第一章 常用逻辑用语

1.1 命题及其关系

1.1.1 命　题

自学导引

一、学习目标

了解命题、真命题、假命题的概念. 会判断哪些语句是命题,哪些不是命题. 能熟练判断命题的真假性.

二、了解新知

1. 一般地,我们把用________、________或________表达的,可以判断________的________,叫作命题(proposition).

2. 判断为________的语句叫作真命题(true proposition). 判断为________的语句叫作假命题(false proposition).

3. 在数学中,"若 p 则 q"是命题的常见形式,其中 p 叫作命题的__________,q 叫作命题的________.

例题选讲

【例 1】 判断下列语句是否是命题,并说明理由.

(1) 三角函数难道不是函数吗?

(2) 若 $x+y$ 是有理数,则 x、y 均为有理数.

(3) 一条直线 l,不是与平面 α 平行就是相交.

(4) $x^2+2x-3<0$.

(5) 作$\triangle ABC\cong\triangle A'B'C'$.

(6) 这是一棵大树.

(7) 二次函数的抛物线太美了!

(8) 4 是集合$\{1,2,3\}$的元素.

解:(1) 通过反问句,对三角函数是不是函数做出判断,为真,是命题.

(2) 当 $x=\sqrt{2}$,$y=-\sqrt{2}$,$x+y$ 是有理数,为假,是命题.

(3) 直线 l 与平面 α 的位置有三种:平行、相交和在平面内,为假,是命题.

(4) 在 x 未赋值之前,不能判断其真假,不是命题,是开语句.

(5) 祈使句,不是命题.

(6) 由于"大树"没有界定,就不能判断"这是一棵大树"的真假,不是命题.

(7) 感叹句,不是命题.

(8) 由于 $4\notin\{1,2,3\}$,所以"4 是集合$\{1,2,3\}$的元素"为假,是命题.

> **启示**:表达命题的语句一般是陈述句. 感叹句、祈使句、疑问句都不是命题. 同时,只有能判断真假的陈述句才是命题,判断语句的真假不应带有某种感情色彩,而是指语句本身的真假.

【例 2】 把下列命题写成"若 p 则 q"的形式,并判断其真假.

(1) 实数的平方是非负数;

(2) 等底等高的两个三角形是全等三角形;

(3) 能被 6 整除的数既能被 3 整除也能被 2 整除;

(4) 弦的垂直平分线经过圆心,并平分弦所对

的弧.

解:(1) 原命题可以写成:若一个数是实数,则它的平方是非负数.这个命题是真命题.

(2) 原命题可以写成:若两个三角形等底等高,则这两个三角形是全等三角形.这个命题是假命题.

(3) 原命题可以写成:若一个数能被 6 整除,则它既能被 3 整除也能被 2 整除.这个命题是真命题.

(4) 原命题可以写成:若一条直线是弦的垂直平分线,则这条直线经过圆心且平分弦所对的弧.这个命题是真命题.

启示:"若 p 则 q"形式的命题也是复合命题,改写时,一定要注意找出命题的条件和结论,同时要注意所叙述条件和结论的完整性.

课堂练习

1. 下列语句中是命题的是(　　)

A. $|x+a|$　　B. $\{0\}\in\mathbf{N}$

C. 元素与集合　　D. 真子集

2. 若 A、B 是两个集合,则下列命题中真命题是(　　)

A. 如果 $A\subseteq B$,那么 $A\cap B=A$

B. 如果 $A\cap B=A$,那么 $(\complement_U A)\cap B=\varnothing$

C. 如果 $A\subseteq B$,那么 $A\cup B=A$

D. 如果 $A\cup B=A$,那么 $A\subseteq B$

3. 下列语句中,不能成为命题的是(　　)

A. $5>12$

B. $x>0$

C. 若 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$,则 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$

D. 三角形的三条中线交于一点

能力提高

一、选择题

1. 下列语句中,是命题的个数是(　　)

① 地球上的四大洋;　② $-5\in\mathbf{Z}$;　③ $\pi\notin\mathbf{R}$;　④"我国的小河流"可以组成一个集合.

A. 1　B. 2　C. 3　D. 4

2. 下列命题中,真命题共有(　　)

① 面积相等的三角形是全等三角形　②"若 $xy=0$,则 $|x|+|y|=0$"　③ 若 $a>b$,则 $a+c>b+c$　④ 矩形的对角线互相垂直

A. 1 个　　B. 2 个

C. 3 个　　D. 4 个

3. 设 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{c}$ 是任意的非零平面向量,且相互不共线,则① $(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})\boldsymbol{c}=(\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a})\boldsymbol{b}$;② $|\boldsymbol{a}|-|\boldsymbol{b}|<|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|$;③ $(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c})\boldsymbol{a}-(\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a})\boldsymbol{b}$ 不与 $\boldsymbol{c}$ 垂直;④ $(3\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b})\cdot(3\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b})=9|\boldsymbol{a}|^2-4|\boldsymbol{b}|^2$ 中,是真命题的有(　　)

A. ①②　B. ②③　C. ③④　D. ②④

4. 给出下列关于互不相同的直线 m、l、n 和平面 α、β 的四个命题,其中为假命题的是(　　)

① 若 $m\subset\alpha$,$l\cap\alpha=A$,点 $A\notin m$,则 l 与 m 不共面;　② 若 m、l 是异面直线,$l\parallel\alpha$,$m\parallel\alpha$,且 $n\perp l$,$n\perp m$,则 $n\perp\alpha$;　③ 若 $l\parallel\alpha$,$m\parallel\beta$,$\alpha\parallel\beta$,则 $l\parallel m$;　④ 若 $l\parallel\alpha$,$m\parallel\alpha$,$l\cap m=$点 A,$l\parallel\beta$,$m\parallel\beta$,则 $\alpha\parallel\beta$.

A. ①　B. ②　C. ③　D. ④

二、填空题

5. 同住一间寝室的四名女生,她们当中有一人在修指甲,一人在看书,一人在梳头发,另一人在听音乐.① A 不在修指甲,也不在看书;② B 不在听音乐,也不在修指甲;③ 如果 A 不在听音乐,那么 C 不在修指甲;④ D 既不在看书也不在修指甲;⑤ C不在看书,也不在听音乐.若上面的命题都是真命题,问他们各在干什么?

A 在________,B 在________,C 在________,D 在________.

6. 下列命题:

① 若 $xy=1$,则 x、y 互为倒数;② 四条边相等的四边形是正方形;③ 平行四边形是梯形;④ 若 $ac^2>bc^2$,则 $a>b$.其中真命题的序号是________.

7. 把下面不完整的命题补充完整,并使之成为真命题:

若函数 $f(x)=3+\log_2 x$ 的图象与 $g(x)$ 的图象关于________对称,则函数 $g(x)=$____________

(注:填上你认为可以成为真命题的一种情形即可,不必考虑所有可能的情形).

三、解答题

8. 把下列命题改写成"若 p 则 q"的形式,并指出条件与结论:

(1) 等边三角形的三个内角相等;

(2) 当 $a>0$ 时,函数 $y=ax+b$ 的值随 x 的值的增加而增加.

9. 已知命题 p:$|x^2-x|\geqslant 6$,q:$x\in\mathbf{Z}$,且 p 假 q 真,求 x 的值.

10. 设有两个命题:p:不等式 $|x|+|x-1|\geqslant m$ 的解集为 $\mathbf{R}$;q:函数 $f(x)=-(7-3m)^x$ 是减函数. 若这两个命题有且只有一个真命题,求实数 m 的范围.

