图书在版编目(CIP)数据

新黄冈数学题库·热点题(下)/南秀全主编. —青岛:青岛出版社,2003.6

ISBN 978-7-5436-1511-3

Ⅰ. 新… Ⅱ. 南… Ⅲ. 数学课—初中—习题—升学参考资料 Ⅳ. G634.605

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2003)第 040257 号

书　　名　新黄冈数学题库·热点题(下)
主　　编　南秀全
本册主编　付东峰
出版发行　青岛出版社
社　　址　青岛市徐州路 77 号(266071)
本社网站　http://www.qdpub.com
邮购电话　13335059110　(0532)85814750(兼传真)　80998664
责任编辑　郭东明　程兆军
封面设计　乔　峰
照　　排　青岛海讯科技有限公司
印　　刷
出版日期　2008 年 6 月第 4 版　2008 年 6 月第 6 次印刷
开　　本　16 开(787mm×1092mm)
印　　张　20.25
字　　数　300 千
书　　号　ISBN 978-7-5436-1511-3
定　　价　26.80 元

编校质量、盗版监督电话　(0532)80998671

青岛版图书售出后如发现印装质量问题,请寄回青岛出版社印刷物资处调换。

电话　(0532)80998826

目　　录

第七章　从几何图形中建立函数关系式(一) (1)

7.1　应用直线形知识 (1)

7.2　应用相似形知识 (10)

7.3　应用圆的知识 (22)

第八章　从几何图形中建立函数关系式(二) (38)

8.1　应用周长、面积公式 (38)

8.2　综合问题 (54)

第九章　动态几何问题 (74)

9.1　图形的折叠 (74)

9.2　图形的分割与拼接 (96)

9.3　点的运动 (115)

9.4　线的运动 (136)

9.5　图形的运动 (167)

第十章　数学猜想问题 (196)

答案与提示 (237)

第七章　从几何图形中建立函数关系式(一)

函数关系式体现了量与量间的变化规律与特征,在几何图形中建立函数关系式,常要结合图形特点、几何定理与法则,找到变量间相互依存与制约的特征,建立起表示一般规律的数学式子.

7.1　应用直线形知识

本节主要讲述应用三角形内角和定理、勾股定理、多边形内角和定理、四边形性质等建立几何量间函数关系式的方法与技巧.

【经典考题例析】

例 1　(淮安市,2002)等腰三角形顶角的度数 y 与底角的度数 x 之间的函数关系式及 x 的取值范围是(　　).

A. $y=180-2x(0<x\leqslant 90)$　　B. $y=180-x(0<x<90)$

C. $y=180-2x(0<x<90)$　　D. $y=180-x(0<x\leqslant 90)$

分析　三角形内角和为 180°是个隐含的条件,而等腰三角形的两底角相等可帮助建立一个等量关系式.

解　∵ 三角形内角和为 180°,且等腰三角形两底角相等,

∴ $y+2x=180$,即 $y=180-2x$.

又∵ $0<y<180$,∴ $0<180-2x<180$,∴ $0<x<90$

说明　在确定函数自变量的取值范围时,不仅要应用相关的定理与法则,而且还要根据具体问题考虑实际情况.比如,本题中 y 表示角的度数,则 $y>0$;同时作为等腰三角形的顶角度数,故又必须小于 180°.如果 y 表示的是等腰三角形的底角,还应该想到每个底角应小于 90°.

例 2　(湖南省岳阳市课改区,2006)如图 7−1−1,在菱形 $ABCD$ 中,$\angle A=60°$,$AB=4$,E 是边 AB 上一动点,过点 E 作 $EF\perp AB$ 交 AD 延长线于点 F,交 BD 于点 M,交 CD 于 N.

(1) 请判断△DMF 的形状,并说明理由.

(2) 设 $EB=x$,△DMF 的面积为 y,求 y 与 x 之间的函数关系式,并写出 x 的取值范围.

解　(1) △DMF 是等腰三角形.

∵ 四边形 $ABCD$ 是菱形,∴ $AB=AD$.

∵ $\angle A=60°$,∴ $\angle ABD=60°$

∵ $EF\perp AB$,∴ $\angle F=30°$,$\angle DMF=\angle EMB=30°$

∴ $\angle F=\angle DMF$,∴ $DM=DF$.

(2) 因为 $EB=x$,则 $AE=4-x$,$EF=\sqrt{3}(4-x)$,$EN=2\sqrt{3}$,

∴ $NF=EF-EN=\sqrt{3}(2-x)$,$FM=2\sqrt{3}(2-x)$

∵ $MN=NF=\sqrt{3}(2-x)$,

∴ $DN=MN\tan 30°=2-x$.∴ $y=\sqrt{3}(2-x)^2(0\leqslant x<2)$.

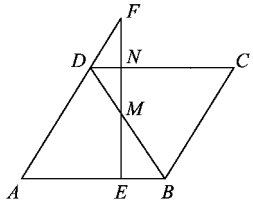


图 7−1−1

说明　(1) 寻找几何量间的函数关系式,要充分利用已知几何图形的性质,灵活进行几何量间的代换与转化,如本题应用了"菱形各边相等","含 30°角的直角三角形各边之间的关系"等.

(2) 确定有动点的几何量的变量取值范围时,实际上置动点于它可以到达的两个"极点",如本题点 E 在 AB 上,则 E 分别与 A,与 B 重合时是两个"极点",此时 $EB=x=2$ 或 0,再综合考虑,动点 E 是否可以为"极点"作出合理取舍,如本例中 E 不能与 A 重合,此时不能得到满足条件的图形,从而舍去 $x=2$ 的情形.

例 3　(内蒙古包头市课改区,2006)某农场计划建一个面积为 150 平方米的长方形养鸡场,为了节约费用,鸡场一边靠着原有的一堵旧墙(墙长 25 米),另外的三边用木栏围成(如图 7－1－2 所示).已知整修旧墙的费用是每米 10 元,新建木栏的费用是每米 30 元.设利用旧墙 AD 的长度为 x 米,整修旧墙和新建木栏所需的总费用为 y 元.

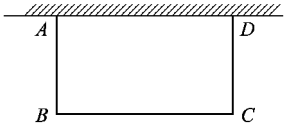


图 7－1－2

(1) 试求 y 与 x 之间的函数关系式,并写出自变量 x 的取值范围;

(2) 若整修旧墙和新建木栏的总费用为 1200 元,则应利用旧墙多少米?

(3) 为了确保完成整修旧墙和新建木栏的任务,总费用能否少于 1200 元?请说明理由.

分析　根据长方形的性质,由面积可求得它的另一边长,用 x 的代数式表示出来.

解　(1) 根据题意,得 $CD=\dfrac{150}{x}$,$y=10x+30x+2\cdot\dfrac{150}{x}\cdot 30=40x+\dfrac{9000}{x}(0<x\leqslant 25)$.

(2) 根据题意,得 $40x+\dfrac{9000}{x}=1200$,整理得 $x^2-30x+225=0$,解得 $x_1=x_2=15$.

(3) 假设总费用为 k 元时,能确保完成修建任务,根据题意,得 $40x+\dfrac{9000}{x}=k$,即 $40x^2-kx+9000=0$,该方程有实数解时,$\Delta=k^2-4\times 40\times 9000=k^2-1440000\geqslant 0$,解得 $k\geqslant 1200$,

∴ 总费用不能少于 1200 元.

另解:∵ $y=40x+\dfrac{9000}{x}=40\left(x+\dfrac{225}{x}\right)=40\left(\sqrt{x}-\dfrac{15}{\sqrt{x}}\right)^2+1200$,

∴ $y\geqslant 1200$,∴ 总费用不能少于 1200 元.

说明　本题(3)中,用一元二次方程根的判别式和配方法来找到问题的答案,是两条十分有效的解题途径,应予重视.

例 4　(贵州黔东南州,2006)如图 7－1－3,在梯形 $ABCD$ 中,$AD/\!/BC$,$\angle B=90°$,$AB=14$cm,$AD=15$cm,$BC=21$cm,点 M 从 A 点开始,沿 AD 边向 D 运动,速度为 1 厘米/秒,点 N 从点 C 开始沿 CB 边向点 B 运动,速度为 2 厘米/秒,设四边形 $MNCD$ 的面积为 S.

