

本书编写组编

新课标
中考总复习
我帮你
数学

华东师范大学出版社

目 录

第一部分 基础篇

- 第一章 数与式 / 1
 - 第 1 单元 实数 / 1
 - 第 2 单元 实数的运算 / 6
 - 第 3 单元 代数式 / 9
 - 第 4 单元 整式与分式 / 12
- 第二章 方程与不等式 / 16
 - 第 5 单元 方程与方程组 / 16
 - 第 6 单元 不等式与不等式组 / 31
- 第三章 函数及其图象 / 36
 - 第 7 单元 函数及其图象 / 36
 - 第 8 单元 一次函数 / 41
 - 第 9 单元 反比例函数 / 47
 - 第 10 单元 二次函数 / 56
- 第四章 相交线、平行线、三角形 / 64
 - 第 11 单元 丰富的图形世界 / 64
 - 第 12 单元 平面基本图形及其位置关系 / 70
 - 第 13 单元 三角形 / 76
 - 第 14 单元 图形的相似 / 81
- 第五章 图形变换、四边形 / 86
 - 第 15 单元 多边形的内角和、外角和及平面图形的密铺 / 86
 - 第 16 单元 平移、旋转、轴对称 / 90
 - 第 17 单元 四边形 / 95
 - 第 18 单元 尺规作图 / 104
 - 第 19 单元 投影 / 107
- 第六章 直角三角形的边角关系 / 112
 - 第 20 单元 锐角三角函数 / 112
 - 第 21 单元 解直角三角形及其应用 / 116
- 第七章 圆 / 121
 - 第 22 单元 与圆有关的概念和性质 / 121

- 第 23 单元 与圆有关的位置关系 / 126
- 第 24 单元 与圆有关的计算 / 132
- 第 25 单元 命题与证明 / 135
- 第八章 统计与概率 / 139
 - 第 26 单元 统计与概率 / 139

第二部分 专题篇

- 一、热点题型专题 / 147
 - 专题一:操作探究题型 / 147
 - 专题二:方案设计题型 / 151
 - 专题三:运动变换题型 / 154
 - 专题四:归纳猜想题型 / 159
 - 专题五:开放探究题型 / 162
 - 专题六:图表信息题型 / 166
 - 专题七:阅读理解题型 / 172
- 二、基本的数学思想方法专题 / 177
 - 专题一:数形结合思想 / 177
 - 专题二:分类讨论思想 / 183
 - 专题三:转化思想 / 188
 - 专题四:整体思想 / 191
 - 专题五:建模思想 / 195

第三部分 测试篇

- 数与式达标测试卷 / 活页
- 方程与不等式达标测试卷 / 活页
- 函数及其图象达标测试卷 / 活页
- 相交线、平行线、三角形和图形变换、四边形达标测试卷 / 活页
- 直角三角形的边角关系达标测试卷 / 活页
- 圆达标测试卷 / 活页
- 统计与概率达标测试卷 / 活页
- 中考模拟试卷(一) / 活页
- 中考模拟试卷(二) / 活页
- 中考模拟试卷(三) / 活页
- 中考模拟试卷(四) / 活页

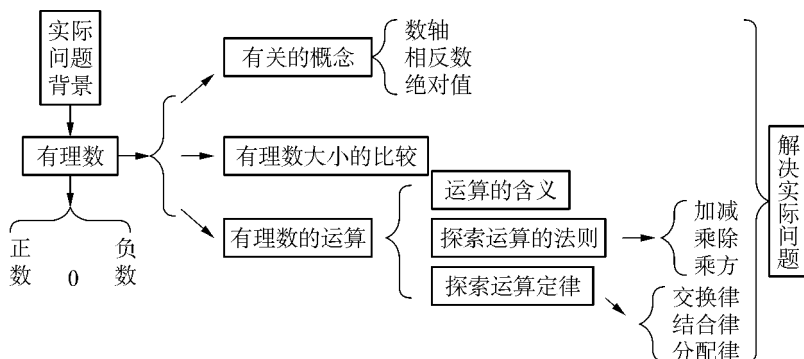
第一章 数与式

第1单元 实数

1. 有理数

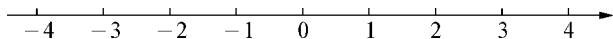
【知识梳理】

1. 知识结构:



2. 有理数: 整数与分数统称为有理数. (任何一个有理数都可写成有限小数或无限循环小数的形式, 即任何有限小数和无限循环小数都是有理数)

3. 数轴: 规定了原点、正方向、单位长度的直线. (水平直线、向右为正方向、单位长度要均匀; 每一个有理数都可以在数轴上找一个点来表示, 数轴上两个点表示的数, 右边的总比左边的大; 正数大于0, 负数小于0, 正数大于负数)



4. 相反数: 如果两个数只是符号不同, 那么这两个数互为相反数. (一般地 a 的相反数是 $-a$, 特别地, 0 的相反数是 0)

5. 绝对值: 在数轴上, 一个数所对应的点与原点的距离叫做该数的绝对值. (正数的绝对值是它本身, 负数的绝对值是它的相反数, 0 的绝对值是 0; 特别注意: 绝对值的非负性; 两个负数, 绝对值大的反而小)

6. 倒数: 乘积为 1 的两个有理数互为倒数.

7. 有理数加法法则: 同号两数相加, 取相同的符号, 并把绝对值相加. 异号两数相加, 绝对值相等时和为 0, 绝对值不等时, 取绝对值较大的数的符号, 并用较大的绝对值减去较小的绝对值. 一个数同 0 相加, 仍得这个数.

8. 有理数减法法则: 减去一个数, 等于加上这个数的相反数.

9. 有理数乘法法则: 两数相乘, 同号得正, 异号得负, 绝对值相乘. 任何数与 0 相乘, 积仍为 0.

