个不相交的子集:

$$A = \{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5\} \cup \{b_1, b_2, b_3\} \cup \{c_1, c_2\}.$$

因为 f 满足条件①和②, 所以 f 是 A 到 A 上的双射, 并且由定理 2 的证明过程得知 A 中存在映射圈, 因此, 定义映射

$$f(a_1) = a_2, f(a_2) = a_3, f(a_3) = a_4, f(a_4) = a_5, f(a_5) = a_1; f(b_1) = b_2, f(b_2) = b_3, f(b_3) = b_1; f(c_1) = c_2, f(c_2) = c_1.$$

因为 30 是 5, 3, 2 的最小公倍数, 故由定理 2 和定理 3 知 f 是满足题目条件①和②唯一的一类映射.

因此, f 的总数目相当于从 10 个元素中选取 5 个, 再从剩下的 5 个中选取 3 个, 最后剩下的 2 个也选上, 它们分别作圆排列的数目, 它等于

$$(C_{10}^5 \cdot 4!) (C_5^3 \cdot 2!) (C_2^2 \cdot 1!) = 120\,960.$$

例 14 设集合 $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, 映射 $f: A \rightarrow A$, 其三次复合映射 $f \cdot f \cdot f$ 是恒等映射, 这样的 f 有多少个? (1996 · 日本数学奥林匹克预选赛)

解

因为集合 A 上的三次复合映射是恒等映射, 所以由定理 2 和定理 3 推知符合条件的映射 f 有三类:

(1) f 是恒等映射;

(2) A 中存在一个三元映射圈 $a \rightarrow b \rightarrow c \rightarrow a$ (a, b, c 互异), 而其他三个元素是不动点;

(3) A 中存在两个三元映射圈 $a \rightarrow b \rightarrow c \rightarrow a$ 和 $a' \rightarrow b' \rightarrow c' \rightarrow a'$ (a, b, c, a', b', c' 互异).

类型(1)的 f 只有 1 个.

对于类型(2), 先从 6 个元素中选出 3 个元素 a, b, c 的方法有 $C_6^3 = 20$ 种, 又 a, b, c 作圆排列有 $(3-1)! = 2$ 种, 故这样的 f 有 $20 \times 2 = 40$ 个.

对于类型(3), 首先 6 个元素平分成两组有 $C_6^3 \div 2 = 10$ 种分法, 每组分别作圆排列又有 $(3-1)! (3-1)! = 4$ 种方式, 所以这样的 f 有 $10 \times 4 = 40$ 个.

综上所述, 所求的 f 有 $1 + 40 + 40 = 81$ 个.

例 15 把正 $\triangle ABC$ 的各边 n 等分, 过各分点在 $\triangle ABC$ 内作各边的平行线, 得到的图形叫做正 $\triangle ABC$ 的 n 格点阵.

(1) 求其中所有边长为 $\frac{1}{n}|BC|$ 的菱形个数;

(2) 求其中所有平行四边形的个数. (1988 · 国家集训队选拔考试题)

解

延长 AB 至 B' , AC 至 C' , 使得 $|BB'| = |CC'| = \frac{1}{n}|BC|$. 作出正 $\triangle AB'C'$ 的 $n+1$ 格点阵 (图 1-3). 边 $B'C'$ 上有 $(n+2)$ 个点, 依次编号为 $0, 1, 2, \dots, n+1$. 在 $\triangle ABC$ 中边长为 $\frac{1}{n}|BC|$ 的菱形可以按边不平行于 BC, AC 与 AB 分为三类. 容易看出, 这三类菱形个数相同. 边不平行 BC 且边长为 $\frac{1}{n}|BC|$ 的所有菱形集合记作

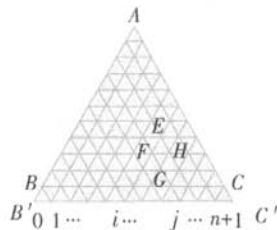


图 1-3

S. 由正整数 $1, 2, \dots, n$ 组成的所有有序数对 $(i, j), i < j$ 所构成的集合记作 T . 很明显, $|T| = C_n^2$, 设菱形 $EFGH \in S$, 延长它的两条邻边 HG 与 FG , 分别交 $B'C'$ 于点 i 与 $j, 1 \leq i < j \leq n$, 则 $(i, j) \in T$. 令 (i, j) 是菱形 $EFGH$ 在 S 到 T 的映射 φ 下的象. 这样便建立了 S 到 T 的映射 φ . 容易验证, 映射 φ 是双射. 因此, $|S| = |T| = C_n^2$. 所以所求的边长为 $\frac{1}{n}|BC|$ 的菱形个数为 $3C_n^2$.