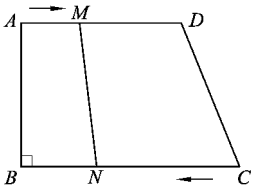


图 7－1－3

(1) 写出面积 S 与时间 t 之间的函数关系式;

(2) 当 t 为何值时,四边形 $NMCD$ 是平行四边形?

(3) 当 t 为何值时,四边形 $MNCD$ 是等腰梯形?

分析　本题中 S 表示梯形的面积,它与线段 MD,NC 有关,所以,先要考虑用含变量 t 的式子表示出这些线段长.

解　(1) 根据题意 $S=\dfrac{1}{2}(MD+NC)\times AB$,

又∵ $MD=AD-AM=15-t$,$NC=2t$,

而 $AB=14$cm,

∴ $S=\dfrac{1}{2}(15-t+2t)\times 14=7t+105(0<t\leqslant 10.5)$.

(2) 假设当 $t=a$ 时,四边形 $MNCD$ 为平行四边形,根据平行四边形的判定定理有 $MD=NC$.

即:$(15-a)=2a$.解得 $a=5$.

∴ 当 $t=5$ 秒时,四边形为平行四边形.

(3) 假设当 $t=a$ 时，四边形 $MNCD$ 是等腰梯形，则 $CD=MN$ (如图 7－1－4)

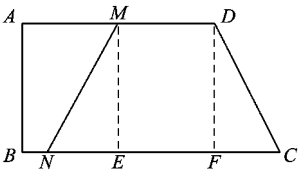


图 7－1－4

又作 ME，DF 分别垂直于 BC，则

∵ $AD/\!/BC$，$ME\perp BC$，$DF\perp BC$，

∴ $ME=DF$. ∴ $NE=CF$. ∴ $2t-6-(15-t)=6$，解得 $t=9$(秒).

例 5　(福州市，2003)已知，如图 7－1－5，等边三角形 ABC 中，$AB=2$，点 P 是 AB 边上的任意一点(点 P 可以与点 A 重合，但不与点 B 重合)，过点 P 作 $PE\perp BC$，垂足为 E；过点 E 作 $EF\perp AC$，垂足为 F；过点 F 作 $FQ\perp AB$，垂足为 Q，设 $BP=x$，$AQ=y$.

(1) 写出 y 与 x 之间的函数关系式；

(2) 当 BP 的长等于多少时，点 P 与点 Q 重合？

(3) 当线段 PE，FQ 相交时，写出线段 PE，EF，FQ 所围成三角形的周长的取值范围(不必写出解题过程).

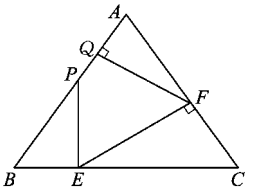


图 7－1－5

解　(1) ∵ $\triangle ABC$ 为等边三角形，

∴ $\angle A=\angle B=\angle C=60^\circ$，$AB=BC=CA=2$.

在 $\triangle BEP$ 中，∵ $PE\perp BE$，$\angle B=60^\circ$，∴ $\angle BPE=30^\circ$

而 $BP=x$，∴ $BE=\frac{1}{2}x$，∴ $EC=2-\frac{1}{2}x$.

在 $\triangle CFE$ 中，∵ $\angle C=60^\circ$，$EF\perp CF$，∴ $\angle FEC=30^\circ$，∴ $FC=1-\frac{1}{4}x$.

同理，在 $\triangle FAQ$ 中可得 $AQ=\frac{1}{2}+\frac{1}{8}x$.

而 $AQ=y$，∴ $y=\frac{1}{2}+\frac{1}{8}x(0<x\leqslant 2)$.

(2) 当点 P 与点 Q 重合时，如图 7－1－6，有

$AQ+BP=AB=2$.

∴ $\begin{cases}x+y=2,\\ y=\frac{1}{2}+\frac{1}{8}x.\end{cases}$ 解得 $x=\frac{4}{3}$. ∴ 当 BP 的长为 $\frac{4}{3}$ 时，点 P 与点 Q 重合.

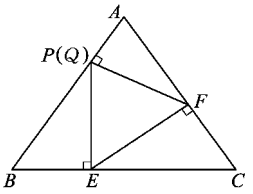


图 7－1－6

(3) 设三角形的周长为 c，得 $\frac{3\sqrt{3}}{2}\leqslant c\leqslant 2\sqrt{3}$.

说明　本题充分地利用了已知条件中的等边三角形性质，并因垂线而得到直角三角形，所以，联想到含 30° 角的直角三角形的性质的应用.

例 6　(福州市，2001)如图 7－1－7，已知：正方形 $OABC$ 的面积为 9，点 O 为坐标原点，点 A 在 y 轴上，点 C 在 y 轴上，点 B 在函数 $y=\frac{k}{x}(k>0,x>0)$ 的图象上，点 $P(m,n)$ 是函数 $y=\frac{k}{x}(k>0,x>0)$ 的图象上的任一点，过点 P 分别作 x 轴、y 轴的垂线，垂足分别为 E，F，并设矩形 $OEPF$ 和正方形 $OABC$ 不重合部分的面积为 S.

(1) 求 B 点坐标和 k 的值；

(2) 当 $S=\frac{9}{2}$ 时，求点 P 的坐标；

(3) 写出 S 关于 m 的函数关系式.

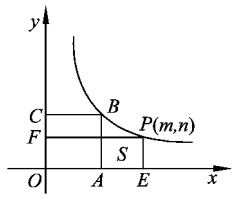


图 7－1－7

解　(1) 依题意，设 B 点坐标 (x_0,y_0)，

∴ $S_{正方形OABC}=x_0y_0=9$.

∴ $x_0=y_0=3$，即 $B(3,3)$.

∵ $x_0y_0=k$，∴ $k=9$.

(2) ① ∵ $P(m,n)$在 $y=\frac{9}{x}$上(如图 a)，∴ $S_{矩形OEP_1F}=mn=9$. ∴ $S_{矩形OAGF}=3$.

由已知可得，$S=9-3n=\frac{9}{2}$. ∴ $n=\frac{3}{2}$，$m=6$. ∴ $P_1\left(6,\frac{3}{2}\right)$.

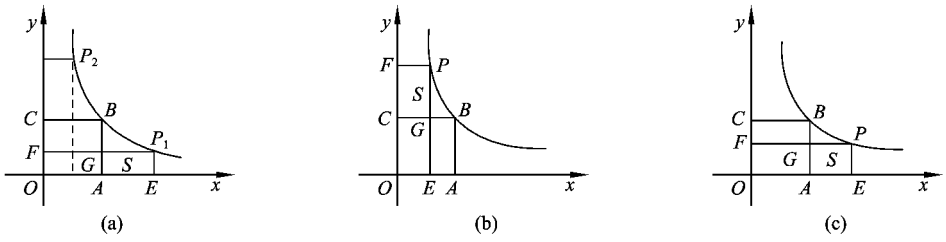


图 7－1－8

② 如图 a 同理可得 $P_2\left(\frac{3}{2},6\right)$.

(3) ① 如图 b，当 $0<m<3$ 时，∵ 点 P 坐标为(m,n)，∴ $S_{矩形OEGC}=3m$.

∴ $S=S_{矩形OEPF}-S_{矩形OEGC}$. ∴ $S=9-3m(0<m<3)$.

② 如图 c，当 $m\geqslant 3$ 时，∵ 点 P 坐标为(m,n)，∴ $S_{矩形OAGF}=3n$.

∵ $mn=9$，∴ $n=\frac{9}{m}$. 又 $S=9-3n=9-\frac{27}{m}$. 即 $S=9-\frac{27}{m}(m\geqslant 3)$.

说明　本题中的这类矩形都有 $S=|k|$ 的性质.

例 7　(孝感市，2002)如图 7－1－9(a)是一矩形纸片，其中 $AD=8\sqrt{3}$，$AB=x$. 先把矩形纸片 $ABCD$ 对折，设折痕为 MN；再沿着 AE 线折叠，把 B 点叠在折痕 MN 上，得到 Rt$\triangle AB'E$，又沿着 EB' 线折叠，能得到如图 7－1－9(b)所示的$\triangle AEF$.

(1) 证明：$\triangle AEF$ 为等边三角形；

(2) 求 x 的取值范围；

(3) 设梯形 $EFDC$ 的面积为 S，求 S 与 x 之间的函数关系式，并指出当 x 为何值时，S 取得最大值.

(1) **证明**　由平行线等分线段定理得 $B'E=B'F$.