10. 有理数除法法则:两数相除,同号得正,异号得负,并把绝对值相除.(除以一个数等于乘以这个数的倒数)

11. 乘方:求几个相同因数的积的运算.(乘方的结果是幂,注意什么是底数和指数)

12. 有理数混合运算:先算乘方,再算乘除,最后算加减;如果有括号,先算括号里面的.

【教你几招】

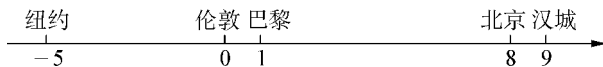
例1 2008年8月8日第29届奥运会在北京开幕,5个城市的国标准时间(单位:时)在数轴上表示如图所示,那么北京时间2008年8月8日20时是().

A. 伦敦时间2008年8月8日11时

B. 巴黎时间2008年8月8日13时

C. 纽约时间2008年8月8日5时

D. 汉城时间2008年8月8日19时



例1图

答案 B

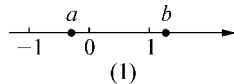
评析 这道题主要从实际问题出发考查数轴的应用.

例2 有理数 a 、 b 在数轴上的位置如图(1),将 a 、 $-a$ 、 b 、 $-b$ 、 1 、 -1 ,用“ $<$ ”号排列出来.

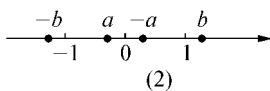
分析 由图(1)可看出, $b > 1$, $-1 < a < 0$, $|a| < 1 < |b|$, $-a$ 、 $-b$ 分别是 a 和 b 的相反数,数轴上表示 a 和 $-a$ 、 b 和 $-b$ 的点都是关于原点对称,它们到原点的距离分别相等,用这些性质在数轴上画出表示 $-a$ 和 $-b$ 点,它们的大小也就自然排列出来.

解 如图(2),在数轴上画出 $-a$ 、 $-b$ 的点,由图可以看出:

$$-b < -1 < a < -a < 1 < b.$$



(1)



(2)

例2图

例3 我们平时最常用的数是十进制数,如 $2742 = 2 \times 10^3 + 7 \times 10^2 + 4 \times 10^1 + 2 \times 10^0$,表示十进制的数要用10个数码(又叫数字):0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. 在电脑中用的是二进制,只有两个数码:0和1. 在二进制中 $101 = 1 \times 2^2 + 0 \times 2^1 + 1 \times 2^0$,表示十进制的数5; $10111 = 1 \times 2^4 + 0 \times 2^3 + 1 \times 2^2 + 1 \times 2^1 + 1 \times 2^0$,表示十进制数23;则二进制中的1101等于十进制的数_____.

答案 13

评析 通过对二进制数的理解考查学生的阅读理解能力.

【自我评介】

一、选择题

1. 若 $|a| = -a$,则 a 一定是().

A. 正数

B. 负数

C. 非正数

D. 非负数

2. 下面计算中正确的是().

A. $-2 \div 0 = 0$

B. $(-3) \div (-\frac{1}{3}) = 9$

C. $(-1)^3 = -3$

D. $-1^2 \times (-5) = -5$

3. 下列说法中正确的是().

- A. 任何正数大于它的倒数 B. 任何小于 1 的数都大于它的平方
 C. 如果一个数的绝对值等于它本身,那么这个数一定是正数
 D. 如果一个正数大于它的平方,那么这个数一定小于 1

二、填空题

4. 如果把收入 210 元记作 +210 元,那么付出 80 元记作 _____.
5. $|\pi - 3.14| =$ _____; $|3.14 - \pi| =$ _____.
6. -3 的相反数是 _____; 倒数是 _____; 绝对值是 _____.
7. 已知有理数 x, y, z 满足 $|x-1| + |2y-4| + |z+5| = 0$, 则 $xyz =$ _____.
8. 用“>”或“=”或“<”填空:
 $-(-13)$ _____ $-[-(-14)]$; $-(-3\frac{2}{3})$ _____ $-|-4\frac{1}{4}|$.
9. 在数轴上表示 +2 的点在原点的 _____ 侧, 距原点的距离是 _____ 个单位; 表示 -3 的点在原点的 _____ 侧, 它距离原点的距离是 _____ 个单位; 表示 +2 的点位于表示 -3 的点的 _____ 侧, 根据 _____, 可得 $-3 < +2$.

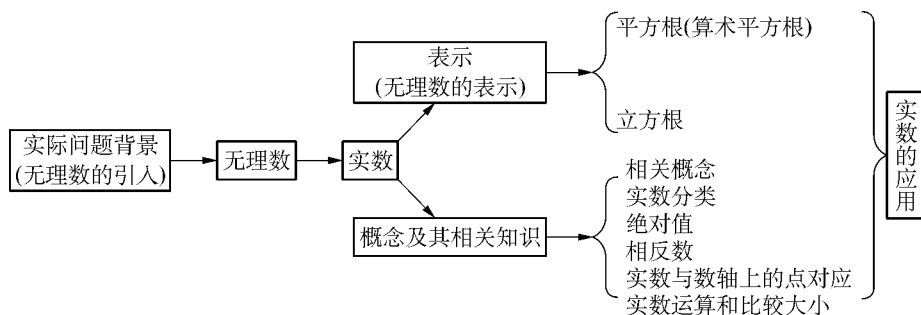
三、综合题

10. 画一条数轴, 并在你所画的数轴上表示下列各数:
 -3 的倒数, 0, 1.5 的绝对值, $2\frac{1}{2}$ 的相反数, -4.
11. 某天上午, 出租车司机小陈营运全是在南北走向的中山大道上, 如果规定向南为正, 向北为负, 他这天上午行车里程(单位: 千米)如下:
 $+3, +10, -5, +6, -4, -3, +12, -8, -6, +7, -21$.
- (1) 求收工时小陈距离上午出车时的出发点多远?
 (2) 若汽车耗油量为 0.1 L/km, 这天上午小陈共耗油多少升?