课后反思

1. 通过本节知识的学习,在掌握了命题、真假命题的概念后,能够根据定义判断什么是命题,以及命题的真假性.

2. 掌握并能够熟练应用命题的真假性求字母的值或参数的范围.

3. 能够分清命题的条件和结论,并且会把命题写成"若 p 则 q"的形式.

1.1.2 四种命题

自学导引

一、学习目标

了解原命题、逆命题、否命题、逆否命题的定义.

二、了解新知

1. 一般地,对于两个命题,如果一个命题的条件和结论分别是另一个命题的__________和________,那么我们把这样的两个命题叫作互逆命题. 其中一个命题叫作________(original proposition),另一个叫作原命题的________(inverse proposition).

2. 若原命题为"若 p 则 q",则它的逆命题为________.

3. 对于两个命题,其中一个命题的条件和结论恰好为另一个命题的________和________,把这样的两个命题叫作互否命题. 如果把其中的一个命题叫作原命题,那么另一个叫作原命题的________(negative proposition).

4. 若原命题为"若 p 则 q"则它的否命题为________________.

5. 对于两个命题,其中一个命题的条件和结论恰好是另一个命题的________和________,我们把这样的两个命题叫作互为逆否命题,其中一个叫作原命题,则另一个叫作原命题的________(inverse and negative proposition).

6. 若原命题为"若 p 则 q",则它的逆否命题为________.

例题选讲

【例 1】 分别写出下列命题的逆命题、否命题、逆否命题,并判断它们的真假.

(1) 若 $q<1$,则方程 $x^2+2x+q=0$ 有实根;

(2) 若 $ab=0$,则 $a=0$ 或 $b=0$;

(3) 若 $x^2+y^2=0$,则 x、y 全为零.

解:(1) 逆命题:若方程 $x^2+2x+q=0$ 有实根,则 $q<1$,为假命题.

否命题:若 $q\geqslant 1$,则方程 $x^2+2x+q=0$ 无实根,假命题.

逆否命题:若方程 $x^2+2x+q=0$ 无实根,则 $q\geqslant 1$,真命题.

(2) 逆命题:若 $a=0$ 或 $b=0$,则 $ab=0$,真命题.

否命题:若 $ab\neq 0$,则 $a\neq 0$ 且 $b\neq 0$,真命题.

逆否命题:若 $a\neq 0$ 且 $b\neq 0$,则 $ab\neq 0$,真命题.

(3) 逆命题:若 x、y 全为零,则 $x^2+y^2=0$,真命题.

否命题:若 $x^2+y^2\neq 0$,则 x、y 不全为零,真命题.

逆否命题:若 x、y 不全为零,则 $x^2+y^2\neq 0$,真

此为试读,需要完整PDF请访问: www.ertongbook.com

命题.

启示:在判断命题的真假性时,充分利用原命题与逆否命题.逆命题和否命题是等价的.

下面把常用的一些词语和它的否定词语对照列表如下:

原词语	等于(=)	大于(>)	小于(<)	是	都是
否定词语	不等于(≠)	不大于(≤)	不小于(≥)	不是	不都是

原词语	至多有一个	至多有 n 个	至少有一个	任意的	能
否定词语	至少有两个	至少有 $n+1$ 个	一个也没有	某个	不能

原词语	p 或 q
否定词语	$\neg p$ 且 $\neg q$

【例 2】 写出下列命题的逆命题、否命题与逆否命题:

(1) 负数的平方是正数;

(2) 正方形的四条边相等.

分析:此题的条件和结论不很明显,因此首先将命题改写成"若 p 则 q"的形式,然后再写出它的逆命题、否命题与逆否命题.

解:(1) 改写成"若一个数是负数,则它的平方是正数".

逆命题:若一个数的平方是正数,则它是负数.

否命题:若一个数不是负数,则它的平方不是正数.

逆否命题:若一个数的平方不是正数,则它不是负数.

(2) 原命题可以写成:若一个四边形是正方形,则它的四条边相等.

逆命题:若一个四边形的四条边相等,则它是正方形.

否命题:若一个四边形不是正方形,则它的四条边不相等.

逆否命题:若一个四边形的四条边不相等,则它不是正方形.

启示:逆命题、否命题、逆否命题可以分别简述如下:

交换原命题的条件和结论,所得的命题是逆命题;同时否定原命题的条件和结论,所得的命题是否命题;交换原命题的条件和结论,并且同时否定,所得的命题是逆否命题.

课堂练习

1. 命题"对顶角相等"与它的逆命题、否命题、逆否命题中,真命题是(　　)

A. 上述四个命题

B. 原命题与逆命题

C. 原命题与逆否命题

D. 逆命题与否命题

2. 下列说法中,不正确的是(　　)

A. "若 p 则 q"与"若 q 则 p"是互逆的命题

B. "若非 p 则非 q"与"若 q 则 p"是互否的命题

C. "若非 p 则非 q"与"若 p 则 q"是互否的命题

D. "若非 p 则非 q"与"若 q 则 p"是互为逆否的命题

3. "若 $x^2=1$,则 $x=1$"的否命题为(　　)

A. 若 $x^2\neq1$,则 $x=1$

B. 若 $x^2=1$,则 $x\neq1$

C. 若 $x^2\neq1$,则 $x\neq1$

D. 若 $x\neq1$,则 $x^2\neq1$

能力提高

一、选择题

1. "$\triangle ABC$ 中,若 $\angle C=90°$,则 $\angle B$、$\angle A$ 全是锐角"的否命题为(　　)

A. $\triangle ABC$ 中,若 $\angle C\neq90°$,则 $\angle A$、$\angle B$ 全不是锐角

B. $\triangle ABC$ 中,若 $\angle C\neq90°$,则 $\angle A$、$\angle B$ 不全是锐角

C. $\triangle ABC$ 中,若 $\angle C\neq90°$,则 $\angle A$、$\angle B$ 中必有一钝角

D. 以上都不对

2. 若命题 p 的逆命题是 q,命题 q 的否命题是 r,则 p 是 r 的(　　)

A. 逆命题　　B. 逆否命题

C. 否命题　　D. 以上判断都不对

3．有下列四个命题，其中真命题是(　　)

①“若 $xy=1$，则 x、y 互为倒数”的逆命题

②“相似三角形的周长相等”的否命题

③“若 $b\leqslant -1$，则方程 $x^2-2bx+b^2+b=0$ 有实根”的逆否命题

④“若 $A\cup B=B$，则 $A\supseteq B$”的逆否命题

A. ①②　　B. ②③

C. ①③　　D. ②④

4．命题“若 $A\cup B=A$，则 $A\cap B=B$”的否命题是(　　)