又∵ $AB'\perp EF$，∴ $\triangle AEF$ 是等腰三角形. ∴ $\angle 1=\angle 2$.

又∵ $\angle BAE=\angle 1$，∴ $\angle 1=\angle 2=\angle BAE$.

又∵ $\angle BAF=90°$，∴ $\angle 1=\angle 2=\angle BAE=30°$，

∴ $\angle EAF=60°$，∴ $\triangle AEF$ 为等边三角形.

(2) **解**　在 Rt$\triangle ABE$ 中，$AE=\frac{AB}{\cos 30°}=\frac{2}{\sqrt{3}}x$.

又∵ $AE=AF$. ∴ $AF=\frac{2}{\sqrt{3}}x$.

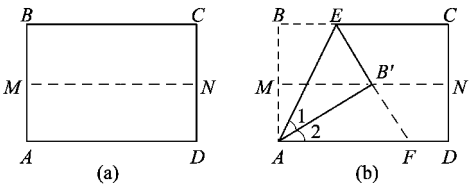


图 7－1－9

由题意得 $AF\leqslant AD$，∴ $\frac{2}{\sqrt{3}}x\leqslant 8\sqrt{3}$，∴ $x\leqslant 12$. ∴ x 的取值范围是 $0<x\leqslant 12$.

(3) **解**　由Ⅱ知：$BE=\frac{\sqrt{3}}{3}x$，$AF=\frac{2\sqrt{3}}{3}x$，

∴ $S=\frac{1}{2}(FD+EC)\cdot CD=\frac{1}{2}\left[\left(8\sqrt{3}-\frac{2\sqrt{3}}{3}x\right)+\left(8\sqrt{3}-\frac{\sqrt{3}}{3}x\right)\right]\cdot x$

$=\frac{\sqrt{3}}{2}x(16-x)\left(或-\frac{\sqrt{3}}{2}x^2+8\sqrt{3}x\right)$

又∵ $S=\frac{\sqrt{3}}{2}(-x^2+16x)=\frac{\sqrt{3}}{2}[-(x-8)^2+64]$. ∴ 当 $x=8$ 时，S 取得最大值.

例 8　(北京市，1997)已知矩形的长大于宽的 2 倍，周长为 12. 从它的一个顶点作一条射线，将矩形分成一个三角形和一个梯形，且这条射线与矩形一边所成的角的正切值等于 $\frac{1}{2}$. 设梯形的面积为 S，梯形中较短的底边长为 x，试写出梯形面积 S 关于 x 的函数关系式，并指出自变量 x 的取值范围.

分析　读题时应注意到射线与矩形的一边所成的角并不唯一.

解　∵ 矩形 $ABCD$ 的长大于宽的 2 倍，矩形周长为 12. ∴ $AD>4$，$AB<2$.

根据题意，可分为以下两种情况：

(ⅰ) 如图 7－1－10，当 $\tan\angle BAE=\frac{1}{2}$ 时，设 $CE=x$，$BE=m$，

则 $AB=DC=2m$，$AD=m+x$.

∵ $AB+AD=6$，∴ $2m+m+x=6$，∴ $m=\frac{6-x}{3}$.

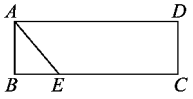


图 7－1－10

∴ $S_{梯形AECD}=\frac{1}{2}(AD+EC)\cdot DC=\frac{1}{2}[(m+x)+x]\cdot 2m$

$=m(m+2x)=\frac{6-x}{3}\cdot\frac{6+5x}{3}=-\frac{5}{9}x^2+\frac{8}{3}x+4$. 其中 $3<x<6$.

(ⅱ) 如图 7－1－11，当 $\tan\angle DAE=\frac{1}{2}$ 时，在矩形 $ABCD$ 中，$AD/\!/BC$，

∴ $\angle DAE=\angle AEB$，∴ $\tan\angle AEB=\frac{1}{2}$.

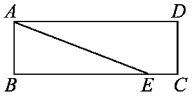


图 7－1－11

设 $CE=x$，$AB=CD=n$，则 $BE=2n$，$AD=2n+x$.

∵ 矩形的周长为 12. ∴ $AB+AD=6$. ∴ $n+2n+x=6$，∴ $n=\frac{6-x}{3}$.

∴ $S_{梯形AECD}=\frac{1}{2}(AD+EC)\cdot DC=\frac{1}{2}[(2n+x)+x]\cdot n$.

$=(n+x)n=\frac{6+2x}{3}\cdot\frac{6-x}{3}=-\frac{2}{9}x^2+\frac{2}{3}x+4$. 其中 $0<x<6$.

说明　本题应用直角三角形性质，结合几何图形的分类讨论求解.

例 9　(广州市实验区，2005)如图 7－1－12，某学校校园内有一块形状为直角梯形的空地 $ABCD$，其中 $AB/\!/DC$，$\angle B=90°$，$AB=100$m，$BC=80$m，$CD=40$m，现计划在上面建设一个面积为 S 的矩形综合楼 $PMBN$，其中点 P 在线段 AD 上，且 PM 的长至少为 36m.

(1) 求边 AD 的长；

(2) 设 $PA=x$(m)，求 S 关于 x 的函数关系式，并指出自变量 x 的取值范围；

(3) 若 $S=3300$m^2，求 PA 的长.(精确到 0.1m)

分析　本小题主要考查梯形、三角形、函数与方程等基础知识，考查数形结合等基本数学思想，考查阅读能力、思维能力和空间观念，故找解题思路时要注意结合图形考虑.

解　(1) 过点 D 作 $DE\perp AB$ 于点 D，则

$DE/\!/BC$，且 $DE=BC$，$CD=BE$，$DE/\!/PM$.

Rt$\triangle ADE$ 中，$DE=80$ 米，

$AE=AB-BE=100-40=60$(米)，

∴ $AD=\sqrt{AE^2+DE^2}=\sqrt{60^2+80^2}=100$(米).

(2) ∵ $DE/\!/PM$，∴ $\triangle APM\backsim\triangle ADE$.

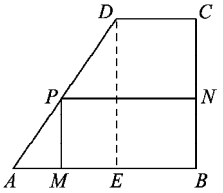


图 7－1－12

$\therefore \frac{AP}{AD}=\frac{PM}{DE}=\frac{AM}{AE}$. 即$\frac{x}{100}=\frac{PM}{80}=\frac{AM}{60}$.

$\therefore PM=\frac{4}{5}x, AM=\frac{3}{5}x$. 即 $MB=AB-AM=100-\frac{3}{5}x$.

$S=PM\cdot MB=\frac{4}{5}x\cdot\left(100-\frac{3}{5}x\right)=-\frac{12}{25}x^2+80x$.

由 $PM=\frac{4}{5}x\geqslant 36$,得 $x\geqslant 45$. $\therefore$ 自变量 x 的取值范围为 $45\leqslant x\leqslant 100$.

(3) 当 $S=3300\text{m}^2$ 时,$-\frac{12}{25}x^2+80x=3300$,$12x^2-2000x+82500=0$,$3x^2-500x+20625=0$,

$x=\frac{500\pm\sqrt{(-500)^2-4\times 3\times 20625}}{6}=\frac{500\pm 50}{6}$,$\therefore x_1=\frac{550}{6}\approx 91.7(\text{m})$,$x_2=\frac{450}{6}=75(\text{m})$.

即当 $S=3300\text{m}^2$ 时,PA 的长为 75m,或约为 91.7m.

说明　建立几何量间的函数解析式,充分体现了数与形的有效结合,所以,对问题中的图形的阅读理解是解决这类问题的一项重要素质,并要能由图联想到要应用的相关数学知识.

例 10　(盐城市,2006)已知,如图 7－1－13,$A(0,1)$是 y 轴上一定点,B 是 x 轴上一动点,以 AB 为边,在 $\angle OAB$ 的外部作 $\angle BAE=\angle OAB$,过 B 作 $BC\perp AB$,交 AE 于点 C.

(1) 当 B 点的横坐标为$\frac{\sqrt{3}}{3}$时,求线段 AC 的长;

(2) 当点 B 在 x 轴上运动时,设点 C 的纵、横坐标分别为 y,x,试求 y 与 x 的函数关系式(当点 B 运动到 O 点时,点 C 也与 O 点重合);

(3) 设过点 $P(0,-1)$的直线 l 与(2)中所求函数的图象有两个公共点 $M_1(x_1,y_1)$、$M_2(x_2,y_2)$,且$x_1^2+x_2^2-6(x_1+x_2)=8$,求直线 l 的解析式.

