

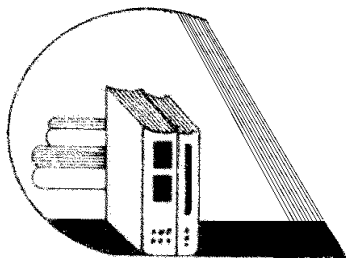
“十五”重点规划出版项目
国家基础教育课程改革系列丛书

走进新课程

——新课程的理论与实践
(第四辑)
高中部分

新课程与高中数学教学 (三)

北京师联教育科学研究所 编



學苑音像出版社

出版策划 北京山花子文化发展有限公司

责任编辑 汪 军

封面设计 师联平面工作室

走进新课程

——新课程的理论与实践

(第四辑)

高中部分

新课程与高中数学教学(三)

北京师联教育科学研究所 编

学苑音像出版社出版发行



印刷厂印刷

2004 年 7 月印刷

开本 350 × 1168 1/32 印张 :191 字数 :4952 千字

I S B N 7 - 88050 - 122 - 3

本书配碟发行全 28 册 434.00 元(册均 15.50 元 不含碟)

本书如有印刷、装订错误,请与本社联系调换

《走进新课程》

——新课程的理论与实践

大型文献丛书

出版说明

自 2001 年 6 月 8 日教育部颁发《基础教育课程改革纲要》以来，在全国范围内展开了建国以来最大规模和最深入、最具创造性的课程改革实验，涉及到了课程标准研制、课程设置、教学大纲的彻底改革、教师的整体培训、教材体系的重新确立、新教材的重新编写和审定、课堂教学方法体系的改革，教学评价观点和标准的重新研制及确认等一系列事关学校教育的根本问题，实验区逐渐扩大到全国各地，新课程改革已成大势所趋，对每个教师来说，是否适应新的课程改革要求，已成为事关教师从业状态的根本问题。按照教育部的部署和安排，在 2005—2006 年度要在全中国统一实行新的课程标准和教学要求。

为了配合基础教育改革的实施，推进新课程的教师培训和中小学教师继续教育工作的开展，我们特别组织了国内参与基础教育课程改革的基础理论研究、课程标准设计、实验教材编写和审定、新课程大实验区的示范学校的核心专家和一线教师编写了本套大型文献丛书。

本套丛书共分四辑：

第一辑《通识部分》，主要阐释新课程改革的基础教育理论结构、观念、观点、范畴、思想方法、基础和理论来源，新课程改革的基本原则和实施办法，世界课程改革与中国基础教育课程改革以及新课程标准的研制方法和教师培训方法等，主要为教师参与和实行新课程

教学打好理论基础。适用于教育教学行政管理部门教学、科研部门、各级各类学校和各科教师学习(同时配套出版有《走进新课程教师培训》全集音像资料 VCD 数十种已在各家电视台播出。)

第二辑《小学部分》主要是小学各科课程标准的基本内容摘要和简介,专家评析小学各科课程标准的结构内容、教学实施办法,一线教师为小学各科设计的经典示范课例,为实际教学提供参考,(同时配套出版有数百种各大实验区的优秀课堂实录 VCD,可另索参考。)

第三辑《初中部分》主要是初中各科课程标准的基本内容摘要和简介,专家评析初中各科课程标准的结构内容、教学实施办法,一线教师为初中各科设计的经典示范课例,为实际教学提供参考,(同时配套出版有数百种各大实验区的优秀课堂实录 VCD,可另索参考。)

第四辑《高中部分》主要是高中各科课程标准的基本内容摘要和简介,专家评析高中各科课程标准的结构内容、教学实施办法,一线教师为高中各科设计的经典示范课例,为实际教学提供参考,(同时配套出版有数百种各大实验区的优秀课堂实录 VCD,可另索参考。)

本套大型文献丛书,集合全国教改精华,相信对实际的教学改革工作有直接的参考和借鉴作用。不足之处请及时指出,以便修改。

北京师联教育科学研究所

2004 年 7 月

目 录



函数题型及解法	(1)
解无理不等式	(15)
算术平均数与几何平均数	(26)
不等式的证明	(40)
几个重要不等式的证明	(72)
对数不等式	(78)
含有字母系数的不等式	(86)
用平均值定理求某些问题的最值	(96)
数学归纳法	(112)
用数学归纳法证明不等式	(120)
复数的减法及其几何意义	(132)
复数与几何	(141)
立体几何绪言	(151)
空间直线	(160)
平面的基本性质之一	(174)
直线与平面平行的判定和性质	(182)
直线与平面垂直的判定和性质	(192)
水平放置的平面图形的直观图	(209)