A. 若 $A\cup B\neq A$，则 $A\cap B\neq B$

B. 若 $A\cap B=B$，则 $A\cup B=A$

C. 若 $A\cap B\neq B$，则 $A\cup B\neq A$

D. 若 $A\cup B\neq A$，则 $A\cap B=B$

二、填空题

5．命题“若 $a>1$，则 $a>0$”的逆命题是____________，逆否命题是____________．

6．否定下列各结论，并写出由此可能出现的情况：

(1) $a=b$，否定____________，可能情况____________；

(2) a、b、c 至多一个为零，否定____________，可能情况____________．

7．给定下列命题：

①“若 $k>0$，则方程 $x^2+2x-k=0$”有实根；

②“若 $a>b$，则 $a+c>b+c$”的否命题；

③“矩形的对角线相等”的逆命题；

④“若 $xy=0$，则 x、y 中至少有一个为 0”的否命题；

其中真命题的序号是____________．

三、解答题

8．把下列命题写成“若 p 则 q”的形式，并写出它们的逆命题、否命题与逆否命题，并判断真假．

(1) 当 $x=2$ 时，$x^2-3x+2=0$；

(2) 对顶角相等．

9．命题：“已知 a、b、c、d 是实数，若 $a=b$，$c=d$，则 $a+c=b+d$”写出该命题的逆命题、否命题、逆否命题，并判断这些命题的真假．

10．已知 m、$n\in\mathbf{R}$，

(1) 命题“若 $mn=0$，则 $m=0$ 或 $n=0$”的否命题，逆否命题各是什么？

(2) 命题“若 $m^2+n^2=0$，则 $m=0$ 且 $n=0$”的否命题，逆否命题各是什么？并判断以上各命题的真假．

课后反思

1．正确写出一个命题的逆命题、否命题、逆否命题，关键在于：

(1) 将命题改写成“若 p 则 q”的形式；

(2) 分清原命题的条件与结论；

(3) 依据概念要求写出其他三种命题．

2．否命题和命题的否定是两个易混的问题，要注意其区别，另外要掌握一些常见词的否定词．

3．当四种命题中某一个作为原命题时，其他三个命题的情况如下表：

原命题	逆命题	否命题	逆否命题
若 p 则 q	若 q 则 p	若 $\neg p$ 则 $\neg q$	若 $\neg q$ 则 $\neg p$
若 q 则 p	若 p 则 q	若 $\neg q$ 则 $\neg p$	若 $\neg p$ 则 $\neg q$
若 $\neg p$ 则 $\neg q$	若 $\neg q$ 则 $\neg p$	若 p 则 q	若 q 则 p
若 $\neg q$ 则 $\neg p$	若 $\neg p$ 则 $\neg q$	若 q 则 p	若 p 则 q

1.1.3　四种命题的相互关系

自学导引

一、学习目标

掌握四种命题之间的关系,并会判断四种命题的真假性,掌握反证法证题的一般步骤.并会用反证法证明简单的数学问题.

二、了解新知

1. 原命题为真,它的逆命题________为真.
2. 原命题为真,它的否命题________为真.
3. 原命题为真,它的逆否命题________为真.
4. 用反证法证明的一般步骤是:

(1)________________;

(2)________________;

(3)________________.

5. 反证法中引出矛盾的四种常见形式:

(1)________________;

(2)________________;

(3)________________;

(4)________________.

例题选讲

【例1】 若 a、b、c 均为实数,且 $a=x^2-2y+\frac{\pi}{2}$,$b=y^2-2z+\frac{\pi}{3}$,$c=z^2-2x+\frac{\pi}{6}$.求证:a、b、c 中至少有一个大于0.

证明:(用反证法)假设 a、b、c 都不大于0,即 $a\leqslant 0$,$b\leqslant 0$,$c\leqslant 0$,则 $a+b+c\leqslant 0$,而 $a+b+c=x^2-2y+\frac{\pi}{2}+y^2-2z+\frac{\pi}{3}+z^2-2x+\frac{\pi}{6}=(x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2+\pi-3$.

$\because$ $\pi-3>0$,且 $(x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2\geqslant 0$

$\therefore$ $a+b+c>0$ 与 $a+b+c\leqslant 0$ 矛盾,因此,a、b、c 中至少有一个大于0.

启示:含有"至多"、"至少"类型的命题一般常用反证法证明.

【例2】 已知 a、b、c 是一组勾股数,即 $a^2+b^2=c^2$,

求证:a、b、c 不可能都是奇数.

分析:利用反证法证明.

证明:假设 a、b、c 都是奇数

$\because$ a、b、c 是一组勾股数,$\therefore$ $a^2+b^2=c^2$　　①

$\because$ a、b、c 都是奇数,$\therefore$ a^2、b^2、c^2 也都是奇数

$\therefore$ a^2+b^2 是偶数,这样①式的左边是偶数,右边是奇数,产生矛盾.$\therefore$ a、b、c 不可能都是奇数.

启示:1. 命题以否定的形式出现,常选用反证法证明.

2. 由于原命题和它的逆否命题有相同的真假性,即互为逆否命题具有等价性,所以我们在直接证明某一个命题为真命题有困难时,可以通过证明它的逆否命题为真命题,来间接地证明原命题为真命题.

3. 反证法是一种推翻命题结论的所有反面情况,从而树立原命题正确的证明方法,学习反证法一定要注意结论的反面结论可能不唯一.

课堂练习

1. 用反证法证明命题"$\sqrt{2}+\sqrt{3}$是无理数"时,假设正确的是(　　)

A. 假设$\sqrt{2}$是有理数

B. 假设$\sqrt{3}$是有理数

C. 假设$\sqrt{2}$或$\sqrt{3}$是有理数

D. 假设$\sqrt{2}+\sqrt{3}$是有理数

2. 设原命题:若 $a+b\geqslant 2$,则 a、b 中至少有一个不小于1,则原命题与其逆命题的真假情况是(　　)

A. 原命题真,逆命题假

B. 原命题假,逆命题真

C. 原命题与逆命题均为真命题

D. 原命题与逆命题均为假命题

3. 命题"若 $a=5$,则 $a^2=25$"与其逆命题、否命题、逆否命题这四个命题中,真命题的个数是(　　)

A. 0　　B. 2　　C. 3　　D. 4

能力提高

一、选择题

1. 用反证法证明命题"三角形的内角中至多有一个钝角"时,反设正确的是(　　)

A. 假设至少有一个钝角

B. 假设至少有两个钝角

C. 假设没有一个钝角

D. 假设没有一个钝角或至少有两个钝角

2. 若"$x=3$是方程$ax^2+bx+c=0$的根"是真命题,则下列命题为真命题的是(　　)

A. 方程$ax^2+bx+c=0$的根是$x=3$

B. 若$x\neq3$,则x不是方程$ax^2+bx+c=0$的根

C. 若$ax^2+bx+c\neq0$,则$x\neq3$

D. 以上命题都是假命题

3. 下列命题中(　　)

① 若$p^2+q^2=2$,则$p+q\leqslant2$;　② 若$x^2-3x+2=0$,则$x=2$.

A. 只有①正确　　B. 只有②正确

C. ①②都正确　　D. ①②都不正确

4. 对于命题:

① 若"$x^2+y^2=0$,则x,y全为0"的逆命题;② "全等三角形是相似三角形"的否命题;　③ "若$m>0$,则$x^2+x-m=0$有实数根"的逆否命题;

其中真命题的个数为(　　)

A. 0　B. 1　C. 2　D. 3

二、填空题

5. 下列命题,其中真命题是________.(填序号)

① "若$xy=1$,则x,y互为倒数"的逆命题;

② "四边相等的四边形是正方形"的否命题;

③ "梯形不是平行四边形"的逆否命题;

④ "若$ac^2>bc^2$,则$a>b$"的逆命题.

6. 用反证法证明命题"若整数n的平方是偶数,则n也是偶数"如下:假设n是奇数,则$n=2k+1$(k是整数),$n^2=(2k+1)^2=$________与已知n^2是偶数矛盾,所以n是偶数.

7. 若四点A、B、C、D不共面,则直线AB与CD的位置关系是________.