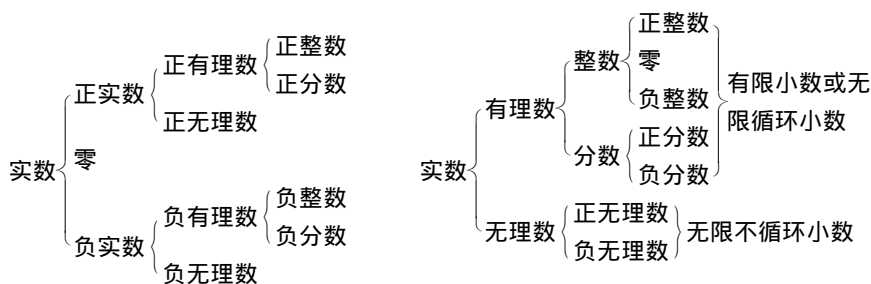
2. 实 数

【知识梳理】

1. 知识结构:



2. 无理数:无限不循环小数.(如: π , $0.585\ 885\ 888\ 588\ 885\dots$, $\sqrt{2}$ 等)
3. 平方根:如果一个数 x 的平方等于 a ,即 $x^2 = a$,那么这个数 x 叫做 a 的平方根(也叫二次方根). [算术平方根:如果一个正数 x 的平方等于 a ,即 $x^2 = a$,那么这个正数 x 叫做 a 的算术平方根,即 $\sqrt{a} = x$;特别规定:0 的算术平方根是 0,即 $\sqrt{0} = 0$.]
4. 一个正数有两个平方根;0 的平方根是 0;负数没有平方根.
5. $\sqrt{a^2} = |a| = \begin{cases} a, & a \geq 0, \\ -a, & a \leq 0. \end{cases}$
6. 求一个数的平方根运算叫做开平方.
7. 立方根:如果一个数 x 的立方等于 a ,即 $x^3 = a$,那么这个数 x 叫做 a 的立方根(也叫三次方根).
8. 正数的立方根是正数;0 的立方根是 0;负数的立方根是负数.
9. $\sqrt[3]{a^3} = a$; $(\sqrt[3]{a})^3 = a$.
10. 求一个数 a 的立方根的运算叫做开立方.
11. 实数:有理数和无理数统称实数.
12. 实数的运算同有理数的基本相同,法则相同,定律一样.
13. 实数分类(按不同的方法和标准分类):



14. 实数和数轴上的点是一一对应的.(即每一个实数都可以用数轴上的一个点来表示;反过来,数轴上的每一个点都表示一个实数.)

15. $\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{a \cdot b} \quad (a \geq 0, b \geq 0)$; $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}} \quad (a \geq 0, b > 0)$.

16. 有效数字和科学记数法

有效数字:一个近似数,从左边第一个非零数字起,直到精确到的数位为止,所有的数字叫做这个数的有效数字.

科学记数法:把 M 写成 $a \times 10^n$ (其中 $1 \leq |a| < 10$, n 是整数)的形式.

当 $|M| \geq 1$ 时, n 等于 M 的整数位数 - 1;

当 $|M| < 1$ 时, n 等于 M 的第一个非 0 数字前面所有 0 的个数的相反数.

【教你几招】

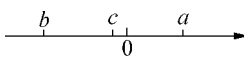
例 1 $\sqrt{(-5)^2}$ 的平方根是_____ ;算术平方根是_____ ; $\sqrt[3]{-8} =$ _____ ; $\sqrt[3]{27} =$ _____ .

分析 $\sqrt{(-5)^2} = |-5| = 5$,那么平方根是 $\pm\sqrt{5}$;算术平方根是 $\sqrt{5}$. 后面是对立方根进行考

查,负数有一负的立方根,正数有一正的立方根.

答案 $\pm\sqrt{5}$ $\sqrt{5}$ -2 3

例2 实数 a 、 b 、 c 在数轴上的对应点如图,化简 $a + |a + b| - \sqrt{c^2} - |b - c| =$ _____.



例2图

答案 0

评析 本题考查实数与数轴有关的基础知识,以及由此而反映出的数形结合这一重要的数学思想和方法.此方面是初中数学的重要基础知识,在复习中要给予重视.

例3 已知 $|x - 2| + (y + \sqrt{3})^2 + \sqrt{x - z + 3} = 0$,求 xyz 的值.

解 依题意得 $\begin{cases} x - 2 = 0, \\ y + \sqrt{3} = 0, \\ x - z + 3 = 0. \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} x = 2, \\ y = -\sqrt{3}, \\ z = 5. \end{cases}$ 所以 $xyz = -10\sqrt{3}$.

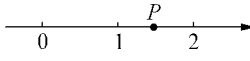
评析 本题对实数中所有的非负性质及对相应定义的实质进行综合考查.

【自我评介】

一、选择题

- 下列有 11 个实数: $\sqrt{8}$, $\sqrt[3]{8}$, $0.121121112\cdots$, $0.3333\cdots$, $4.0101\cdots$, $\sqrt{0.01}$, π , 3.1416 , $\sqrt[3]{2}$, 2.72 , $\sqrt[3]{-27}$. 其中有理数的个数是().
A. 5 个 B. 6 个 C. 7 个 D. 8 个
- 若 $\sqrt{3a+1}$ 有意义,则 a 能取的最小整数为().
A. 0 B. 1 C. -1 D. -3
- 不使用计算器,估算 $\sqrt{76}$,其大小应在().
A. 7.5~8.0 之间 B. 8.0~8.5 之间
C. 8.5~9.0 之间 D. 9.0~9.5 之间
- 下列说法中正确的是().
A. 有理数与数轴上的点一一对应 B. 无理数与数轴上的点一一对应
C. 整数与数轴上的点一一对应 D. 实数与数轴上的点一一对应
- 如果 $\sqrt{(x-2)^2} = x-2$,那么 x 的取值范围是().
A. $x \leq 2$ B. $x < 2$ C. $x \geq 2$ D. $x > 2$
- 若 $|a+10| + \sqrt{b-9} = 0$,则 $(a+b) + (a+b)^2 + \cdots + (a+b)^{2009} =$ ().
A. -1 B. 0 C. 1 D. 2007