函数题型及解法

【教学目的】

一、对于基本初等函数的有关概念，一般性质系统地再认识后，能熟练地、灵活地运用函数的性质和图象解题；

二、通过深入讨论一些函数的综合性问题及它在各种场合的应用，使学生的函数观点得以提高。

【时间】

二课时。

【教学过程】

一、导言

课前发给学生每人一份油印讲义，共 6 页，前面是本节课的例题与相应练习题（无解答过程），后面是 1995 年高考理科试卷中的“函数题”，计有第 (2)、(3)、(7)、(11)、(18)、(24) 等。上课开始，教师先组织学生通览高考函数题，得出两点结论：(1) 占有 30 多分，是高考试题的重要组成部分。(2) 基本上是中、低档综合题。由此引出本节课的主题，要详细研究函数题的基本类型及其解法。（大笔板书：函数题型及解法）

二、例题选讲

将分成“范围”题，证明题、最值问题、综合题型共四类来讲解。

1. “范围”题

例1 设 $f(x)$ 是定义在 $\mathbb{R}$ 上的单调奇函数, 且 $f(1) = -2$, 若 $f(k\log_2 t) + f(\log_2 t - \log_2^2 t - 2) > 0$, 求实数 k 的取值范围。

教师: 首先分析题意。已知条件有 4 个: 单调性, 奇函数, $f(1) = -2$, $f(k\log_2 t) + f(\log_2 t - \log_2^2 t - 2) > 0$ 。基本上都是“抽象的函数” f 的性质, 只有 $f(1) = -2$ 稍为具体一点。

结论是求 k 的取值范围。这就要求我们找出关于 k 的不等式(组), 对照已知, 只有

$$f(k\log_2 t) + f(\log_2 t - \log_2^2 t - 2) > 0 \quad ①$$

出现 k , 所以思考要从这个式子出发, 从中导出关于 k 的不等式, 怎么导出呢? 谁来回答? (全场肃静, 也许是因为师生不熟悉, 又坐有近百名教师听课的缘故, 所以无人举手, 让学生稍微思考后, 教师提问科代表)

学生 1. 首先判别函数的增减函数, 然后由式①可得

$$f(k\log_2 t) > -f(\log_2 t - \log_2^2 t - 2) = f(\log_2^2 t - \log_2 t + 2)。$$

从而 $k\log_2 t > \log_2^2 t - \log_2 t + 2$,

或 $k\log_2 t < \log_2^2 t - \log_2 t + 2$; ②

再由二次不等式恒正或恒负便可确定 k 的范围。

教师: 对, 那么怎样判别函数的增减性呢?

学生 2: 由奇函数知

$$f(-1) = -f(1) = 2 > -2 = f(1),$$

可见, $f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上是减函数。

教师: 还有没有别的办法判别出减函数?

学生: (沉默)

教师: 奇函数有一个隐含条件, 就是由

$$f(-x) = -f(x),$$

知 $f(0) = -f(0)$,

从而 $f(0) = 0$

与 $f(-1) = 2$ 作比较, 可知, $f(x)$ 为减函数。

现在, 请大家按照这个思路具体完成。

[点评: 为了保持学生思路的畅通, 此处不忙提出减函数的“别的判别办法”。不妨放到小结时再讲]

稍微停顿, 提问学生答案。

学生 3: k 的取值范围为:

$$-1 - 2\sqrt{2} < k < -1 + 2\sqrt{2}。$$

教师: 同意这个答案的举手。(两人举手)

教师: 只有两个举手, 但有时真理掌握在少数人手里。这个答案是对的。

事实上, 得出减函数后, 由①知②成立, 变为

$$\log_2^2 t - (1+k) \log_2 t + 2 > 0$$

对一切 $t \in \mathbb{R}$ 成立。若令 $x = \log_2 t$, 则二次三项式恒为正 $x^2 - (1+k)x + 2 > 0$,

因而有判别式小于 0,

$$(1+k^2) - 8 < 0, \quad \textcircled{3}$$

解得 $-1 - 2\sqrt{2} < k < -1 + 2\sqrt{2}。$

教师: 小结上面的思路, 可以得出解题的 4 个步骤:

(1) 由 $f(1) = -2$ 及奇函数, 确定 $f(x)$ 为减函数。这里, 具体取值 $f(1) = -2$ 成为解题的突破口;

(2) 由递减奇函数及①式可得不等式②;

(3) 由二次三项式恒正得 k 的二次不等式③;

(4) 解 k 的不等式得答案。

这里的关键是第一步, 而第一步的突破口是 $f(1) = -2$, 请进一步考虑, 把 1 改为 $f(2) = -2$, $\dots$, $f(N) = -2$ 情况如何?

把 -2 改为 $f(1) = -3, \dots, f(1) = -N$ 情况如何? 把 $f(1) = -2$ 改为 $f(1) > 0$ 情况如何?

2. 证明题

例2 设函数 $y = f(x)$ 定义在 $\mathbb{R}$ 上, 当 $x > 0$ 时, $f(x) > 1$, 且对任意的 $m, n \in \mathbb{R}$, 有 $f(m+n) = f(m) \cdot f(n)$; 当 $m \neq n$ 时, $f(m) \neq f(n)$ 。

(1) 证明 $f(0) = 1$;

(2) 证明 $f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上是增函数;

(3) 设 $A = \{(x, y) \mid f(x^2) \cdot f(y^2) < f(1)\}$,

$B = \{(x, y) \mid f(ax + by + c) = 1, a, b, c \in \mathbb{R}, a \neq 0\}$,

若 $A \cap B = \emptyset$, 求 a, b, c 满足的条件。

教师: 先做第(1)问。这是要由函数的一般性的取值性质, 如 $f(m+n) = f(m) \cdot f(n)$, $f(x) > 1$ (当 $x > 0$ 时) 等, 得出函数的特殊取值 $f(0) = ?$ 因此, 解题的方向是特殊化。如何取特殊性呢?

学生4: 由 $f(1+0) = f(1) \cdot f(0)$

得 $f(0) = 1$ 。

学生5: 由 $f(0) = f(0+0) = f(0) \cdot f(0)$

得 $f(0) = 1$ 。

教师: 这里取值有合理成分, 但不够严谨, 怎样更严格一点呢?

学生6: (沉默)

教师: 坐下。(再提问下一位)

学生7: 由 $1 > 0$ 知, $f(1) > 1$, 故由

$f(1) = f(1) \cdot f(0)$,

可得 $f(0) = 1$ 。

教师: 正确。对

$f(0) = f(0) \cdot f(0)$

可得 $f(0) = 0$ 或 $f(0) = 1$ 。需证明 $f(0) \neq 0$ 才能得出 $f(0) = 1$ 。

若 $f(0) = 0$ ，则对任意的 m ，均有

$$f(m) = f(m+0) = f(m) \cdot f(0) = 0$$

即函数值恒为 0，与已知矛盾，故 $f(0) \neq 0$ 。

下面考虑第 (2) 问。由于已知条件给出等式

$$f(m+n) = f(m) f(n),$$

我们要证明的是不等式

$$f(x_2) > f(x_1) \quad (x_2 > x_1),$$

两相比较，应取

$$x_2 = m + n, \quad x_1 = m, \quad x_2 - x_1 = n > 0,$$

有
$$\begin{cases} f(x_2) = f(x_1) f(x_2 - x_1), \\ f(x_2 - x_1) > 0. \end{cases}$$

于是单调性的证明归结为证明，对 $x_1 \in \mathbb{R}$ ，有

$$f(x_1) > 0. \quad \textcircled{1}$$

学生 8：当 $x_1 > 0$ 时，由已知条件得

$$f(x_1) > 1 > 0.$$

当 $x_1 = 0$ 时，由第 (1) 问知

$$f(x_1) = 1 > 0.$$

当 $x_1 < 0$ 时， $f(-x_1) > 0$ ，有

$$1 = f(0) = f(x_1 - x_1) = f(x_1) \cdot f(-x_1),$$

得 $f(x_1) > 0$ 。

综上所述，或①成立。

教师：对，这时 $x_1, x_2 \in \mathbb{R}, x_1 < x_2$ ，有

$$\begin{aligned} f(x_2) &= f[x_1 + (x_2 - x_1)] \\ &= f(x_1) f(x_2 - x_1) > f(x_1). \end{aligned}$$