三、解答题

8. 设$0<a$、b、$c<1$,求证:$(1-a)b$、$(1-b)c$、$(1-c)a$不同时大于$\frac{1}{4}$.

9. 如图1-1-1,已知平面$\alpha\perp$平面β,$\alpha\cap\beta=l$,直线$a\subset\alpha$,直线$b\subset\beta$,且a、b都不与l垂直,求证:a与b不垂直.

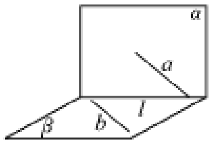

图1-1-1

10. 已知函数$f(x)$是$(-\infty,+\infty)$上的增函数. a、$b\in\mathbf{R}$,对命题"若$a+b\geqslant0$,则$f(a)+f(b)\geqslant f(-a)+f(-b)$".

(1) 写出其逆命题,判断其真假,并证明你的结论;

(2) 写出其逆否命题,判断其真假,并证明你的结论.

课后反思

1. 学习四种命题的关系的关键在于了解命题的结构,掌握四种命题的组成及互为逆否命题的等价性;学习反证法一定要注意结论的反面结论可能不唯一.

2. 用反证法证明问题的一般步骤:

(1) 假设命题的结论不成立,即假设结论的反面成立;

(2) 从这个假设出发,经过推理论证,得出矛盾;

(3) 从矛盾判定假设不正确,从而肯定命题的结论正确.

3. 适宜用反证法证明的数学命题:

(1) 结论本身是以否定形式出现的一类命题;

(2) 关于唯一性、存在性的命题;

(3) 结论是以"至多"、"至少"等形式出现的命题;

(4) 结论的反面比原结论更具体更容易研究的命题.

此为试读,需要完整PDF请访问: www.ertongbook.com

1.2 充分条件与必要条件

1.2.1 充分条件与必要条件

自学导引

一、学习目标

理解充分条件、必要条件的意义，会判断一些命题的条件是否为充分条件或必要条件或既不是充分条件也不是必要条件.

二、了解新知

1. 如果“若 p 则 q”为真命题，是指由 p 通过推理可以得出 q. 这时，我们就说，由 p 可推出 q. 记作________，并且说 p 是 q 的________条件(sufficient condition)，q 是 p 的________条件(necessary condition).

2. 如果“若 p，则 q”为假命题，那么由 p 推不出 q，记作 $p\nRightarrow q$，此时，我们就说 p 不是 q 的________条件，q 不是 p 的________条件.

例题选讲

【例 1】 给出下列四组命题：

(1) p：$x-2=0$，q：$(x-2)(x-3)=0$；

(2) p：两个三角形相似，q：两个三角形全等；

(3) p：$m<-2$，q：方程 $x^2-x-m=0$ 无实根；

(4) p：一个四边形是矩形，q：四边形的对角线相等；

试分别指出 p 是 q 的什么条件.

分析：判断 p 是 q 的什么条件，关键看 p 能否推出 q，q 能否推出 p.

解：(1) ∵ $x-2=0\Rightarrow(x-2)(x-3)=0$，而 $(x-2)(x-3)=0\nRightarrow x-2=0$.

∴ p 是 q 的充分不必要条件.

(2) ∵两个三角形相似 $\nRightarrow$ 两个三角形全等；

但两个三角形全等 $\Rightarrow$ 两个三角形相似.

∴ p 是 q 的必要不充分条件.

(3) ∵ $m<-2\Rightarrow$ 方程 $x^2-x-m=0$ 无实根；

方程 $x^2-x-m=0$ 无实根 $\nRightarrow m<-2$.

∴ p 是 q 的充分不必要条件.

(4) ∵矩形的对角线相等，∴ $p\Rightarrow q$；

而对角线相等的四边形不一定是矩形，

∴ $q\nRightarrow p$.

∴ p 是 q 的充分不必要条件.

启示：判定 p 是 q 的什么条件，首先要分清什么是 p，什么是 q，再分清谁推谁. 例如 $p\Rightarrow q$，且 $q\nRightarrow p$，则称 p 是 q 的充分不必要条件，q 是 p 的必要不充分条件.

【例 2】 在下列各题中，判断 A 是 B 的什么条件，并说明理由.

(1) A：$|p|\geqslant 2(p\in\mathbf{R})$，$B$：方程 $x^2+px+p+3=0$ 有实根；

(2) A：圆 $x^2+y^2=r^2$ 与直线 $ax+by+c=0$ 相切，B：$c^2=(a^2+b^2)r^2$.

解：(1) 当 $|p|\geqslant 2$ 时，例如 $p=3$，则方程 $x^2+3x+6=0$ 无实根，而方程 $x^2+px+p+3=0$ 有实根，必有 $p\leqslant -2$ 或 $p\geqslant 6$，可推出 $|p|\geqslant 2$，故 A 是 B 的必要不充分条件.

(2) 若圆 $x^2+y^2=r^2$ 与直线 $ax+by+c=0$ 相切，圆心到直线 $ax+by+c=0$ 的距离等于 r，即 $r=\dfrac{|c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$，所以 $c^2=(a^2+b^2)r^2$；反过来，若 $c^2=(a^2+b^2)r^2$，则 $\dfrac{|c|}{\sqrt{a^2+b^2}}=r$ 成立，说明 $x^2+y^2=r^2$ 的圆心 $(0,0)$ 到直线 $ax+by+c=0$ 的距离等于 r，即圆 $x^2+y^2=r^2$ 与直线 $ax+by+c=0$ 相切，故 A 是 B 的充分条件，也是 B 的必要条件.

启示：对于涉及充分、必要条件判断的问题，必须以准确、完整地理解充分、必要条件的概念为基础，有些问题需转化为等价命题后才容易判断.

课堂练习

1. 设原命题“若 p 则 q”假，而逆命题真，则 p

是 q 的(　　)

A. 充分不必要条件

B. 必要不充分条件

C. 充要条件

D. 既不充分也不必要条件

2. 设 $x\in\mathbf{R}$,则 $x>2$ 的一个必要不充分条件是(　　)

A. $x>1$　　B. $x<1$

C. $x>3$　　D. $x<3$

3. 如果 A 是 B 的必要不充分条件,B 是 C 的充分且必要条件,D 是 C 的充分不必要条件,那么 A 是 D 的(　　)

A. 必要不充分条件

B. 充分不必要条件

C. 充要条件

D. 既不充分也不必要条件

能力提高

一、选择题

1. 对任意实数 a、b、c,在下列命题中,真命题是(　　)

A. “$ac>bc$”是“$a>b$”的必要条件

B. “$ac=bc$”是“$a=b$”的必要条件

C. “$ac>bc$”是“$a>b$”的充分条件

D. “$ac=bc$”是“$a=b$”的充分条件

2. “$\cos\alpha=-\frac{\sqrt{3}}{2}$”是“$\alpha=2k\pi+\frac{5\pi}{6}(k\in\mathbf{Z})$”的(　　)

A. 必要非充分条件

B. 充分非必要条件

C. 充分且必要条件

D. 既不充分也不必要条件

3. $0<x<5$ 是不等式 $|x-2|<4$ 成立的(　　)

A. 充分不必要条件

B. 必要不充分条件

C. 充要条件

D. 既不充分也不必要条件

4. 若 $\neg A$ 是 B 的充分不必要条件,则 A 是 $\neg B$ 的(　　)

A. 充分不必要条件

B. 必要不充分条件

C. 必要条件

D. 既不充分又不必要条件

二、填空题

5. 设甲是乙的充分不必要条件,乙是丙的充要条件,丁是丙的必要不充分条件,那么甲是丁的________条件.