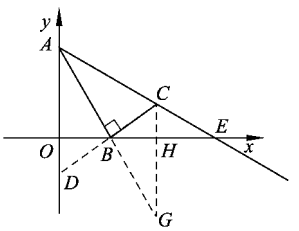


图 7－1－13

解　(1) 方法一:在 Rt$\triangle AOB$ 中,可求得 $AB=\frac{2\sqrt{3}}{3}$.

$\because \angle OAB=\angle BAC$,$\angle AOB=\angle ABC=\text{Rt}\angle$,

$\therefore \triangle ABO\backsim\triangle ABC$,

$\therefore \frac{AO}{AB}=\frac{AB}{AC}$,

由此可求得:$AC=\frac{4}{3}$.

方法二:由题意知:$\tan\angle OAB=\frac{OB}{OA}=\frac{\sqrt{3}}{3}$. 由勾股定理可求得 $AB=\frac{2\sqrt{3}}{3}$.

在$\triangle ABC$ 中,$\tan\angle BAC=\tan\angle OAB=\frac{\sqrt{3}}{3}$,可求得 $AC=\frac{4}{3}$.

(2) 方法一:当 B 不与 O 重合时,延长 CB 交 y 轴于点 D,过 C 作 $CH\perp x$ 轴,交 x 轴于点 H,则可证得 $AC=AD$,$BD=BC$,

$\because AO\perp OB$,$AB\perp BD$,$\therefore \triangle ABO\backsim\triangle BDO$,则 $OB^2=AO\times OD$,即$\left(\frac{x}{2}\right)^2=1\times|-y|$.

化简得:$y=\frac{x^2}{4}$,当 O,B,C 三点重合时,$y=x=0$,$\therefore$ y 与 x 的函数关系式为:$y=\frac{x^2}{4}$.

方法二:过点 C 作 $CG\perp x$ 轴,交 AB 的延长线于点 G,则 $AC^2=(1-y)^2+x^2=(1+y)^2$,化简即可得.

(3) 设直线的解析式为 $y=kx+b$,则由题意可得:$\begin{cases}y=kx+b\\ y=\frac{1}{4}x^2\end{cases}$,消去 y 得:$x^2-4kx-4b=0$,则有

$\begin{cases}x_1+x_2=4k\\x_1\times x_2=-4b,\end{cases}$ 由题设知：$x_1^2+x_2^2-6(x_1+x_2)=8$，即$(4k)^2+8b-24k=8$，且$b=-1$，

则$16k^2-24k-16=0$，

解之得：$k_1=2$，$k_2=-\frac{1}{2}$，

当$k_1=2$，$b=-1$时，$\Delta=16k^2+16b=64-16>0$，符合题意；

当$k_2=-\frac{1}{2}$，$b=-1$时，$\Delta=16k^2+16b=4-16<0$，不合题意(舍去)，

∴ 所求的直线l的解析式为：$y=2x-1$.

说明　(2)中的方法二应用勾股定理确定几何量的函数关系式，是有直角三角形时常用到的有效方法.

【热点考题精练】

1. 填空题

(1)(南昌市，1999)有一个边长为2的正方形，若边长增加$x$cm，则面积的增加值y(cm^2)与边长的增加值x(cm)之间的函数关系式是_____.

(2)(广西，1992)正方形$ABCD$的边长为2，P为AB上一动点(P不与A，B重合)，过P作平行于对角线AC，BD的直线，分别交BC，AD于Q，R，设$\triangle PQR$的面积为y，AP为x，则y与x之间的函数关系式为_____.

(3)(浙江省，1996)平行四边形相邻两边长分别是x，y，它的周长是30，则y关于x的函数关系式是_____.

(4)(河北省，2002)有一面积为60的梯形，其上底长是下底长的$\frac{1}{3}$，若下底长为x，高为y，则y与x的函数关系式是_____.

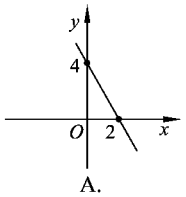
(5)(太原市，2002)$\triangle OPQ$是边长为2的等边三角形，若反比例函数图象过点P，则它的解析式是_____.

2. 选择题

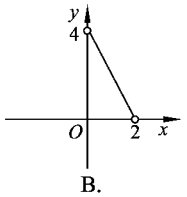
(1)(云南省，1995)设正方形的周长为x，它的外接圆半径为y，则y与x的函数关系是(　　).

A. $y=\frac{\sqrt{2}}{8x}$　　B. $y=\frac{\sqrt{2}}{8}x$　　C. $y=\frac{\sqrt{2}}{8}x^2$　　D. $y=\frac{\sqrt{2}}{4}x$

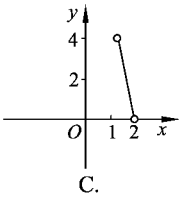
(2)(黄冈市，1997)等腰三角形的周长为4，底边长为y是腰长x的函数，则该函数的大致图象是(　　).



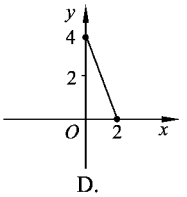
A.



B.

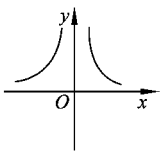


C.

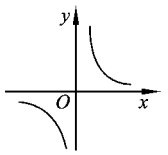


D.

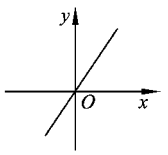
(3)(安徽省，1994)三角形的面积为8cm^2，这时底边上的高$y$cm与底边$x$cm之间的函数关系式的大致图象应是(　　).



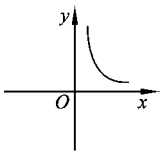
A.



B.

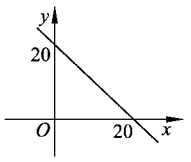


C.

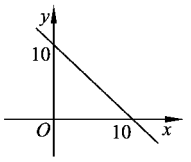


D.

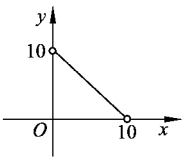
(4)(德阳市,2000)将一段长为20m的铁丝围成矩形,则矩形的长(m)与宽(m)之间的函数关系的大致图象是(　　).



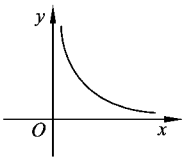
A.



B.



C.



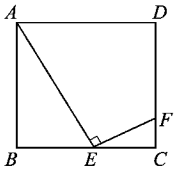
D.

(5)(哈尔滨市,2006)已知一个等腰三角形的底边长为5,这个等腰三角形的腰长为x,则x的取值范围为(　　).

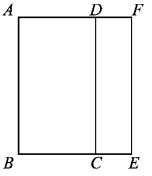
A. $0<x<\frac{5}{2}$　　B. $x\geqslant\frac{5}{2}$　　C. $x>\frac{5}{2}$　　D. $0<x<10$

(6)(山东省,1998)如图,在边长为a的正方形$ABCD$的一边BC上任取一点E,作$EF\perp AE$交CD于点F,如果$BE=x$,$CF=y$,那么用x的代数式表示y是(　　).

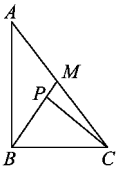
A. $y=-\frac{x^2}{a}$　　B. $y=\frac{x^2}{a}-x$　　C. $y=-x^2+\frac{x}{a}$　　D. $y=x^2+\frac{x}{a}$



第2(6)题



第3题



第5题

3.(厦门市,2006)如图,学生生物兴趣小组的同学们用围栏围成了一个面积为24m^{2}的矩形饲养场地$ABCD$,设BC为xm,AB为ym.

(1)求y与x的函数关系式.

(2)延长BC至E,使CE比BC少1m,围成一个新的矩形$ABEF$,结果场地的面积增加了16m^2,求BC的长.

4.(呼和浩特市,2002;武汉市,2003)等腰$\triangle ABC$周长为10cm,底边BC长为$y$cm,腰AB长为$x$cm.

(1)写出y关于x的函数关系式;

(2)求x的取值范围;

(3)求y的取值范围.

5.(咸阳市,1999)如图,在直角$\triangle ABC$中,$\angle C=90°$,$AC=20$cm,$BC=15$cm,CM是AB边上的中线.在CM上取一动点P(点P与C,M点不重合).求出$\triangle BPC$的面积y(cm^2)与CP的长x(m)之间的函数关系式.