故 $f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上为增函数。

上面同学们是通过讨论得出

$$f(x) > 0 \quad (x \in \mathbb{R})$$

另外也可以由

$$f(x) = f\left(\frac{x}{2} + \frac{x}{2}\right) = [f\left(\frac{x}{2}\right)]^2 \geq 0$$

知 $f(x)$ 为非负数。再用反证法证明其不为 0, 设 $f(x_0) = 0$, 则 $f(x) = f[x_0 + (x - x_0)]$

$$= f(x_0), f(x - x_0) = 0,$$

下面讨论第(3)问。(提问)

学生 9: (沉默)。

教师: 坐下。(提问下一个)

学生 10: 由集合 A 有

$$f(x^2 + y^2) = f(x^2) f(y^2) < f(1),$$

得 $x^2 + y^2 < 1$,

这是单位圆内的点。

由集合 B 有

$$f(ax + by + c) = 1 = f(0) \text{ 但 } m \neq n \text{ 时 } f(m) \neq f(n), \text{ 故有 } ax + by + c = 0$$

这是直角坐标系上的一条直线

由 $A \cap B = \emptyset$ 知, 方程组

$$\begin{cases} x^2 + y^2 < 1, \\ ax + by + c = 0 \end{cases}$$

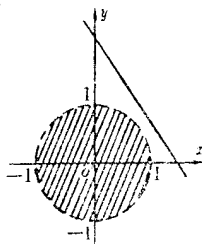
无解, 即直线与圆面不相交, 圆心到直线的距离

$$\text{不小于半径, } d = \frac{|c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} \geq 1, \text{ 即 } a^2 + b^2 \leq c^2.$$

教师: 说得非常好, 很不简单。另一思路可先考虑方程组②有解 (x_0, y_0) 则

$$|c| = |-ax_0 - by_0| \leq \sqrt{a^2 + b^2} \sqrt{x_0^2 + y_0^2} < \sqrt{a^2 + b^2}$$

因而, 方程组无解时, 应有 $a^2 + b^2 \leq c^2$ 。



3. 最值问题

例 3 给出函数

$$F(x) = kx^2 - 2\sqrt{4+2m-m^2}x \quad (k \neq 0)$$

$$G(x) = -\sqrt{1-(x-k)^2}, \quad m, k \in \mathbb{R}.$$

(1) 若 m, k 为常数, 问 m, k 满足什么条件时, 函数 $F(x)$ 具有最大值? 并求出 $F(x)$ 取得最大值时 x 的值。

(2) 是否存在实数对 (m, k) 同时满足以下两个条件:

① $F(x)$ 取得最大值时的 x 值与 $G(x)$ 取得最小值的 x 值相同; ② k 为整数?

并证明你的结论。

教师: (1) 由二次函数有最大值和

$$\begin{cases} k < 0, \\ 4+2m-m^2 \geq 0, \end{cases}$$

得

$$\begin{cases} k < 0, \\ 1-\sqrt{5} \leq m \leq 1+\sqrt{5}. \end{cases}$$

可求出 当 $x = \frac{\sqrt{4+2m-m^2}}{k}$

时, $F(x)$ 有最大值。

第 (1) 问就完成了, 第 (2) 问应该怎么办?

学生 11: 就是求两个未知数 m, k 因而要去找方程。

教师: 何处提供方程?

学生 12: “ $F(x)$ 取得最大值时的 x 值与 $G(x)$ 取得最小值的 x 值相同” 提供了 m, k 的等量关系。

教师: 对 $F(x)$ 取得最大值的 x 已经有了, 下来?