6. $a=-1$ 是直线 $ax+(2a-1)y+1=0$ 和直线 $3x+ay+3=0$ 垂直的________条件.

7. 已知 $p:|2x-3|>1$,$q:\frac{1}{x^2+x-6}>0$,则 $\neg p$ 是 $\neg q$ 的________条件.

三、解答题

8. 设 a、b、c、$d\in\mathbf{R}$,求证:$ac=2(b+d)$是方程 $x^2+ax+b=0$ 与方程 $x^2+cx+d=0$ 中至少有一个有实根的充分但不必要条件.

9. 已知:$p:|5x-2|\geqslant 3$,$q:\frac{1}{x^2+4x-5}\geqslant 0$,则 $\neg p$ 是 $\neg q$ 的什么条件?

10. 已知 a、b、c 均为实数,证明 $ac<0$ 是关于 x 的方程 $ax^2+bx+c=0$ 有一正根和一负根的充分且必要条件.

课后反思

学习本节内容,四种命题的形式是基础,因为条件的充分性和必要性和命题的四种形式有着密切的联系.在处理充分、必要条件问题时,首先应分清条件和结论,然后才能进行推理和判断.

1.2.2 充要条件

自学导引

一、学习目标

理解充要条件的意义,会判断命题的条件是否为充要条件.

二、了解新知

1. 如果既有 $p\Rightarrow q$ 又有 $q\Rightarrow p$,就记作 $p\Leftrightarrow q$.此时,我们说,p 是 q 的________条件,简称________条件(sufficient and necessary condition).

2. 如果 p 是 q 的充要条件,那么 q 是 p 的________条件.

例题选讲

【例 1】 已知 $ab\neq 0$,求证:$a+b=1$ 的充要条件是 $a^3+b^3+ab-a^2-b^2=0$.

证明:先证必要性成立:

$\because$ $a+b=1$,即 $b=1-a$,

$\therefore$ $a^3+b^3+ab-a^2-b^2$

$=a^3+(1-a)^3+a(1-a)-a^2-(1-a)^2$

$=a^3+1-3a+3a^2-a^3+a-a^2-a^2-1+2a-a^2$

$=0$.

再证充分性成立:

$\because$ $a^3+b^3+ab-a^2-b^2=0$,

即 $(a+b)(a^2-ab+b^2)-(a^2-ab+b^2)=0$.

$\therefore$ $(a+b-1)(a^2-ab+b^2)=0$.

由 $ab\neq 0$,即 $a\neq 0$ 且 $b\neq 0$,

$\therefore$ $a^2-ab+b^2=(a-\frac{b}{2})^2+\frac{3b^2}{4}\neq 0$,

$\therefore$必有 $a+b=1$.

综上可知,当 $ab\neq 0$,$a+b=1$ 的充要条件是 $a^3+b^3+ab-a^2-b^2=0$.

启示:证明充要条件,首先要分清必要性、充分性分别是什么命题,再证明原命题和逆命题都成立.

【例 2】 已知关于 x 的方程 $(1-a)x^2+(a+2)x-4=0$,$a\in\mathbf{R}$,求方程有两个正根的充要条件.

解:方程 $(1-a)x^2+(a+2)x-4=0$ 有两个实根的充要条件是 $\begin{cases}1-a\neq 0,\\ \Delta\geqslant 0,\end{cases}$

即 $\begin{cases}a\neq 1,\\ (a+2)^2+16(1-a)\geqslant 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a\neq 1,\\ a\leqslant 2 \text{ 或 } a\geqslant 10,\end{cases}$

即 $a\geqslant 10$ 或 $a\leqslant 2$ 且 $a\neq 1$.

设此时方程的两实根为 x_1,x_2,有两个正根的充要条件是 $\begin{cases}a\neq 1,\\ a\leqslant 2 \text{ 或 } a\geqslant 10,\\ x_1+x_2>0,\\ x_1\cdot x_2>0,\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a\neq 1,\\ a\leqslant 2 \text{ 或 } a\geqslant 10,\\ \frac{a+2}{a-1}>0,\\ \frac{4}{a-1}>0,\end{cases}$

即 $1<a\leqslant 2$ 或 $a\geqslant 10$ 是方程有两个正根的充要条件.

启示:探求或证明充要条件命题时,一般应从充分性与必要性两方面验证,但有时在证明过程中若能保持每步之间的等价性,则可不分开论证.

课堂练习

1. $x^2+(y-2)^2=0$ 是 $x(y-2)=0$ 的(　　)

A. 必要不充分条件

B. 充分不必要条件

C. 充要条件

D. 既不充分也不必要条件

2. 下列说法不正确的是(　　)

① $x^2\neq 1$ 是 $x\neq 1$ 的必要条件;

② $x>5$ 是 $x>4$ 的充分不必要条件;

③ $xy=0$ 是 $x=0$ 且 $y=0$ 的充要条件;

④ $x^2<4$ 是 $x<2$ 的充分不必要条件.

A. ①②　　　　B. ③④

C. ①③　　　　D. ②④

3. 设集合 $U=\{(x,y)|x\in\mathbf{R},y\in\mathbf{R}\}$,$A=\{(x,y)|2x-y+m>0\}$,$B=\{(x,y)|x+y-n\leqslant 0\}$,那么点 $P(2,3)\in A\cap(\complement_U B)$的充要条件是(　　)

A. $m>-1,n<5$　　　　B. $m<-1,n<5$

C. $m>-1,n>5$　　　　D. $m<-1,n>5$

能力提高

一、选择题

1. 在如图 1-2-1 电路图中,"开关 A 的闭合"是"灯泡 B 亮"的(　　)

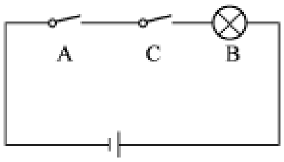

图 1-2-1

A. 充分非必要条件

B. 必要非充分条件

C. 充要条件

D. 既非充分又非必要条件

2. 函数 $f(x)=x|x+a|+b$ 是奇函数的既充分又必要的条件是(　　)

A. $ab=0$　　　　B. $a+b=0$

C. $a=b$　　　　D. $a^2+b^2=0$

3. 函数 $y=x^2+bx+c(x\in[0,+\infty))$ 是单调函数的充分且必要条件是(　　)

A. $b\geqslant 0$　　　　B. $b\leqslant 0$

C. $b>0$　　　　D. $b<0$

4. 在$\triangle ABC$中,条件甲:$A<B$,条件乙:$\cos^2 A>\cos^2 B$,则甲是乙的(　　)

A. 充分非必要条件

B. 必要非充分条件

C. 充要条件

D. 既非充分又非必要条件

二、填空题

5. 已知两条直线 l_1:$ax+by+c=0$,直线 l_2:$mx+ny+p=0$,则 $an=bm$ 是直线 $l_1\parallel l_2$ 的________条件.

6. 已知数列$\{a_n\}$的前 n 项和 $S_n=p^n+q(p\neq 0,p\neq 1)$,使数列$\{a_n\}$是等比数列的充要条件是____________.

7. 命题 p:$x>0,y<0$;命题 q:$x>y,\frac{1}{x}>\frac{1}{y}$;则 p 是 q 的________条件.

三、解答题

8. 求证:关于 x 的方程 $ax^2+bx+c=0$ 有一根为 1 的充要条件是 $a+b+c=0$.