6.(广西,1995)在直角坐标系中,已知点$M(6,0)$,又点$N(x,y)$在第一象限内且$x+y=8$,设$\triangle OMN$的面积为S.

(1)写出S与x之间的函数关系式;

(2)求x的取值范围;

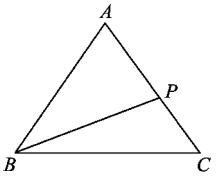
(3)在直角坐标系内作出该函数的图象.

7.(烟台市,2001)如图,$\triangle ABC$中,$AB=AC=5$,$BC=6$,P为AC上的一动点(点P与点C不重合),点P到点C距离为x,$\triangle BPC$的面积为y,求y与x的函数关系式,并写出x的取值范围.

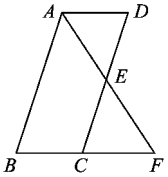
8.(黑龙江省,2001)如图,$\square ABCD$中,$AB=4$cm,$BC=1$cm,E是CD边上一动点,AE,BC的延长线交于点F,设$DE=x$(cm),$BF=y$(cm).

(1)求y(cm)与x(cm)之间的函数关系式,并写出自变量x的取值范围;

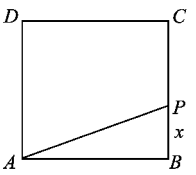
(2)画出此函数图象.



第 7 题



第 8 题



第 9 题

9. (乌鲁木齐市,2001)如图,正方形 $ABCD$ 的边长为$\sqrt{2}$,有一点 P 在 BC 上运动. 设 $PB=x$,梯形 $APCD$ 的面积为 y.

(1) 写出 y 与 x 的函数关系式;

(2) 如果 $S_{\triangle ABP}=\frac{1}{2}S_{梯形APCD}$,请确定 P 点的位置.

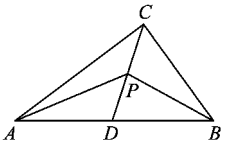
10. (呼和浩特市,1997)如图,在 Rt$\triangle ABC$ 中,$\angle ACB=90°$,$AC=20$cm,$BC=15$cm.

(1) 求 AB 边上的中线 CD 的长;

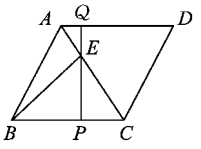
(2) 在 CD 上取异于 C,D 的点 P,试求$\triangle ABP$ 的面积 y(cm^2)与 CP 的长 x(cm)之间的函数关系式;

(3) 作出该函数的图象.

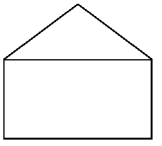
11. 如图,在$\square ABCD$ 中,$BC=2$,P 为 BC 上的动点(但不与 B,C 重合),E 是 AC 上一点,$S_{\triangle BAE}:S_{\triangle BCE}=1:2$,$PE$ 的延长线交 AD 于 Q,设 $BP=x$,$AQ=y$,求 y 与 x 间的函数关系式,并确定自变量 x 的取值范围.



第 10 题



第 11 题


第 14 题

12. (海淀区,1996)已知:在矩形 $ABCD$ 中,$AB=2$,$BC=3$,P 是 BC 边上与 B,C 两点不重合的任意一点,设 $PA=x$,D 点到 PA 的距离为 y,求 y 与 x 之间的函数关系式,并求出自变量 x 的取值范围.

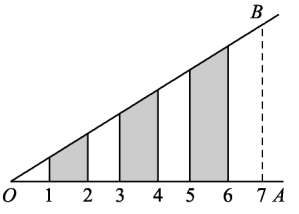
13. (广州市,1992)在 Rt$\triangle ABC$ 中,CD 是斜边 AB 上的中线,$BC=4$,$AC=3$.

(1) 在 CD 上取一点 P(点 C、D 除外). 设$\triangle APB$ 的面积为 y,CP 的长为 x,求 y 与 x 之间的函数关系式;

(2) 在直角坐标系中,作出上述函数的图象.

14. (北京市崇文区,1997)如图,周长为 24 的凸五边形 $ABCDE$ 被对角线 BE 分成为等腰三角形 ABE 及矩形 $BCDE$,且 $AB=AE=ED$. 设 AB 的长为 x,CD 的长为 y. 求 y 与 x 之间的函数关系式. 写出自变量 x 的取值范围,并在坐标系中画出这个函数的图象.

15. (河南省,2006)如图,$\angle AOB=45°$,过 OA 上到点 O 的距离分别为 1,2,3,4,…的点作 OA 的垂线与 OB 相交,再按一定规律标出一组如图所示的黑色梯形. 设前 n 个黑色梯形的面积和为 S_n.



第 15 题

(1) 请完成下面的表格:

n	1	2	3	…
S_n				

(2) 已知 S_n 与 n 之间满足一个二次函数关系,试求出这个二次函数的解析式.

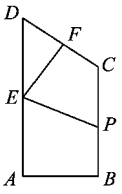
16. (绵阳市,2003)已知四边形 $ABCD$ 的周长是 24cm,边 $AB=x$cm,边 BC 比 AB 的 2 倍长 3cm,边 CD 的长等于 AB 与 BC 两条边长的和.

(1) 用 x 的代数式表示 AD 的长;

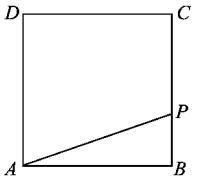
(2) 求 x 的取值范围.

17.(甘肃省,2003)如图,在梯形 $ABCD$ 中,$BC\parallel AD$,$\angle A=90^\circ$,$AB=2$,$BC=3$,$AD=4$,E 为 AD 的中点,F 为 CD 的中点,P 为 BC 上的动点(不与 B,C 重合).设 BP 为 x,四边形 $PEFC$ 的面积为 y,求 y 关于 x 的函数关系式,并写出 x 的取值范围.

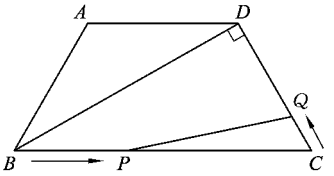
18.(兰州市,2003)如图所示,正方形 $ABCD$ 的边长为 $\sqrt{2}$,有一点 P 在 BC 上运动(P 不与 B,C 重合),设 $PB=x$,图形 $APCD$ 的面积为 y,写出 y 与 x 之间的函数关系式,并画出它的图象.



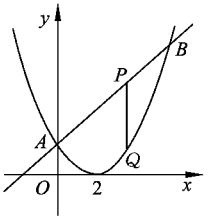
第 17 题



第 18 题



第 19 题



第 20 题

19.(青岛市,2003)已知:如图,梯形 $ABCD$ 中,$AD\parallel BC$,$AB=CD=3$cm,$\angle C=60^\circ$,$BD\perp CD$.

(1) 求 BC,AD 的长度;

(2) 若点 P 从点 B 开始沿 BC 边向点 C 以 2cm/秒的速度运动,点 Q 从点 C 开始沿 CD 边向点 D 以 1cm/秒的速度运动,当 P,Q 分别从 B,C 同时出发时,写出五边形 $ABPQD$ 的面积 S 与运动时间 t 之间的函数关系式,并写出自变量 t 的取值范围(不包含点 P 在 B,C 两点的情况);

(3) 在(2)的前提下,是否存在某一时刻 t,使线段 PQ 把梯形 $ABCD$ 分成两部分的面积比为 1∶5?若存在,求出 t 的值;若不存在,请说明理由.

20.(连云港市,2001)已知二次函数图象的顶点坐标为(2,0),直线 $y=x+2$ 与该二次函数的图象交于 A,B 两点,其中 A 点在 y 轴上.

(1) 求此二次函数的解析式;

(2) P 为线段 AB 上一点(A,B 两端点除外),过 P 作 x 轴的垂线与二次函数的图象交于 Q 点,设线段 PQ 的长为 m,P 点的横坐标为 x,求出 m 与 x 之间的函数关系式并求出自变量 x 的取值范围;

(3) 线段 AB 上是否存在一点 P,使(2)中的线段 PQ 的长等于 5?说明理由.

21.(昆明市,1999)已知:二次函数 $y=\frac{1}{4}x^2-\frac{5}{2}x+6$ 的图象与 x 轴从左到右的两个交点依次为 A,B,与 y 轴的交点为 C.