二、填空题

- $\sqrt{4} =$ _____; 4 平方根是 _____; $\sqrt{4}$ 的平方根是 _____.
 - $\sqrt[3]{64}$ 的立方根是 _____; 若 $\sqrt{x^2} = 5$,则 $x =$ _____; 若 $\sqrt[3]{x^3} = 5$,则 $x =$ _____.
 - 若 $|m-1| + (\sqrt{n}-3)^2 = 0$,则 $m =$ _____; $n =$ _____.
 - 实数 P 在数轴上的位置如图所示,化简: $\sqrt{(P-1)^2} + \sqrt{(P-2)^2} =$ _____.
- 

第 10 题

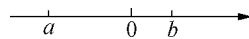
11. 当 $a =$ _____ 时, 式子 $\sqrt{\frac{a}{8}} + a\sqrt{\frac{2}{a}} + \sqrt{18a}$ 的值为整数(只需填一个符合题目要求的数).

12. 据报道, 2008 年某市城镇居民人均可支配收入为 15 971.53 元, 若把它保留两个有效数字, 并用科学记数法表示, 则应为 _____ 元.

三、计算题

13. 计算: $\frac{3}{2+\sqrt{3}} \times \sqrt[3]{-\frac{8}{27}} - (\sqrt{2})^2 + \frac{1}{(\sqrt{10}+\sqrt{6})^0} - |\sqrt{3}-2|$.

14. 实数 a 、 b 在数轴上的位置如图, 且 $|a| > |b|$, 化简: $|a| - \sqrt{(a+b)^2} - \sqrt{(b-a)^2}$.



第 14 题

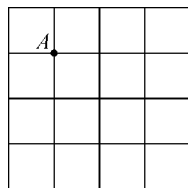
15. 有两个数 $\sqrt{5}$ 和 $2\sqrt{2}$.

(1) 说出这两个数的一个共同特点;

(2) 比较它们的大小(用“<”、“=”或“>”连结);

(3) 如图, 在 4×4 的正方形网格中, 每个正方形的边长为 1, 从格点 A 出发画两条线段 AB 、 AC , 使它们的另一端点落在格点(即小正方形的顶点)上, 且长度分别为 $\sqrt{5}$ 和 $2\sqrt{2}$;

(4) 用几何方法说明比较大小的理由.



第 15 题

第 2 单元 实数的运算

【知识梳理】

1. 实数的大小比较

(1) 正数 $> 0 >$ 负数; 两个负数比较, 绝对值大的反而小.

(2) 利用数轴: 在数轴上表示的两个实数, 右边的数总比左边的数大.

(3) 比差法: $a - b > 0 \Leftrightarrow a > b$,

$a - b = 0 \Leftrightarrow a = b$,

$a - b < 0 \Leftrightarrow a < b$.

2. 实数的运算

(1) 运算:加、减、乘、除、乘方、开方.

(2) 运算律:交换律 $a+b=b+a$, $a \cdot b=b \cdot a$.

结合律 $(a+b)+c=a+(b+c)$, $(ab) \cdot c=a \cdot (b \cdot c)$.

分配律 $(a+b) \cdot c=ac+bc$.

(3) 运算顺序:先算乘方、开方,再算乘、除,最后算加、减,有括号先算括号里的,同一级运算按从左到右的顺序进行.

【教你几招】

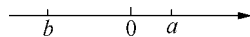
例1 实数 a 、 b 在数轴上表示如图所示,那么().

A. $b > a$

B. $|a| > |b|$

C. $-a < b$

D. $-b > a$



例1图

解 因为 $|b| > |a|$, 而 $b < 0$, $a > 0$, 所以 $-b > a$.

答案 D

评析 考查绝对值概念.

例2 计算: $(-2)^3 - \left| -\frac{1}{2} \right| + \left(\frac{1}{3} \right)^{-2} \cdot (1 - \sqrt{3})^0$.

解 $a^0 = 1$, $a^{-p} = \frac{1}{a^p}$ ($a \neq 0$). 原式 $= -8 - \frac{1}{2} + 9 \times 1 = \frac{1}{2}$.

例3 规定一种新的运算: $a \triangle b = a \cdot b - a - b + 1$, 如: $3 \triangle 4 = 3 \times 4 - 3 - 4 + 1$.

请比较大小: $(-3) \triangle 4$ _____ $4 \triangle (-3)$. (填“>”、“<”或“=”)

解 因为 $(-3) \triangle 4 = (-3) \times 4 - (-3) - 4 + 1 = -12$,

$4 \triangle (-3) = 4 \times (-3) - 4 - (-3) + 1 = -12$.

所以 $(-3) \triangle 4 = 4 \triangle (-3)$.

评析 弄清楚运算“ \triangle ”是如何规定的,是解决此题的关键.

例4 你能比较两数 2004^{2005} 和 2005^{2004} 的大小吗? 为了解决这个问题,先把问题一般化,即比较 n^{n+1} 与 $(n+1)^n$ 的大小 ($n \geq 1$ 且为整数),然后从分析 $n=1, n=2, n=3, \dots$, 这些简单情形入手,从中发现规律,经过归纳,猜想出结论.