9. 试寻求使二次函数 $f(x)=ax^2+bx+c$ 为偶函数的充要条件,并加以证明.

10. 对于实数 a、b,$|a|<1$ 且 $|b|<1$ 是 $\frac{|a+b|}{|1+ab|}<1$ 的什么条件?

课后反思

学习本节内容,四种命题的形式是基础,因为条件的充分性和必要性与命题的四种形式有着密切的联系.对于判断充要条件的问题,有如下三种办法:

(1) 定义法:① 分清条件和结论:分清哪个是条件,哪个是结论;② 找推式:判断"$p\Rightarrow q$"及"$q\Rightarrow p$"的真假;③ 下结论:根据推式及定义下结论.

(2) 等价法:将命题转化为另一个等价的又便于判断真假的命题.

(3) 集合法:写出集合 $A=\{x|p(x)\}$ 及 $B=\{x|q(x)\}$,利用集合之间的包含关系加以判断.

此为试读,需要完整PDF请访问: www.ertongbook.com

1.3 简单的逻辑联结词

1.3.1 且 (and)

自学导引

一、学习目标

通过数学实例，了解逻辑联结词“且”的含义，能正确表述相关内容.

二、了解新知

1. 用逻辑联结词“且”把命题 p 和命题 q 联结起来，就得到一个新命题，记作______，读作“p 且 q”.

2. 当 p,q 都为________命题时，$p\wedge q$ 就为真命题；当 p,q 两个命题中只要有一个命题为________命题时，$p\wedge q$ 就为假命题.

例题选讲

【例1】 分别写出下列各组命题构成的“$p\wedge q$”命题.

(1) p:$\sqrt{2}$是有理数，q:$\sqrt{2}$是无理数

(2) p:正方形的四条边相等，q:正方形的四个角相等.

(3) p:函数 $y=f(x)$是奇函数，q:函数 $y=f(x)$是偶函数.

(4) p:正项等比数列的公比是正数，q:正项等比数列的前 n 项和是正数.

解：用逻辑联结词“且”将命题 p,q 联结起来构成“$p\wedge q$”命题.

(1) $p\wedge q$:$\sqrt{2}$是有理数且是无理数.

(2) $p\wedge q$:正方形的四条边相等且四个角相等.

(3) $p\wedge q$:函数 $y=f(x)$是奇函数且是偶函数.

(4) $p\wedge q$:正项等比数列的公比是正数且前 n 项和是正数.

> **启示**：不含逻辑联结词的命题是简单命题，简单命题与逻辑联结词构成的命题是复合命题.在书写由命题 p、q 构成的“$p\wedge q$”命题时，要注意与日常语言习惯相符.

【例2】 指出下列各组命题构成的“$p\wedge q$”形式的命题真假.

(1) p:$0\notin\mathbf{N}$，q:$\varnothing\subseteq\{0\}$.

(2) p:4 是合数，q:26 能被 3 整除.

(3) p:不等式 $x^2+2x+2>1$ 的解集为 R；q:不等式 $x^2+2x+2\leqslant1$ 的解集为$\varnothing$.

(4) p:$y=\log_2 x$ 是单调函数，q:$y=\log_2 x$ 是递增函数.

分析：欲确定“$p\wedge q$”形式命题的真假，首先要确定 p 和 q 的真假.

解：(1) $\because p$ 假，q 真，$\therefore$“$p\wedge q$”为假.

(2) $\because p$ 真，q 假，$\therefore$“$p\wedge q$”为假.

(3) $\because p$ 假，q 假，$\therefore$“$p\wedge q$”为假.

(4) $\because p$ 真，q 真，$\therefore$“$p\wedge q$”为真.

课堂练习

1. p:今天下雨，q:今天刮风；则“p 且 q”的复合命题形式为____________.

2. 写出命题“p:3 是 9 的约数，q:3 是 18 的约数”构成的“$p\wedge q$”形式的复合命题，并判断其真假.

能力提高

1. 以下判断中正确的是( )

A. 命题 p 是真命题时，命题“p 且 q”一定是真命题

B. 命题“p 且 q”是真命题时，命题 p 一定是真命题

C. 命题“p 且 q”是假命题时，命题 p 一定是假命题

D. 命题 p 是假命题时，命题“p 且 q”不一定是假命题

2. 命题 p:函数 $y=x^3$ 是奇函数；命题 q:函数 $y=x^3$ 是减函数；命题 $p\wedge q$:____________，其真假性为____________.

3. 命题 p:三角形三条中线相等;命题 q:三角形三条中线交于一点;命题 $p\wedge q$:__________. 其真假性为__________.

4. 命题 p:2 是质数;命题 q:2 是偶数;命题 $p\wedge q$:________,其真假性为________.

5. 对于命题 p,q 及 $p\wedge q$ 填写下表.

p	q	$p\wedge q$
真	真	
真	假	
假	真	
假	假	

课后反思

只有 p,q 同时为真时,$p\wedge q$ 才为真;p,q 至少有一个为假时,$p\wedge q$ 为假. 反之,如果 $p\wedge q$ 为假,则 p,q 中至少一个为假,如果 $p\wedge q$ 为真,则 p,q 同时为真.

1.3.2 或 (or)

自学导引

一、学习目标

通过数学实例,了解逻辑联结词"或"的含义,能正确表述相关的内容.

二、了解新知

1. 用逻辑联结词"或"把命题 p 和命题 q 联结起来,就得到一个新命题,记作______,读作"p 或 q".

2. 当 p,q 两个命题中,只要有一个命题为__________命题时,$p\vee q$ 就为真命题,当 p,q 两个命题都为假命题时,$p\vee q$ 就为__________命题.

例题选讲

【例 1】 判断下列复合命题的真假:

(1) 等腰三角形顶角的平分线平分底边并且垂直于底边;

(2) $x=\pm1$ 是方程 $x^2+3x+2=0$ 的根;

解:(1) 这个命题是"p 且 q"的形式,其中 p:等腰三角形顶角的平分线平分底边,q:等腰三角形顶角的平分线垂直于底边. 因为 p 真 q 真,则"p 且 q"为真,所以该命题是真命题.

(2) 这个命题是"p 或 q"的形式,其中 p:1 是方程 $x^2+3x+2=0$ 的根,q:-1 是方程 $x^2+3x+2=0$ 的根. 因为 p 假 q 真,则"p 或 q"为真,所以该命题是真命题.

启示:为了正确判断复合命题的真假,首先要确定复合命题的构成形式,然后指出其中简单命题的真假,再判断这个复合命题的真假.

【例 2】 已知 p:方程 $x^2+mx+1=0$ 有两个不等的负根;q:方程 $4x^2+4(m-2)x+1=0$ 无实根. 若 p 或 q 为真,p 且 q 为假,求 m 的取值范围.

解:若方程 $x^2+mx+1=0$ 有两不等的负根,则

$\begin{cases}\Delta=m^2-4>0,\\ m>0,\end{cases}$ 解得 $m>2$,即 p:$m>2$.

若方程 $4x^2+4(m-2)x+1=0$ 无实根,

则 $\Delta=16(m-2)^2-16=16(m^2-4m+3)<0$

解得 $1<m<3$,即 q:$1<m<3$.

因 p 或 q 为真,所以 p、q 至少有一为真,又 p 且 q 为假,所以 p、q 至少有一为假,因此,p、q 两命题应一真一假,即 p 为真,q 为假或 p 为假,q 为真.