其次, 将平行四边形按边不平行于 BC, AC 与 AB 分为三类, 这三类平行四边形个数应相同, 边不平行于 BC 的所有平行四边形集合记作 V . 非负整数 $0, 1, 2, \dots, n+1$ 构成的所有有序四元数组 $(i, j, k, l), 0 \leq i < j < k < l \leq n+1$ 构成的集合记作 W . 很明显, $|W| = C_{n+2}^4$. 设 α 是 V 中平行四边形, 延长它的四条边分别交 $B'C'$ 于点 i, j, k, l , 其中 $0 \leq i < j < k < l \leq n+1$, 则 $\beta = (i, j, k, l) \in W$. 令 β 是 α 在 V 到 W 的映射 φ 下的象. 这样便定义了 V 到 W 的一个映射 φ . 容易验证, φ 是双射. 因此, $|V| = |W| = C_{n+2}^4$, 从而所求平行四边形的个数为 $3C_{n+2}^4$.

例 16

三兄弟在某天看望生病朋友. 同一天, 三人妻子也去看望这位朋友. 三兄弟每人在病房里都遇到了两个兄弟的妻子. 证明: 三兄弟中某人, 在病房里遇到自己的妻子.

证明

假定 A 在病房里没有遇到自己的妻子, 只有两种可能:

(1) A 妻在丈夫去之前已离开 (这时她比两妯娌先离开病房, 因为 A 在病房遇到两妯娌), 说明 A 妻在三女人中最先离开病房;

(2) A 妻在丈夫离开后才去病房 (这时她比两妯娌后去, 因为 A 遇到两妯娌), 说明 A 妻在三女人中最后到病房.

由于三个女人最先离开只有一人, 最后到病房也只有一人, 故必有一人在病房遇到自己丈夫.

例 17

某一天有若干读者去图书馆, 他们是陆续去的. 但是任何三个读者中, 至少有两个读者在图书馆见过面. 证明: 可以找到这样两个时刻, 对于任何一个那天来过图书馆的读者, 在这两个时刻中至少有一个时刻是在图书馆里.

证明

要找的两个时刻是: 第一个离馆读者离馆时刻和最后一个进馆读者进馆时刻.

我们证明这天任一读者, 两个时刻中至少有一个时刻在图书馆. 反之, 若某读者两个时刻都不在图书馆, 唯一可能是: 他在第一个离馆读者离馆之后进馆, 并且在最后一个进馆读者进馆之前离开图书馆. 但这种情况下: 此人和第一个离馆读者, 最后一个进馆读者三人之间没有任何两人在图书馆见过面. 这与已知条件矛盾. 故结论得证.

例 18

设 $N^* = \{1, 2, 3, \dots\}$, 论证是否存在一个函数 $f: N^* \rightarrow N^*$ 使得 $f(1) = 2, f(f(n)) = f(n) + n$ 对一切 $n \in N^*$ 成立且 $f(n) < f(n+1)$.

解法一

存在, 首先有一条链.

$$1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 5 \rightarrow 8 \rightarrow 13 \rightarrow 21 \rightarrow \dots \quad ①$$

链上每一个数 n 的后继是 $f(n)$, f 满足

$$f(f(n)) = f(n) + n, \quad ②$$

即每个数是它前面两个数的和, 这种链称为 f 链.

对于①中的数 $m > n$, 由①递增易知有

$$f(m) - f(n) \geq m - n. \quad ③$$

我们证明正整数集 N^* 可以分解为若干条 f 链, 并且对任意正整数 $m > n$, ③成立 (从而 $f(n+1) > f(n)$, 并且每两条链无公共元素).

设已有若干条 f 链满足③, 而 $k+1$ 是第一个不在已有链中出现的数. 定义