学生众: k

教师: 于是有 $\frac{\sqrt{4+2m-m^2}}{k} = k,$

或 $k^2 = \sqrt{4 + 2m - m^2}$. ②

这一个方程能求出两个未知数吗？

学生 13：还有 k 为整数且 $k < 0$ 的条件，

教师：对了，说得很好，由②有

$$k^2 = \sqrt{5 - (m - 1)^2} \leq \sqrt{5}.$$

得 $-\sqrt[4]{5} \leq k < 0$ 。

故 $k = -1$ 。 k 的值已经得出。

学生 14：将 $k = -1$ 代入②，有 $1 = 5 - (m - 1)^2$

可解出 $\begin{cases} m_1 = -1, \\ k_1 = -1, \end{cases} \quad \begin{cases} m_2 = 3, \\ k_2 = -1, \end{cases}$ ③

教师：这时，得 $F(x) = -x^2 - 2x$ ，

$$G(x) = -\sqrt{1 - (x + 1)^2}.$$

同时满足两个条件。故存在实数 $(-1, -1)$ 或 $(3, -1)$ 同时满足两个条件。

这类探索性的问题，我们常常是先假设 m, k 满足条件，然后求解。若问题无解，便说明这样的实数对 (m, k) 不存在；若问题有解，则难验证其充分性，得出所求。

4. 综合题型

例 4 如图 2，在 $\triangle ABC$ 中， $BC = a$ ， $AC = b$ ， $\angle ABC = \theta$ ，将 $\triangle ABC$ 分别以 BC ， AC ， AB 所在的直线为轴旋转一周，所得旋转体体积次为 V_1, V_2, V_3 ，

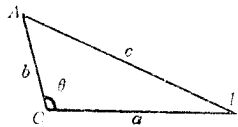


图 2

(1) 求 $T = \frac{V_3}{V_1 + V_2}$ ；(用 a, b, c 表示)

(2) 当 θ 为定值，并令 $x = \frac{a+b}{c}$ 时，将 T 表示为 x 的函数，写出这个函数的定义域，并求这个函数的最大值。

教师：请大家求出 V_1 、 V_2 、 V_3 来，分别用 a ， b ， c ， θ 表示。(提问： V_1 等于什么？)

学生 15：还没有算出来。

学生 16：还没有算出来。

教师：看来计算上有些障碍。

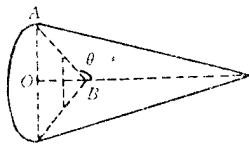


图 2

$$\begin{aligned} V_1 &= \frac{1}{3}sh_1 - \frac{1}{3}sh_2 \\ &= \frac{1}{3}s(CO - BO) \\ &= \frac{1}{3}\pi OA^2 \cdot BC \\ &= \frac{\pi ab^2 \sin^2 \theta}{3}. \end{aligned}$$

这里的技巧是不要分别求 CO ， BO ，直接用它们的差。

下来 V_2 ， V_3 应是多少？

$$\text{学生 17：} V_2 = \frac{\pi a^2 b \sin^2 \theta}{3}.$$

$$\text{学生 18：} V_3 = \frac{\pi a^2 b^2 \sin^2 \theta}{3c}.$$

教师：所以

$$T = \frac{V_3}{V_1 + V_2} = \frac{ab}{(a+b)c}. \quad ①$$

下来，要用 $x = \frac{a+b}{c}$ 代入，使只出现 x ，不再出现 a ， b ， c ，这时， θ 为定值，可以出现在函数表达式中。

$$\text{学生 19：} T = \frac{ab}{xc^2}.$$

教师：这不算完成，还要继续代换 ab 与 c ，因为牵涉到边角关系，我们用余弦定理

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \theta$$

$$= (a+b)^2 - 2ab(1 + \cos\theta),$$

$$\text{得 } 1 = \left(\frac{a+b}{c}\right)^2 - 2\frac{ab}{c^2}(1 + \cos\theta)$$

$$= x^2 - 2\frac{ab}{c^2}(1 + \cos\theta), \quad (2)$$

$$\text{得 } \frac{ab}{c^2} = \frac{x^2 - 1}{2(1 + \cos\theta)},$$

$$\text{从而 } T = \frac{x^2 - 1}{2x(1 + \cos\theta)} \quad (3)$$

下面确定函数的定义域。

学生 20：由 $a+b > c$ 知 $x = \frac{a+b}{c} > 1$ 。

教师： $x > 1$ 是必要条件，还不充分，由②知

$$1 \geq x^2 - 2\frac{(a+b)^2}{4c^2}(1 + \cos\theta)$$

$$= x^2 - \frac{x^2}{2}(1 + \cos\theta) \quad \theta = x^2 \cdot \frac{1 - \cos\theta}{2},$$