(1) 求 A,B,C 三点的坐标;

(2) 求过 B,C 两点的一次函数的解析式;

(3) 如果 $P(x,y)$ 是线段 BC 上的动点,O 为坐标原点,试求 $\triangle POA$ 的面积 S 与 x 之间的函数关系式,并求出自变量 x 的取值范围;

(4) 是否存在这样的点 P,使得 $PO=AO$?若存在,求出点 P 的坐标;若不存在,说明理由.

7.2　应用相似形知识

本节主要讲述利用相似三角形的判定与性质定理建立几何量的函数关系式,包括平行线分线段成比例定理的应用.

【经典考题例析】

例 1　(北京市海淀区,2002)如图 7-2-1,在 $\triangle ABC$ 中,$\angle C=90^\circ$,P 为 AB 上一点,且点 P 不与点 A 重合.过点 P 作 $PE\perp AB$ 交 AC 边于 E 点,点 E 不与点 C 重合,若 $AB=10$,$AC=8$,设 AP 的长为 x,四边形

$PECB$ 的周长为 y，求 y 与 x 之间的函数关系式.

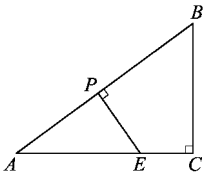


图 7－2－1

解　在△ABC 中，$\angle C=90^\circ$，$AB=10$，$AC=8$，根据勾股定理，得 $BC=6$.

又 $EP\perp AB$，$\therefore\ \angle EPA=\angle ACB$.

$\because\ \angle A$ 为公共角，$\therefore\ \triangle AEP\backsim\triangle ABC$. $\therefore\ \dfrac{AE}{AB}=\dfrac{AP}{AC}=\dfrac{EP}{BC}$.

又 $AP=x$，$\therefore\ \dfrac{AE}{10}=\dfrac{x}{8}=\dfrac{PE}{6}$.

即 $AE=\dfrac{5}{4}x$，$PE=\dfrac{3}{4}x$. $\therefore\ EC=8-\dfrac{5}{4}x$，$BP=10-x$.

$\therefore\ y=PE+EC+CB+BP=\dfrac{3}{4}x+8-\dfrac{5}{4}x+6+10-x=\dfrac{3}{2}x+24$.

设点 E 与点 C 重合，这时，$AE=AC=8$，即 $\dfrac{5}{4}x=8$，$\therefore\ x=\dfrac{32}{5}$.

因点 P 与 A 不重合，点 E 与点 C 不重合. 故自变量 x 的取值范围是 $0<x<\dfrac{32}{5}$.

$\therefore\ y$ 与 x 之间的函数关系式为 $y=-\dfrac{3}{2}x+24\left(0<x<\dfrac{32}{5}\right)$.

说明　利用相似形的性质建立几何量间函数关系式，关键在于先找到能证明三角形相似的条件.

例 2　(深圳市，2001)已知：如图 7－2－2，正方形 $ABCD$，$AB=2$，P 是 BC 边上与 A，C 不重合的任意一点，$DQ\perp AP$ 于 Q.

(1) 求证：△$DAQ\backsim\triangle APB$；

(2) 当点 P 在 BC 上移动时，线段 DQ 也随之变化，设 $PA=x$，$DQ=y$，求 y 与 x 之间函数关系式，并指出 x 的取值范围.

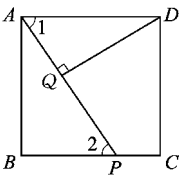


图 7－2－2

解　(1) 证明：$\because$ $ABCD$ 是正方形，$\therefore\ AD/\!/BC$，$\therefore\ \angle 1=\angle 2$.

$\because\ \angle B=90^\circ$，又 $DQ\perp AP$ 于 Q.

$\therefore\ \angle DQA=\angle B=90^\circ$，$\therefore\ \triangle DAQ\backsim\triangle APB$.

(2) $\because\ \triangle DAQ\backsim\triangle APB$. $\therefore\ \dfrac{DQ}{AB}=\dfrac{AD}{AP}$.

$\because\ AB=AD=2$，$PA=x$，$DQ=y$. $\therefore\ \dfrac{y}{2}=\dfrac{2}{x}$. $\therefore\ y=\dfrac{4}{x}$.

当点 P 由点 B 变到点 C 时，AP 从 AB 变大到 AC，但点 P 异于点 B 和 C，

$\therefore\ 2<x<2\sqrt{2}$. $\therefore\ y=\dfrac{4}{x}(2<x<2\sqrt{2})$.

说明　直角三角形是较为特殊的三角形类型，与它相关的三角形相似出现频率较高，所以不仅要特别关注如何证明直角三角形相似的方法，还要十分熟悉与直角三角形相关的几何性质，比如，勾股定理的应用，“同角(或等角)的余角相等”等.

例 3　(广东省，2004)如图 7－2－3，在等腰直角三角形 ABC 中，O 是斜边 AC 的中点，P 是斜边 AC 上的一个动点，D 为 BC 上的一点，且 $PB=PD$，$DE\perp AC$，垂足为点 E.

(1) 求证：$PE=BO$；

(2) 设 $AC=2a$，$AP=x$，四边形 $PBDE$ 的面积为 y，求 y 与 x 之间的函数关系式，并写出自变量的取值范围.

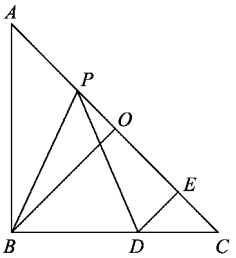


图 7－2－3

分析　四边形 $PBDE$ 是不规则图形，它可以分解为△PBO 与梯形 $BDEO$ 的和.

解　(1) $\because$ △ABC 为等腰直角三角形，O 为斜边 AC 的中点.

$\therefore BO\perp AC, BO=CO=\frac{1}{2}AC. \therefore \angle C=\angle OBC=45°$

$\because DE\perp AC, BO\perp AC. \therefore BO/\!/DE.$

$\because PB=PD, \therefore \angle PBD=\angle PDB, \angle POB=\angle PED=90°,$

$\angle PBO=\angle PBD-\angle OBC=\angle PDB-\angle OBC=\angle PDB-\angle C=\angle DPE,$

$\therefore \text{Rt}\triangle PBO\cong\text{Rt}\triangle DPE. \therefore PE=BO.$

(2) $\because AC=2a, AP=x,$

$\therefore AO=BO=PE=a, DE=PQ=ED=a-x, EO=x.$

$\therefore$ 四边形 $PBDE$ 的面积 $y=S_{\triangle PBO}+S_{\text{梯形}BDEO}=\frac{1}{2}a(a-x)+\frac{1}{2}(2a-x)x=-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}ax+\frac{1}{2}a^2.$

自变量 x 的取值范围是 $0<x<a$.

例 4 (聊城市,2002)如图 7-2-4,正方形 $ABCD$ 的边长为 2cm,P 是边 CD 上一点,连结 AP 并延长与 BC 的延长线交于点 E,当点 P 在 CD 上移动时,$\triangle ABE$ 的面积随之变化.

(1) 设 $PD=x$cm$(0<x\leqslant 2)$,求出 $\triangle ABE$ 的面积 y 与 x 的函数关系式,并画出函数的图象;

(2) 根据(1)中的函数关系式,确定点 P 在什么位置时 $S_{\triangle ABE}=400\text{cm}^2$.

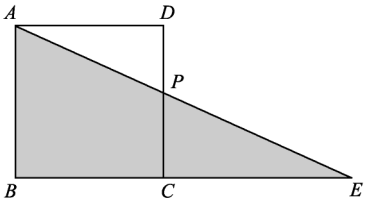


图 7-2-4

解 (1) $\because$ 四边形 $ABCD$ 是正方形,$\therefore AD/\!/BE. \therefore \angle PAD=\angle E. \therefore \text{Rt}\triangle PDA\backsim\text{Rt}\triangle ABE.$

$\therefore \frac{AD}{BE}=\frac{PD}{AB}$. 即 $\frac{2}{BE}=\frac{x}{2}$. 解得 $BE=\frac{4}{x}. \therefore S_{\triangle ABE}=\frac{1}{2}\cdot AB\cdot BE=\frac{1}{2}\cdot 2\cdot\frac{4}{x}=\frac{4}{x}.$

即 $y=\frac{4}{x}(0<x\leqslant 2)$. 其图象如图 7-2-5.

(2) 将 $y=400$ 代入 $y=\frac{4}{x}$. 得 $x=0.01$.

$\therefore$ 当 $PD=0.01$cm 时,$S_{\triangle ABE}=400\text{cm}^2$.