(1) 通过计算,比较①~⑦各组两个数的大小:(在横线上填“>”、“<”或“=”)

① 1^2 _____ 2^1 ; ② 2^3 _____ 3^2 ; ③ 3^4 _____ 4^3 ; ④ 4^5 _____ 5^4 ; ⑤ 5^6 _____ 6^5 ;

⑥ 6^7 _____ 7^6 ; ⑦ 7^8 _____ 8^7 ; ……

(2) 归纳上面各小题的结果,可以猜想出 n^{n+1} 与 $(n+1)^n$ 的大小关系是

_____ ($n \geq 1$, 且为整数).

(3) 根据上面归纳猜想得到的一般结论,可以得出 2008^{2009} _____ 2009^{2008} . (填“>”、“<”或“=”)

答案 (1) ① < ② < ③ > ④ > ⑤ > ⑥ > ⑦ >

(2) 当 $1 \leq n < 3$ 时, $n^{n+1} < (n+1)^n$; 当 $n \geq 3$ 时, $n^{n+1} > (n+1)^n$.

(3) >

评析 在做(2)时,要注意分类说明,体现数学分类思想.

【自我评介】

一、选择题

1. 已知 $-1 < b < 0$, $0 < a < 1$, 那么在代数式 $a-b$, $a+b$, $a+b^2$, a^2+b 中, 对任意的 a , b , 对应的代数式的值最大的是().

- A. $a+b$ B. $a-b$ C. $a+b^2$ D. a^2+b

2. 下列计算中正确的是().

- A. $(-1)^0 = -1$ B. $3 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{-2} = 3 \times 2^2$
C. $(5^3)^2 \times 5^4 = 5^9$ D. $(-3)^5 \div (-3)^3 = -3^2$

二、填空题

3. 用“ $>$ ”或“ $<$ ”连结下列各组数:

- (1) -3 _____ -4 ; (2) $\sqrt{2}$ _____ $\sqrt{3}$;
(3) $-\frac{2}{3}$ _____ $-\frac{3}{4}$; (4) $1-\sqrt{5}$ _____ $1-\sqrt{3}$.

4. 计算:

- (1) $(-9) + |-6| =$ _____; (2) $(\sqrt{3}-1)^0 - \left(\frac{1}{2}\right)^{-1} =$ _____;
(3) $3^{-1} + 8 \times \left| -\frac{1}{3} \right| =$ _____; (4) $18 + 32 \div (-2)^3 - (-4)^2 \times 5 =$ _____.

5. 若一种运算“ \oplus ”满足 $a \oplus b = \frac{a+b}{2}$, 则 $2 \oplus 3 =$ _____.

三、计算题

6. $(-2)^3 + (1 + \sin 30^\circ)^0 + 3^{-1} \times 6$. 7. $2^{-1} + |1 - \sqrt{3}| + (\pi - 3)^0 - \frac{\sqrt{12}}{4}$.

8. $\left(\frac{1}{2}\right)^{-1} - 2\sin 45^\circ + |\sqrt{2} - 1|$. 9. $-1 - (1 - 0.5) \times \frac{1}{3} \times [2^0 - (-3)^2]$.

四、规律探究

10. 有一列数, 第一个数 $x_1=1$, 第二个数 $x_2=4$, 第三个数记为 x_3 , 以后依次记为 x_4, x_5, \dots, x_n ,

从第二个数开始, 每个数是它相邻两个数的和的一半(如 $x_2 = \frac{x_1 + x_3}{2}$).

- (1) 求第三、四、五个数, 并写出计算过程;
(2) 探索这一列数的规律, 猜想第 k 个数 x_k 等于什么(k 是大于 2 的整数), 并由此计算出 x_{2008} 的值.

第3单元 代数式

【知识梳理】

1. 代数式的意义:像 $4+3(x-1)$ 、 ab 、 $a+b$ 、 $\frac{s}{t}$ 、 a^3 等式子都是代数式,单独一个数或一个字母也是代数式.代数式可以表示生活中的实际意义.

2. 代数式的值:用具体的数值代替代数式中的字母,所得到的值叫做代数式的值.

3. 同类项:像 $8n$ 与 $5n$, $2a^2b$ 与 $-72a^2b$ 这样所含字母相同,并且相同字母的指数也相同的项,叫做同类项.

4. 代数式的化简:

(1) 合并同类项法则:在合并同类项时,把同类项的系数相加,字母及字母的指数不变.

(2) 去括号法则:括号前是“+”号,把括号及括号前的“+”号去掉后,原括号内各项的符号不变;括号前是“-”号,把括号及括号前的“-”号去掉后,原括号内的各项符号改变.

【教你几招】

例1 有一大捆粗细均匀的钢筋,要确定其长度,先称出这捆钢筋的总质量为 m 千克,再从中截出 5 米长的钢筋,称出它的质量为 n 千克,那么这捆钢筋的总长度为().

- A. $\frac{m}{n}$ 米 B. $\frac{mn}{5}$ 米 C. $\frac{5m}{n}$ 米 D. $(\frac{5m}{n}-5)$ 米

分析 此题要根据题意列出代数式,可先求出 1 千克的钢筋有几米长,再求 m 千克钢筋的长度.

答案 C

例2 如图所示的日历中,任意圈中一竖列上相邻的三个数,设中间的一个数是 a ,则这三个数之和为_____ (用含 a 的代数式表示).

答案 $3a$

评析 本题是以生活实际问题为背景的列代数式的问题,解题的关键在于先观察表中圈出的每组三个数之间的关系,然后再联想和验证日历中任意一竖列上相邻三个数间的关系,即所谓的从特殊到一般,这也是我们思考问题常用的方法.

日	一	二	三	四	五	六
		1	2	3	4	5
6	7	8	9	10	11	12
13	14	15	16	17	18	19
20	21	22	23	24	25	26
27	28	29	30	31		

例2图

例3 若 ab^x 与 $a^y b^2$ 是同类项,则下列结论中正确的是().

- A. $x=2, y=1$ B. $x=0, y=0$ C. $x=2, y=0$ D. $x=1, y=1$

答案 A

评析 正确理解同类项的两个标准是解决本题的关键.