$\therefore \begin{cases}m>2,\\ m\leqslant1 \quad 或\ m\geqslant3\end{cases}$

或 $\begin{cases}m\leqslant2,\\ 1<m<3.\end{cases}$

解得 $m\geqslant3$ 或 $1<m\leqslant2$.

启示:解决含有逻辑联结词的问题,一是要熟练掌握判定复合命题真假的方法,二是要注意它与方程、不等式、集合等知识的联系.

课堂练习

1. 命题"平行四边形的对角线相等且互相平分"是(　　)

A. 没有逻辑联结词的命题

B. "p 或 q"形式的命题

C. "p 且 q"形式的命题

D. "非 p"形式的命题

2. 命题"$x=\pm3$ 是方程 $|x|=3$ 的解"中(　　)

A. 没有使用任何一种逻辑联结词

B. 使用了逻辑联结词"非"

C. 使用了逻辑联结词"或"

D. 使用了逻辑联结词"且"

3. 设 p、q 是两个命题,则"复合命题 p 或 q 为

真，p 且 q 为假”的充要条件是(　　)

A. p、q 中至少有一个为真

B. p、q 中至少有一个为假

C. p、q 中有且只有一个为真

D. p 为真，q 为假

能力提高

一、选择题

1. “$3\geqslant 0$”是哪种形式的命题(　　)

A. p 或 q　　B. p 且 q

C. 非 p　　D. 简单

2. 以下四个命题中，正确的结论有(　　)

①“矩形既是平行四边形又是圆的内接四边形”是“p 且 q”的形式，该命题是真命题　②“菱形既是平行四边形又是圆的外切四边形”是“p 且 q”的形式，该命题是真命题　③“矩形是圆的内接四边形或是圆的外切四边形”是“p 或 q”的形式，该命题是真命题　④“菱形是圆的内接四边形或是圆的外切四边形”是“p 或 q”的形式，该命题是真命题

A. 1个　　B. 2个

C. 3个　　D. 4个

3. 已知命题 p：$\varnothing\subseteq\{0\}$，$q$：$\{1\}\in\{1,2\}$，由它们构成的“$p$ 或 q”、“p 且 q”形式的复合命题中，真命题有(　　)

A. 0个　　B. 1个

C. 2个　　D. 无法确定

4. 已知命题 p：点 P 在直线 $y=2x-3$ 上；命题 q：点 P 在直线 $y=-3x+2$ 上，则使命题“p 且 q”为真命题的一个点 $P(x,y)$是(　　)

A. $(0,-3)$　　B. $(1,2)$

C. $(1,-1)$　　D. $(-1,1)$

二、填空题

5. 用“或”“且”填空.

(1) 若 $x\in A\cup B$，则 $x\in A$ ________ $x\in B$.

(2) 若 $x\in A\cap B$，则 $x\in A$ ________ $x\in B$.

(3) 若 $ab=0$，则 $a=0$ ________ $b=0$.

(4) 若 $a^2+b^2=0$，则 $a=0$ ________ $b=0$.

6. 若把命题“$A\subseteq B$”看成一个复合命题，那么复合命题的形式是________，其中构成它的两个简单命题分别是__________.

7. “p 且 q 是假命题”是“p 或 q 为真命题”的__________条件.

三、解答题

8. 分别指出由下列各组命题构成的“p 或 q”“p 且 q”形式的命题的真假.

(1) p：$3+4=7$，q：$5<4$；

(2) p：9是质数，q：8是12的约数；

(3) p：$1\in\{1,2\}$，q：$\varnothing\subsetneqq\{1,2\}$；

(4) p：$\varnothing=\{0\}$，q：$\varnothing\subseteq\varnothing$.

9. 命题 p：函数 $f(x)=\lg(ax^2-x+\frac{1}{16}a)$的定义域为 $\mathbf{R}$；命题 q：不等式 $\sqrt{2x+1}<1+ax$ 对一切正实数均成立. 如果命题 p 或 q 为真命题，命题 p 且 q 为假命题，求实数 a 的取值范围.

10. 已知 $c>0$，设 p：函数 $y=c^x$ 在 $\mathbf{R}$ 上递减；q：不等式 $x+|x-2c|>1$ 的解集为 $\mathbf{R}$，如果“p 或 q”为真，且“p 且 q”为假，求 c 的范围.

课后反思

p	q	$p\vee q$
真	真	真
真	假	真
假	真	真
假	假	假

(1) 上表是判断命题 $p\vee q$ 真假的基本依据,从表中我们可以看到:只有当命题 p,q 同假时,$p\vee q$ 才为假,如果 p,q 中至少有一个为真,则 $p\vee q$ 为真.

(2) 反过来,如果 $p\vee q$ 为真,则 p,q 中至少有一个为真;如果 $p\vee q$ 为假,则 p,q 同为假.

1.3.3 非 (not)

自学导引

一、学习目标

通过数学实例,了解逻辑联结词“非”的含义,能正确表述相关的内容.

二、了解新知

1. 对一个命题 p 全盘否定,就得到一个新命题,记作________,读作“非 p”或“p 的否定”.

2. 若 p 为真命题,则 $\neg p$ 必为________命题,若 p 为假命题,则 $\neg p$ 必为________命题

例题选讲

【例 1】 写出下列各命题的非(否定).

(1) p:$a=0$;

(2) q:$b=0$;

(3) $p\wedge q$:$(a=0)\wedge(b=0)$;

(4) $p\vee q$:$(a=0)\vee(b=0)$.

解:(1) $\neg p$:$a\neq 0$.

(2) $\neg q$:$b\neq 0$.

(3) 命题 $p\wedge q$:$(a=0)\wedge(b=0)$ 成立,要求 $a=0$ 和 $b=0$ 同时成立;而否定这一命题,就是要求 $a=0$,$b=0$ 不能同时成立,这正是另外三种情形:$a=0$ 且 $b\neq 0$,$a\neq 0$ 且 $b=0$,$a\neq 0$ 且 $b\neq 0$ 成立.但这三种情形正好又可以概括为命题:a、b 至少有一个不等于 0,即$(a\neq 0)\vee(b\neq 0)$成立.因此,$p\wedge q$ 的否定是 $\neg(p\wedge q)$:$(a\neq 0)\vee(b\neq 0)$.

(4) 类似地可以分析得出 $\neg(p\vee q)$:$(a\neq 0)\wedge(b\neq 0)$.

> **启示**:通过上例可以发现以下关系:
> $\neg(p\wedge q)=(\neg p)\vee(\neg q)$;
> $\neg(p\vee q)=(\neg p)\wedge(\neg q)$.
> 这两个关系式对任何命题都是成立的,逻辑上通常称为德·摩根定律.

【例 2】 写出下列命题的否定和否命题:

(1) 面积相等的三角形是全等三角形;

(2) 自然数的平方是正数.

解:(1) 命题的否定:面积相等的三角形不是全等三角形;

否命题:面积不相等的三角形不是全等三角形.

(2) 命题的否定:自然数的平方不是正数;

否命题:某些自然数的平方不是正数.

> **启示**:“命题的否定”和“否命题”是两个不同的概念,要注意区分,命题 p 的否定为非 p,它只否定命题 p 的结论;而否命题既否定原命题结论,又否定原命题的条件.