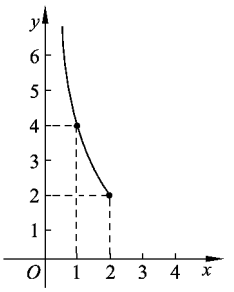


图 7-2-5

说明 本题中因 $\triangle ABE$ 的面积等于 $\frac{1}{2}AB\cdot BE$,线段 AB 的长度是已知条件,所以把 BE 的长与变量 x 间建立起联系是关键之处,它们分别处于 $\text{Rt}\triangle PDA$ 与 $\text{Rt}\triangle ABE$ 之中,故联想证这两个三角形相似便是顺理成章的事了. 另外要特别注意的是,自变量一般都有一定的取值范围,其解析式对应的图象要注重其实际意义.

例 5 (徐州市,2005)已知:如图 7-2-6,在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中,$\angle C=90°, BC=4, AC=8$,点 D 在斜边 AB 上,作 $DE\perp AC$ 于 E,$DF\perp BC$ 于 F,得四边形 $DECF$. 设 $DE=x, DF=y$.

(1) 用关于 y 的代数式表示 AE,$AE=$_____;

(2) 求 y 与 x 之间的函数关系式,并求出 x 的取值范围;

(3) 设四边形 $DECF$ 的面积为 S,求 S 与 x 之间的函数关系式,并求出 S 的最大值.

分析 (1) 很明显,$AE=8-y$.

(2) 要求出 y 与 x 之间的函数关系式,只要应用已知图形的有关度量性质确定 y 与 x 之间的相等关系式即可.

$\because DE/\!/BC, \therefore \frac{DE}{BC}=\frac{AE}{AC}, \therefore \frac{x}{4}=\frac{8-y}{8}. \therefore y=8-2x(0<x<4).$

(3) 由矩形面积公式,得 $S=xy=x(8-2x)=-2x^2+8x=-2(x-2)^2+8.$

$\therefore$ 当 $x=2$ 时,S 取得最大值 8.

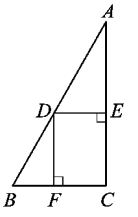


图 7-2-6

说明 本题是应用平行线分线段成比例定理确定 y 与 x 之间的函数关系式;应用矩形面积公式确定 S 与

x 之间的函数关系式.

例 6　(绍兴市,2002)如图 7－2－7,已知平面直角坐标系中三点 $A(4,0)$,$B(0,4)$,$P(x,0)(x<0)$,作 $PC\perp PB$ 交过点 A 的直线 l 于点 $C(4,y)$.

(1) 求 y 关于 x 的函数解析式;

(2) 当 x 取最大整数时,求 BC 与 PA 的交点 Q 的坐标.

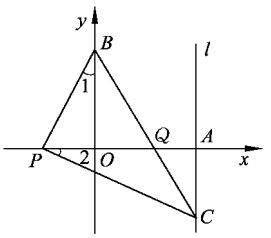


图 7－2－7

解　(1) $\because BO\perp PO$,$PC\perp PB$,$\therefore \angle 1=\angle 2$.

$\because A(4,0)$,$C(4,y)$在 l 上,$\therefore \angle BOP=\angle PAC=90^\circ$,

$\therefore \triangle BOP\backsim\triangle PAC$. $\therefore \dfrac{PO}{AC}=\dfrac{BO}{PA}$,$\therefore \dfrac{|x|}{|y|}=\dfrac{4}{|x|+4}$.

$\because x<0$,$y<0$,$\therefore \dfrac{x}{y}=\dfrac{4}{4-x}$,$\therefore y=-\dfrac{1}{4}x^2+x$.

(2) $\because x<0$,且 x 取最大整数,$\therefore x=-1$,

此时 $y=-\dfrac{1}{4}\times(-1)^2-1=-\dfrac{5}{4}$.

$\because BO/\!/l$,$\therefore \triangle BOQ\backsim\triangle CAQ$,$\therefore \dfrac{OQ}{QA}=\dfrac{BO}{AC}$.

设 Q 点坐标为$(a,0)$,则$\dfrac{a}{4-a}=\dfrac{4}{\left|-\dfrac{5}{4}\right|}$. $\therefore 5a=16(4-a)$,$\therefore a=\dfrac{64}{21}$. $\therefore Q$ 点的坐标为$\left(\dfrac{64}{21},0\right)$.

说明　几何量间的函数关系式体现了数与形的结合,借助图形帮助分析,探寻量与量的关系,是个非常重要的步骤.本题中,正是根据图形中显示的点 P,点 C 所在的象限,从而确定出 $x<0$,$y<0$ 的结论,从而正确建立函数解析式.

例 7　(连云港市,1999)$\triangle ABC$ 中,$BC=4$,$\angle B=45^\circ$,$AB=3\sqrt{2}$,M,N 分别 AB,AC 上的点,$MN/\!/BC$(如图 7－2－8),设 $MN=x$,$\triangle MNC$ 的面积为 S.

(1) 求出 S 与 x 之间的函数关系式,并写出自变量 x 的取值范围;

(2) 是否存在平行线段 MN,使$\triangle MNC$ 的面积等于 2? 若存在,求出 MN 的长;若不存在,请说明理由.

解　(1) 过点 A 作 $AD\perp BC$ 于 D,则在 Rt$\triangle ABD$ 中,$AB=3\sqrt{2}$,$\angle B=45^\circ$,

$\therefore AD=3\sqrt{2}\cdot\sin45^\circ=3\sqrt{2}\cdot\dfrac{\sqrt{2}}{2}=3$.

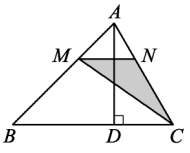


图 7－2－8

设$\triangle MNC$ 的 MN 边上的高为 h,$\because MN/\!/BC$,$MN=x$,$BC=4$,

$\therefore \dfrac{x}{4}=\dfrac{(3-h)}{3}$. 解得 $h=\dfrac{12-3x}{4}$.

$\therefore S=\dfrac{1}{2}MN\cdot h=\dfrac{1}{2}x\cdot\dfrac{12-3x}{4}=-\dfrac{3}{8}x^2+\dfrac{3}{2}x$. 自变量 x 的取值范围是 $0<x<4$.

(2) 若存在平行线段 MN,使 $S_{\triangle MNC}=2$,则方程 $-\dfrac{3}{8}x^2+\dfrac{3}{2}x=2$ 有实数解,即 $3x^2-12x+16=0$ 有实数解.

但方程的判别式 $\Delta=12^2-4\times3\times16=-48<0$,与方程有实数解矛盾.

$\therefore$ 不存在这样的平行线段 MN,使 $S_{\triangle MNC}=2$.

说明　本题是应用"相似三角形对应高线之比等于相似比"的性质建立函数解析式的.(2)中应用根的判别式来确定几何问题结果,是一个很好的途径.

例 8　(济南市,1996)已知锐角$\triangle ABC$ 的边长 BC 的长为 8,面积为 24,平行于 BC 边的直线分别与边 AB,AC 交于 M,N,以 MN 为斜边在点 A 异侧作等腰直角三角形 MPN,设此等腰直角三角形与$\triangle ABC$ 的公共部分的面积为 y,MN 的长为 x.

(1) 求$\triangle ABC$ 的 BC 边上的高;

(2) 求 y 与 x 之间的函数关系式;并写出自变量 x 的取值范围.

分析 (1) 利用三角形面积公式,求出高;当直线 MN 在平行于 BC 的前提下,上下移动时,$\triangle MNP$ 的位置也随之变化,应注意$\triangle MNP$ 在$\triangle ABC$ 的内部和$\triangle MNP$ 的顶点 P 在$\triangle ABC$ 的外部这两种情况.

解 (1) $\triangle ABC$ 的 BC 边上的高为 $h=6$.

(2) ⅰ. 如图 7−2−9,若等腰 Rt$\triangle MNP$ 全部落在$\triangle ABC$ 内部,则

$S_{\triangle MNP}=\frac{1}{2}PM\cdot PN=\frac{1}{2}PM^2=\frac{1}{4}MN^2=\frac{1}{4}x^2$.

当 P' 点在 BC 边上,等腰直角三角形 $M'N'P'$ 最大.

作 $AD\perp BC$,垂足为 D 点,AD 交 $M'N'$ 于 E.