例4 当 $\frac{2a-b}{a+b}=5$ 时,求代数式 $\frac{2(2a-b)}{a+b} + \frac{3(a+b)}{2a-b}$ 的值.

分析 代数式中,含有 a 、 b 两个字母,一般情况已知 a 、 b 后即能求出代数式的值,显然这里是不行的.所以要将 $\frac{2a-b}{a+b}$ 作为一个整体代入,注意到 $\frac{2a-b}{a+b}$ 和 $\frac{a+b}{2a-b}$ 互为倒数.

解 $\frac{2(2a-b)}{a+b} + \frac{3(a+b)}{2a-b} = 2 \times \frac{2a-b}{a+b} + 3 \times \frac{a+b}{2a-b} = 2 \times 5 + 3 \times \frac{1}{5} = 10 \frac{3}{5}$.

评析 从上面的例题中,我们可以看出,在利用某一整体形式求代数式的值时,需要根据具体情况进行变形,以达到目的.因此,求代数式的值需要对代数式进行认真观察,找准式子,先替换,再计算求值.

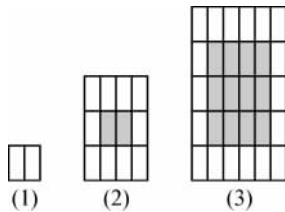
【自我评介】

一、选择题

- 下列正确叙述代数式 $\frac{1}{3}(2a-b^2)$ 的是().
 A. a 与 2 的积减去 b 平方与 3 的商
 B. a 与 2 的积减去 b 的平方的差除以 3
 C. a 的 2 倍减去 b 平方的差的 $\frac{1}{3}$
 D. a 的 2 倍减去 b 平方的 $\frac{1}{3}$.
- 下列各组式子中是同类项的是().
 A. $3x^2y$ 和 xy^2 B. $2xy$ 与 $-2yx$ C. $3x$ 与 $3x^2$ D. $2xy$ 与 $2xyz$
- 下列各式中符合代数式书写规范的是().
 A. $3\frac{1}{2}a$ B. $(a-b) \div c$ C. $n-3$ 人 D. $2.5a$
- 下列代数式: $-5x$, $\frac{2}{3}a$, $\frac{5}{4}a^2y$, $\frac{1}{y}$, $\frac{x}{\pi}$, -1 , x 中,是单项式的有()个.
 A. 3 B. 4 C. 5 D. 6

二、填空题

- 举一个实际例子说明代数式 $\frac{2a+b}{3}$ 的意义. _____
- 用代数式表示:(1) a 的绝对值的相反数与 b 的和的倒数; _____
 (2) x 平方与 y 的和的平方减去 x 平方与 y 的立方的差. _____
- 两个朋友碰在一起彼此握手问候,共握 _____ 次手,三个朋友聚会,彼此握手问候,共握 _____ 次手, n 个朋友聚会共握手 _____ 次.
- 某体育馆用大小相同的长方形木块镶嵌地面,第 1 次铺 2 块,如图(1);第 2 次把第 1 次铺的完全围起来,如图(2);第 3 次把第 2 次铺的完全围起来,如图(3)……依此方法,第 n 次铺完后,所围使用的木块数是 _____.



第 8 题

三、解答题

- (1) 当 $a = \frac{1}{2}$ 时,求 $a + \frac{a}{a-1}$ 的值;
 (2) 当 $x = \sqrt{2} + 1$ 时,求 $x + 1 - \frac{x^2}{x-1}$ 的值.

10. (1) 若 $a - b = 3ab$, 求 $\frac{2a - 2b - ab}{a - b + 2ab}$ 的值;

(2) 已知 $\frac{b}{a} = 2$, 求 $\frac{a - b}{a}$ 的值;

(3) 已知代数式 $3y^2 - 2y + 6$ 的值为 8, 求代数式 $\frac{3}{2}y^2 - y + 1$ 的值.

11. 已知梯形的上底为 $4a - 3b$, 下底为 $2a + b$, 高为 $3a + b$. 试用含 a 、 b 的代数式表示出梯形的面积, 并求出当 $a = 5$, $b = 3$ 时梯形的面积.

12. 如图, 图(1)是一个扇形 AOB , 将其作如下划分:

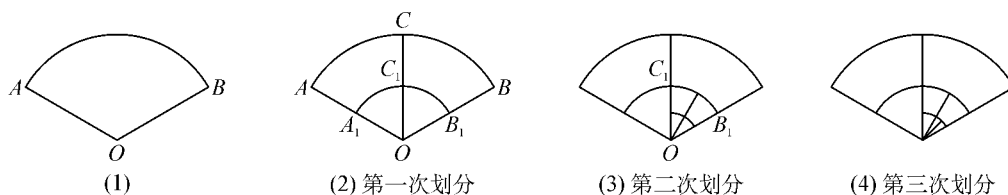
第一次划分: 如图(2)所示, 以 OA 的一半 OA_1 为半径画弧, 再作 $\angle AOB$ 的平分线, 得到扇形的总数为 6 个, 分别为: 扇形 AOB 、扇形 AOC 、扇形 COB 、扇形 A_1OB_1 、扇形 A_1OC_1 、扇形 C_1OB_1 ;

第二次划分: 如图(3)所示, 在扇形 C_1OB_1 中, 按上述划分方式继续划分, 可以得到扇形的总数为 12 个;

第三次划分: 如图(4)所示;

.....

依次划分下去.



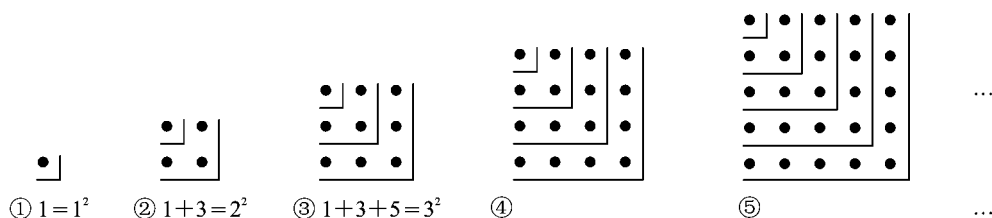
第 12 题

(1) 根据题意, 完成下表:

划分次数	1	2	3	4	...	n
扇形总个数	6	12			...	