课堂练习

1. 若命题“p 且 q”为假,且“非 p”为假,则( )

A. p 或 q 为假　　B. q 假

C. q 真　　D. 不能判断 q 的真假

2. 如果命题“非 p 或非 q”是假命题,则在下列各结论中,正确的为( )

① 命题“p 且 q”是真命题;② 命题“p 且 q”是假命题;③ 命题“p 或 q”是真命题;④ 命题“p 或 q”是假命题.

A. ①③　　B. ②④

C. ②③　　D. ①④

3. 设 A、B 是全集 U 的子集,命题 p 为“$3\in A\cap B$”,则命题“非 p”为( )

A. $3\in(\complement_U A)\cup(\complement_U B)$

B. $3\in(\complement_U A)\cap(\complement_U B)$

C. $3\in A\cup B$

D. $3\notin A\cup B$

能力提高

一、选择题

1. 已知全集 $S=\mathbf{R}$,$A\subseteq S$,$B\subseteq S$,若命题 p:$\sqrt{2}\in A\cup B$,则命题“非 p”是( )

A. $\sqrt{2}\notin A$　　B. $\sqrt{2}\in\complement_S B$

C. $\sqrt{2}\notin A\cap B$　　D. $\sqrt{2}\in(\complement_S A)\cap(\complement_S B)$

2. 对命题 p:$A\cap\varnothing=\varnothing$,$q$:$A\cup\varnothing=A$,下列说法正确的是( )

A. “p 且 q”为假　　B. “p 或 q”为假

C. “非 p”为真　　D. “非 q”为假

3. 已知命题 p：若 $a\in A$，则 $b\notin B$，那么命题 $\neg p$ 是(　　)

A. 若 $a\notin A$，则 $b\notin B$　B. 若 $a\notin A$，则 $b\in B$

C. 若 $a\in A$，则 $b\in B$　D. 若 $a\in A$，则 $b\notin B$

4. 若命题 p：0 是偶数，命题 q：2 是 3 的约数，则下列命题中为真的是(　　)

A. $p\wedge q$　　B. $p\vee q$

C. $\neg p$　　D. $\neg p\wedge\neg q$

二、填空题

5. 分别用“p 或 q”、“p 且 q”、“非 p”填空：

(1) 命题“$\sqrt{3}$的值不超过 2”是________形式；

(2) 命题“方程 $(x-2)(x-3)=0$ 的解是 $x=2$ 或 $x=3$”是________形式；

(3) 命题“方程 $(x-2)^2+(y-3)^2=0$ 的解是 $\begin{cases}x=2\\y=3\end{cases}$”是________形式.

6. “$a\geqslant5$，且 $b\geqslant2$”的否定是____________.

7. (1)“p 且 q 是真命题”是“p 或 q 为真命题”的________________条件；

(2)“非 p 是真命题”是“p 或 q 为真命题”的________________条件；

(3)“p 或 q 为假命题”是“非 p 为真命题”的________________条件.

三、解答题

8. 指出下列复合命题的构成形式及构成它的简单命题：

(1) 梯形的中位线平行于两底并等于两底和的一半；

(2) 点 A 或点 B 在直线 a 上；

(3) $\sqrt{3}$不超过 2.

9. 某足球队队员的全体构成集合 A，写出下列命题的非：

(1) p：A 中的队员至少有一个是北京人；

(2) q：A 中的队员都是北京人；

(3) r：A 中的队员都不是北京人；

(4) s：A 中的队员不都是北京人.

10. 已知命题 p：$|x^2-x|\geqslant6$，q：$x\in\mathbf{Z}$，且“p 且 q”与“非 q”同时为假命题，求 x 的值.

课后反思

“非”的含义有以下四条：①“非 p”只否定 p 的结论；② p与“非 p”真假必须相反；③“非 p”必须包含 p 的所有对立面；④“非 p”必须使用否定词语.

写出命题的非(否定)，需要对其正面叙述的词语进行否定，常用正面叙述词语及它的否定列举如下：

正面词语	等于	大于($>$)	小于($<$)	是	都是	p 或 q
否定	不等于	不大于($\leqslant$)	不小于($\geqslant$)	不是	不都是	非 p 且非 q

正面词语	至多有一个	至少有一个	任意的	所有的	至多有 n 个	任意两个	p 且 q
否定	至少有两个	一个也没有	某个	某些	至少有 $n+1$ 个	某两个	非 p 或非 q

1.4 全称量词与存在量词

1.4.1 全称量词

自学导引

一、学习目标

通过生活和数学中的实例，理解全称量词的意义及全称命题的定义，能判断全称命题的真假.

二、了解新知

1. 短语"对所有的""对任意一个"在逻辑中通常叫作__________(universal quantifier)，用符号"__________"表示，含有全称量词的命题，叫作________.

2. 将含有变量 x 的语句用 $p(x)$，$q(x)$，$r(x)$，…表示，变量 x 的范围用 M 表示，那么全称命题"对 M 中任意一个 x，有 $p(x)$ 成立"可用符号简记为________，读作"对任意 x 属于 M，有 $p(x)$ 成立".

例题选讲

【例 1】 判断下列全称命题的真假？

(1) 若对所有的正实数 x，不等式 $m\leqslant x+\frac{1}{x}$ 都成立，则 $m\leqslant 2$；

(2) 如果对任意的正整数 n，数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 $S_n=an^2+bn$（a、b 为常数），那么数列 $\{a_n\}$ 为等差数列.

解：(1) ∵ x 为正实数，

∴ $x+\frac{1}{x}\geqslant 2\sqrt{x\cdot\frac{1}{x}}=2$（当且仅当 $x=1$ 时"="成立）

即 $x+\frac{1}{x}$ 的最小值为 2，

而 $m\leqslant 2$.

∴ 对所有的正实数 x，不等式 $m\leqslant x+\frac{1}{x}$ 成立，这个全称命题是真命题.

(2) ∵ $S_n=an^2+bn$，

∴ $a_1=a+b$，

当 $n\geqslant 2$ 时，$a_n=S_n-S_{n-1}=an^2+bn-a(n-1)^2-b(n-1)$

$=2an+b-a$.

∴ $a_n=2an+b-a(n\in\mathbf{N}^*)$.

∴ 数列 $\{a_n\}$ 为等差数列.

即这个全称命题为真命题.

> **启示**：要判定全称命题"$\forall x\in M$，$p(x)$"是真命题需要对集合 M 中的每个元素 x，证明 $p(x)$ 成立.

【例 2】 用全称量词表示下列词句.

(1) 抛物线与 x 轴都有两个交点.

(2) 三角函数都是周期函数.

(3) 菱形的对角线垂直且互相平分.

(4) $x^2+x+1>0$.

分析：根据命题的实际的含义选择合适的全称量词.

解：(1) 所有的抛物线与 x 轴都有两个交点.

(2) 一切的三角函数都是周期函数.

(3) 任何菱形的对角线垂直且互相平分.

(4) 对于任意实数 x，都有 $x^2+x+1>0$.

> **启示**：短语"所有""一切""任意""每一"等都是全称量词，在用全称量词表示这些语句的时候，可以根据语言习惯合理选用.

课堂练习

1. 下列全称命题中是真命题的个数是(　　)

① 所有偶数都能被 2 整除

② 所有的奇数都能被 3 整除

③ 任意实数的平方都不小于零

A. 0　　　　B. 1

C. 2　　　　D. 3

2. 全称命题"$\forall x\in\mathbf{Z}$，$2x+1$ 是整数"的逆命题是(　　)

A. 若 $2x+1$ 是整数，则 $x\in\mathbf{Z}$

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com