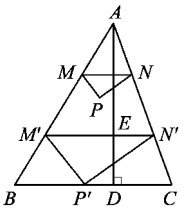


图 7−2−9

$\because M'N'\parallel BC,\therefore \triangle AM'N'\backsim\triangle ABC.\therefore \frac{x}{BC}=\frac{AE}{AD}$. 易求得 $DE=\frac{1}{2}M'N'=\frac{1}{2}x$.

$\therefore \frac{x}{8}=\frac{6-\frac{1}{2}x}{6}$,解得 $x=4.8.\therefore y=\frac{1}{4}x^2(0<x\leqslant 4.8)$.

ⅱ. 如图 7−2−10,若等腰直角三角形的一部分落在$\triangle ABC$ 外部,此时,等腰 Rt$\triangle M''N''P''$ 与$\triangle ABC$ 的公共部分为梯形 $M''GHN''$,AD 交 $M''N''$ 于 E' 点,则

$y=S_{梯形M''GHN''}=\frac{1}{2}(GH+M''N'')\cdot DE'$.

$\because M''N''\parallel BC,\therefore \frac{M''N''}{BC}=\frac{AE'}{AD}$,即 $\frac{x}{8}=\frac{6-DE'}{6}$,$\therefore DE'=6-\frac{3}{4}x$.

由条件推出 $GH=M''N''-2DE'=x-2\left(6-\frac{3}{4}x\right)=\frac{5}{2}x-12$.

$\therefore y=\frac{1}{2}\left[\left(\frac{5}{2}x-12\right)+x\right]\left(6-\frac{3}{4}x\right)\therefore y=-\frac{21}{16}x^2+15x-35(4.8<x\leqslant 8)$.

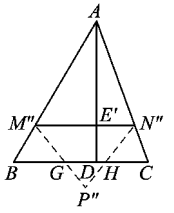


图 7−2−10

例 9 (盐城市,2005)已知:在矩形 $ABCD$ 中,$AB=2$,E 为 BC 边上一点,沿直线 DE 将矩形折叠,使 C 点落在 AB 边上的 C' 点处. 过 C' 作 $C'H\perp DC$,$C'H$ 分别交 DE,DC 于点 G,H,连结 CG,CC',CC' 交 GE 于点 F.

(1) 求证:四边形 $CGC'E$ 为菱形;

(2) 设 $\sin\angle CDE=x$,并设 $y=\frac{C'E+DG}{DE}$,试将 y 表示成 x 的函数;

(3) 当(2)中所求得的函数的图象达到最高点时,求 BC 的长.

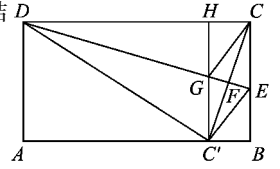


图 7−2−11

解 (1) 根据题意,C,C' 两点关于直线 DE 成轴对称,

$\therefore DE$ 是线段 CC' 的垂直平分线,

故 $DC=DC'$,$GC=GC'$,$EC=EC'$,$\angle C'EG=\angle CEG$

由 $C'H\perp DC$,$BC\perp DC$ 得:$C'G\parallel CE.\therefore \angle C'GE=\angle GEC$

$\because \angle C'EG=\angle CEG,\therefore \angle C'GE=\angle C'EG,\therefore C'G=C'E,\therefore C'G=C'E=EC=GC$,

$\therefore$ 四边形 $C'GCE$ 为菱形.

(2) 解法一:由题意知:在 Rt$\triangle DCE$ 中,$\sin\angle CDE=\frac{CE}{DE}=x$

由(1)得:$CC'\perp GE$,又 $DC'\perp C'E$

$\therefore$ Rt$\triangle C'EF\backsim$Rt$\triangle DEC'$,$\therefore \frac{C'E}{DE}=\frac{EF}{EC'}$,即 $C'E^2=DE\cdot EF$

$\therefore \frac{EF}{DE}=\frac{C'E^2}{DE^2}=\left(\frac{CE}{DE}\right)^2=x^2$,$\frac{DG}{DE}=\frac{DE-GE}{DE}=1-2.\frac{EF}{DE}=1-2x^2$

$\therefore \frac{C'E+DG}{DE}=\frac{C'E}{DE}+\frac{DG}{DE}=x+1-2x^2$,即 $y=-2x^2+x+1$.

解法二:设 $DE=a$,由 $\sin\angle CDE=\frac{CE}{DE}=x$,则 $CE=ax$,又 $DC\perp CE$,$CF\perp DE$,

$\therefore$ $\triangle DCE\backsim\triangle CFE$,

$\therefore$ $\frac{CE}{FE}=\frac{DE}{CE}$

$\therefore$ $EF=\frac{CE^2}{DE}=\frac{(ax)^2}{a}=ax^2$,$DG=DE-2EF=a-2ax^2$.

$\therefore$ $\frac{C'E+DG}{DE}=\frac{CE+DG}{DE}=\frac{ax+a-2ax^2}{a}=x+1-2x^2$.

$\therefore$ $y=-2x^2+x+1$.

(3) 由(2)得:$y=-2x^2+x+1=-2\left(x-\frac{1}{4}\right)^2+\frac{9}{8}$

可见当 $x=\frac{1}{4}$时,此函数的图象达到最高点,此时$\frac{DG}{DE}=1-2x^2=1-\frac{1}{8}=\frac{7}{8}$

$\because$ $GH/\!/CE$,

$\therefore$ $\frac{DH}{DC}=\frac{DG}{DE}=\frac{7}{8}$,由 $DC=2$,得 $DH=\frac{7}{4}$.

在 Rt$\triangle DHC'$中,$C'H=\sqrt{DC^2-DH^2}=\sqrt{DC^2-DH^2}=\sqrt{4-\frac{49}{16}}=\frac{\sqrt{15}}{4}$.

$\therefore$ $BC=\frac{\sqrt{15}}{4}$.

说明　解答(2)的关键在于转化思想的应用.如把三角函数值转化为线段的比;把$\frac{C'E+DG}{DE}$转化为同分母分式相加,这种思想是重要的几何解题手段.

例 10　(南平市课改区,2006)如图 7－2－12,正方形 $ABCD$ 的边长为 1,点 E 是 AD 边上的动点,从点 A 沿 AD 向 D 运动,以 BE 为边,在 BE 的上方作正方形 $BEFG$,连结 CG. 请探究:

(1) 线段 AE 与 CG 是否相等? 请说明理由;

(2) 若设 $AE=x$,$DH=y$,当 x 取何值时,y 最大?

(3) 连结 BH,当点 E 运动到 AD 的何位置时,$\triangle BEH\backsim\triangle BAE$?

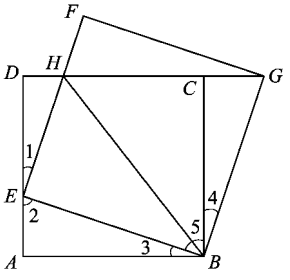


图 7－2－12

解　(1) $AE=CG$.

理由:正方形 $ABCD$ 和正方形 $BEFG$ 中.

$\angle 3+\angle 5=90°$,$\angle 4+\angle 5=90°$,$\therefore$ $\angle 3=\angle 4$.

又 $AB=BC$,$BE=BG$,$\therefore$ $\triangle ABE\cong\triangle CBG$. $\therefore$ $AE=CG$.

(2) $\because$ 正方形 $ABCD$ 和正方形 $BEFG$,

$\therefore$ $\angle A=\angle D=\angle FEB=90°$

$\therefore$ $\angle 1+\angle 2=90°$,$\angle 2+\angle 3=90°$$\therefore$ $\angle 1=\angle 3$.

又$\because$ $\angle A=\angle D$,

$\therefore$ $\triangle ABE\backsim\triangle DEH$. $\therefore$ $\frac{DH}{AE}=\frac{DE}{AB}$. $\therefore$ $\frac{y}{x}=\frac{1-x}{1}$.

$\therefore$ $y=-x^2+x=-\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{4}$. 当 $x=\frac{1}{2}$时,y 有最大值为$\frac{1}{4}$.

(3) 当 E 点是 AD 的中点时,$\triangle BEH\backsim\triangle BAE$.

理由:$\because$ E 是 AD 中点,$\therefore$ $AE=\frac{1}{2}$. $\therefore$ $DH=\frac{1}{4}$.

又$\because$ $\triangle ABE\backsim\triangle DEH$,$\therefore$ $\frac{EH}{BE}=\frac{DH}{AE}=\frac{1}{2}$.