(2) 根据上表, 请你判断按上述划分方式, 能否得到扇形的总数为 2009 个? 为什么?

13. 如图,观察图示的点阵图和相应的等式,探究其中的规律:

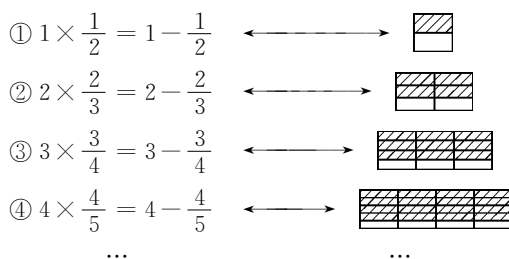


第 13 题

(1) 在④和⑤后面的横线上分别写出相应的等式;

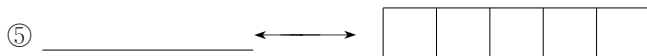
(2) 通过猜想写出与第 n 个点阵相对应的等式.

14. 如图,观察图示图形(每个正方形的边长均为 1)和相应的等式,探究其中的规律:



第 14 题

(1) 写出第五个等式⑤,并在右边给出的五个正方形上画出与之对应的图形;



(2) 猜想并写出与第 n 个图形相对应的等式.

第 4 单元 整式与分式

【知识梳理】

1. 科学记数法:把一个数写成 $a \times 10^n$ 或 $a \times 10^{-n}$ ($1 \leq a < 10$, n 为正整数)的形式,这种表示数的方法叫做科学记数法.

2. 整式的概念:

(1) 单项式: $4x$, ab , x^3 , $-n$, $3xy$, $2x^2$, a^2b^3 这些代数式,都是数字与字母或字母与字母的积,我们把这样的代数式叫做单项式. 单独一个数字或字母也是单项式.

系数:单项式中的数字因数叫做单项式的系数.

次数:单项式中所有字母的指数和叫做单项式的次数.

(2) 多项式:几个单项式的和叫做多项式.

(3) 整式:单项式和多项式统称为整式.

3. 分式的概念:分母中含有字母的式子叫做分式.要使分式有意义必须使分式的分母不为0.

分式方程:分母中含有未知数的方程叫做分式方程.由于分式方程求解过程中可能会产生增根,所以解分式方程时必须验根.

4. 整式运算中的一些重要公式:

(1) 完全平方公式: $(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$;

(2) 平方差公式: $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$;

(3) 幂的乘方与积的乘方: $(a^m)^n = a^{mn}$ (m, n 是整数),

$(ab)^n = a^n b^n$ (n 是整数).

5. 因式分解:把一个多项式化成几个整式的积的形式叫做因式分解.方法有:提取公因式法、公式法、十字相乘法.因式分解与整式的乘法互为逆运算.

【教你几招】

例1 单项式 $-\frac{x^2y}{7}$ 的系数是_____ ; 次数是_____.

答案 $-\frac{1}{7}$ 3

评析 一个单项式的次数,是指这个单项式中所含字母的指数之和,特别地,当某一个字母的指数是1时,一般省略不写,求单项式的次数时,勿忘计算在内;一个单项式的系数是指它的数字因数.

例2 把 $4x^2 + 1$ 加上一个单项式后,使其成为一个整式的完全平方式,请你写出所有符合条件的单项式_____.

答案 $\pm 4x$ 或 $4x^4$ 或 -1 或 $-4x^2$

评析 同学们习惯套用课本上的完全平方公式,得出 $4x^2 + 1 + 4x = (2x + 1)^2$, 或 $4x^2 + 1 - 4x = (2x - 1)^2$. 事实上不仅如此,还有 $4x^2 + 1 + 4x^4 = (2x^2 + 1)^2$, $4x^2 + 1 - 4x^2 = 1^2$, $4x^2 + 1 - 1 = 4x^2 = (2x)^2$. 因此,按照题目的要求,答案应填上这五个单项式.

例3 计算: $(x - y)^2 - (3x^2 - 3xy + y^2) =$ _____.

解 $(x - y)^2 - (3x^2 - 3xy + y^2)$
 $= x^2 - 2xy + y^2 - 3x^2 + 3xy - y^2$
 $= -2x^2 + xy.$

答案 $-2x^2 + xy$

评析 本题主要考查乘法公式、去括号法则与合并同类项三个知识点,注意应用乘法公式时不要漏项;去括号时,当括号前是“-”号时,括号内的各项都要变号;合并同类项时,只把系数相加减,字母及其指数不变.

例4 在日常生活中,如取款、上网等都需要密码.有一种用“因式分解”法产生的密码,方便记忆.原理是:如对于多项式 $x^4 - y^4$,因式分解的结果是 $(x - y)(x + y)(x^2 + y^2)$,若取 $x = 9$, $y = 9$ 时,则各个因式的值是: $(x - y) = 0$, $(x + y) = 18$, $(x^2 + y^2) = 162$,于是就可以把“018162”作

为一个六位数的密码. 对于多项式 $4x^3 - xy^2$, 取 $x = 10$, $y = 10$ 时, 用上述方法产生的密码是 _____ (写出一个即可).

解 因为 $4x^3 - xy^2 = x(4x^2 - y^2) = x(2x + y)(2x - y)$, 所以当 $x = 10$, $y = 10$ 时 $2x + y = 30$, $2x - y = 10$, 于是根据题意可以产生的密码为: 103010, 或 101030, 或 301010.