$$\text{得 } x^2 \leq \frac{2}{1 - \cos\theta}$$

$$\text{从而 } x \text{ 的取值范围为 } 1 < x \leq \sqrt{\frac{2}{1 - \cos\theta}}。$$

这就得出函数的定义域 $(1, \sqrt{\frac{2}{1 - \cos\theta}}]$ ，当 $a = b$ 时， x 可以

取最大值。

下来，如何求函数的最大值？

教师：将③变为

$$x^2 - 2T(1 + \cos\theta) \cdot x - 1 = 0,$$

然后像例 1 一样用判别式很容易产生误判，因为这里的 x 是在有限区间内的，转化为二次函数。

$$f(x) = x^2 - 2T(1 + \cos\theta)x - 1$$

与 x 轴交点横坐标在 $(1, \sqrt{\frac{2}{1-\cos\theta}}]$ 上也很啰嗦。

$$\text{由 } T = \frac{1}{2(1+\cos\theta)} \left(x - \frac{1}{x}\right)$$

知，函数在其定义域内是增函数，当 $x = \sqrt{\frac{2}{1-\cos\theta}}$ 时

$$T_{\text{最大值}} = \frac{1}{2(1+\cos\theta)} \left(\sqrt{\frac{2}{1-\cos\theta}} - \sqrt{\frac{1-\cos\theta}{2}}\right) = \frac{\sqrt{2}}{4\sqrt{1-\cos\theta}}。$$

小结：函数是中学数学的主线，函数思想和方法是数学素质体现的重要方面，因此，熟练灵活的应用函数性质和图象解题，并具备一定的解答函数综合题的能力，是提高函数观点的基础，同学们要在课后做一定数量的练习题，强化提高这方面的能力。

【点评】

这是一堂成功的复习课，在一个新的、完全不熟悉的环境中，能把课上得这样生动，能把学生调动得这样充分，实在不易，当我们从教学目的是否明确？教学要求是否恰当？教学内容是否充实？教学方法是否灵活？教学效果是否良好？教学基本功是否过关、是否过硬？诸方面整体衡量这节课的时候，我要再一次肯定地说，这是一堂成功的课。从高考复习的角度看，我要着重指出它的两个优点。

一、选题精练充实

这节课通过四个例子来体现四种类型，设计本身有全面覆盖“函数题”的意图。虽然，这里的分类是否准确还可以研究，但“分类讲解”的复习方式还是有益并且有效的。尤其是，这几个例子的选取有典型性，既难易适中又具训练价值。

1. 这几个例子覆盖了函数的有关概念与主要性质。函数的基础——集合有了，函数的三要素定义域、值域、对应关系 f 有了，函数的主要性质奇偶性、单调性、最值等（除周期性外）都有了。

所以,这实质上也是一次“习题化”的概念复习。

2. 题目涉及代数、解析几何、立体几何,既是跨学科的最高层次综合,又是中学课程的一无遗漏的最全面覆盖。

3. 既讨论具体的函数,如例 3、例 4;又讨论抽象的函数,如例 1,例 2(实质有指数函数的背景)。

4. 题型有计算也有证明,有结论肯定型又有结论探索型,各种形式都兼顾到了。

5. 从数学思想与数学方法的角度看,既有函数思想、又有方程观点,还有分类讨论、等价转换、数形结合的思想,这些全是高考的重点与热点。另外,配方法、消元法、换元法、坐标法、判别式法、特殊值法、放缩法等都不同程度涉及了。

由以上几方面可见,就几个例子的选取是比较精炼和充实的。这个人的偏爱而言,我希望例子的选取更接近课本与历年高考题,最好是这两方面的变形、引申与综合。

这里已经涉及到高考复习第二阶段选例的一些原则,即全面覆盖、难易适中、综合性、训练价值。

二、讲授灵活生动

1. 调动学生的积极参与

这节课面对不熟悉的学生,面对近百名听课教师,依然放手让学生参与,直接提问了 20 个学生(占 35 人的大多数),还有更多的学生在步步紧迫的问题面前,进行了积极的思考或齐声回答了问题。这既反映了教学观点,更体现了教学基本功。在提问的评价上,对好学生的鼓励也做得不错,对不会做的学生稍冷落了点。

当学生的回答不太对教师的设计思路时,现场的处理有点生硬,这次整理时,根据大家的意见已作了修订。

2. 体现了高考复习以解题训练为中心的思想

现在已经达成共识,平常教学要按教学规律办事。高考复习要