答案 103010(或 101030, 301010)

例 5 已知分式 $\frac{|x| - 5}{x^2 - 4x + 3}$, 当 x _____ 时, 分式有意义; 当 x _____ 时, 分式无意义; 当 x _____ 时, 分式值为零.

答案 $x \neq 1, 3$, $x = 1$ 和 3 , $x = \pm 5$.

评析 本题考查分式 $\frac{A}{B}$ 在何条件下有意义、无意义、值为零的问题. 当 $B \neq 0$ 时, 分式有意义; 当 $B = 0$ 时, 分式无意义; 当 $A = 0$ 且 $B \neq 0$ 时分式值为零.

例 6 化简: (1) $\frac{x^2 - 4x + 4}{x^2 - 4}$; (2) $\frac{x - 2}{x + 2} - \frac{x + 2}{x - 2}$.

答案 (1) $\frac{x - 2}{x + 2}$; (2) $-\frac{8x}{x^2 - 4}$.

评析 本题主要考查分式的化简, 分式的通分及熟练运用公式进行因式分解.

例 7 若 $0 < x < 1$, 且 $x + \frac{1}{x} = 6$, 求 $x - \frac{1}{x}$.

解 $(x - \frac{1}{x})^2 = (x + \frac{1}{x})^2 - 4x \cdot \frac{1}{x} = 6^2 - 4 = 32$.

因为 $0 < x < 1$, 所以 $\frac{1}{x} > 1$, $x - \frac{1}{x} < 0$, 即 $x - \frac{1}{x} = -\sqrt{32} = -4\sqrt{2}$.

评析 在解决两个互为倒数形式的关系式的求值问题时, 变换的依据就是完全平方公式.

【自我评介】

一、选择题

1. 小马虎在下面的计算题中只做对了一道题, 他答对的题目是().

A. $(a - b)^2 = a^2 - b^2$

B. $(-2a^3)^2 = 4a^6$

C. $a^3 + a^2 = 2a^5$

D. $-(a - 1) = -a - 1$

2. 下列式子中正确的是().

A. $a^2 \cdot a^3 = a^6$

B. $(x^3)^3 = x^6$

C. $3^3 = 9$

D. $3b \cdot 3a = 9ab$

3. 下列运算中结果正确的是().

① $2x^3 - x^2 = x$

② $x^3 \cdot (x^5)^2 = x^{13}$

③ $(-x)^6 \div (-x)^3 = x^3$

④ $(0.1)^{-2} \cdot 10^{-1} = 10$

A. ①②

B. ②④

C. ②③

D. ②③④

4. 分解因式 $a - ab^2$ 的结果是().

A. $a(1 + b)(1 - b)$

B. $a(1 + b)^2$

C. $a(1 - b)^2$

D. $(1 - b)(1 + b)$

5. 对二次三项式 $x^2 - 4x + 3$ 分解因式, 结果为().

A. $x(x - 4)$

B. $(x - 1)(x - 3)$

C. $(x - 1)(x + 3)$

D. $(x + 1)(x - 3)$

6. 当 $x = 1$ 时, 代数式 $px^3 + qx + 1 = 2001$, 则当 $x = -1$ 时, 代数式 $px^3 + qx + 1$ 的值等于().

A. -1999

B. -2000

C. -2001

D. 1999

7. 已知 $x^2 - 2mx + 1$ 是完全平方式, 则 m 的值为().
 A. 1 B. -1 C. ± 1 D. 0

二、填空题

8. 代数式 $a^2 - 1$, 0 , $\frac{1}{3a}$, $x + \frac{1}{y}$, $-\frac{xy^2}{4}$, m , $\frac{x+y}{2}$, $\sqrt{2} - 3b$ 中单项式是_____, 多项式是_____, 分式是_____.
9. $-\frac{x^2yz^3}{3}$ 是_____次单项式, 它的系数是_____.
10. 多项式 $3x^2 - 1 - 6x^5 - 4x^3$ 是_____次_____项式, 其中最高次项是_____, 常数项是_____, 三次项系数是_____, 按 x 的降幂排列为_____.
11. 若一个多项式加上 $2x^2 - x^3 - 5 - 3x^4$ 得 $3x^4 - 5x^3 - 3$, 则这个多项式是_____.
12. 若 $3x^n - (m-1)x + 1$ 为三次二项式, 则 $m - n^2$ 的值为_____.
13. 用“ \bowtie ”定义新运算: 对于任意实数 a, b , 都有 $a \bowtie b = a$; $a \bowtie b = b$. 如 $3 \bowtie 2 = 3$, $3 \bowtie 2 = 2$, 则 $(2006 \bowtie 2005) \bowtie (2004 \bowtie 2003) =$ _____.
14. 分解因式: $5x^2 - 5y^2 =$ _____.
15. 一个矩形的面积为 $a^3 - 2ab + a$, 宽为 a , 则矩形的长为_____.

三、解答题

16. 计算:

(1) $(-2ax)^2 \cdot \left(-\frac{2}{5}x^4y^3z^3\right) \div \left(-\frac{1}{2}a^5xy^2\right)$; (2) $\left(\frac{1}{3}a^{n+2} + 2a^{n+1}\right) \div \left(-\frac{1}{3}a^{n-1}\right)$;

(3) $\frac{3x}{(x-3)^2} + \frac{x}{x-3}$; (4) $\left(\frac{1}{x-2} - \frac{1}{x+2}\right) \cdot \frac{x^2-4}{x}$;

(5) $3xy^3 \cdot \left(-\frac{1}{2}x^3y^4\right) \div \left(-\frac{1}{6}x^2y^3\right)^2$.

17. (1) 设 $a - b = -2$, 求 $\frac{a^2 + b^2}{2} - ab$ 的值;

(2) 已知 $a = -2009$, $b = 2008$, $c = -2007$, 求 $a^2 + b^2 + c^2 + ab + bc - ac$ 的值.