图书在版编目(CIP)数据

新黄冈数学题库·热点题(上)/南秀全主编. —青岛:
青岛出版社,2003.6
ISBN 978-7-5436-2876-2

Ⅰ.新… Ⅱ.南… Ⅲ.数学课—初中—习题—升学
参考资料 Ⅳ.G634.605

中国版本图书馆CIP数据核字(2003)第040260号

书　　名　新黄冈数学题库·热点题(上)
主　　编　南秀全
本册主编　姜文清
出版发行　青岛出版社
社　　址　青岛市徐州路77号(266071)
本社网站　http://www.qdpub.com
邮购电话　13335059110　(0532)85814750(兼传真)　80998664
责任编辑　郭东明　程兆军
封面设计　乔　峰
照　　排　青岛海讯科技有限公司
印　　刷
出版日期　2008年6月第4版　2008年6月第4次印刷
开　　本　16开(787mm×1092mm)
印　　张　20.25
字　　数　300千
书　　号　ISBN 978-7-5436-2876-2
定　　价　26.80元

编校质量、盗版监督电话　(0532)80998671
青岛版图书售出后如发现印装质量问题,请寄回青岛出版社印刷物资处调换。
电话　(0532)80998826

需要全本请访问 www.ertongbook.com

第六章　坐标与几何的问题

【经典考题精析】

与坐标有关的问题(特别是综合题),是近年来中考数学试卷的常见题型.这类试题综合性强,知识覆盖面广,在考查学生综合运用基础知识方面,特别是在考查学生运用数形结合、构造直角三角形的思想方法等方面,有着独特的功能与魅力.这类题与勾股定理、三角形的面积、全等三角形、相似三角形、三角函数等有关知识紧密相连.

例 1　(福建省龙岩市课改区,2006)如图 6－1,抛物线 $y=ax^2+bx$ 过点 $A(4,0)$,正方形 $OABC$ 的边 BC 与抛物线的一个交点为 D,点 D 的横坐标为 3,点 M 在 y 轴负半轴上,直线 l 过 D、M 两点且与抛物线的对称轴交于点 H,$\tan\angle OMD=\frac{1}{3}$.

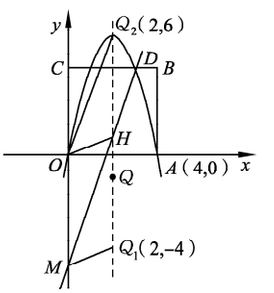


图 6－1

(1) 写出 a、b 的值:$a=$_____、$b=$_____,并写出点 H 的坐标(_____,_____);

(2) 如果点 Q 是抛物线对称轴上的一个动点,那么是否存在点 Q,使得以点 O、M、Q、H 为顶点的四边形是平行四边形?若存在,求出点 Q 的坐标;不存在,请说明理由.

解　(1) $a=-\frac{4}{3}$　$b=\frac{16}{3}$　$H(2,1)$

(2) 答:存在这样的点 Q,使得点 O、M、Q、H 为顶点的四边形为平行四边形.由题意可知,$\triangle MDC$ 是直角三角形,$CD=3$,$OC=4$　$\because\ \tan\angle OMD=\frac{1}{3}$　$\therefore\ \frac{CD}{CM}=\frac{1}{3}$　$\therefore\ CM=9$　$\therefore\ OM=9-4=5$

① 要使 $OMQH$ 是平行四边形,由题意知 $OM/\!/HQ$,只须 $OM=HQ$ $\because$ 点 H 的纵坐标是 1 $\therefore$ 点 $Q_1(2,-4)$

② 要使 $OMHQ$ 是平行四边形,由题意知 $OM/\!/HQ$,只须 $OM=HQ$ $\because$ 点 H 的纵坐标是 1 $\therefore$ 点 $Q_2(2,6)$

评析　本题充分利用了正方形 $OABC$ 的性质,结合 $\tan\angle OMD=\frac{1}{3}$ 来求 a、b 之值和 H 点的坐标.第二问中动点问题与平行四边形结合是近几年中考命题的一个热点.

例 2　(广安市,2006)如图 6－2 所示,在平面直角坐标系 xOy 中,正方形 $OABC$ 的边长为 2cm,点 A、C 分别在 y 轴的负半轴和 x 轴的正半轴上,抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 经过点 A、B,且 $12a+5c=0$.

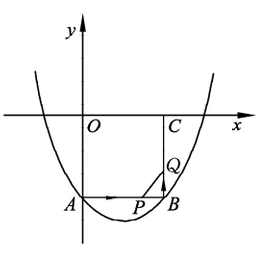


图 6－2

(1) 求抛物线的解析式;

(2) 如果点 P 由点 A 开始沿 AB 边以 2cm/s 的速度向点 B 移动,同时点 Q 由点 B 开始沿 BC 边以 1cm/s 的速度向点 C 移动.

① 移动开始后第 t 秒时,设 $S=PQ^2(\text{cm}^2)$,试写出 S 与 t 之间的函数关系式,并写出 t 的取值范围;

② 当 S 取得最小值时,在抛物线上是否存在点 R,使得以 P、B、Q、R 为顶点的四边形是平行四边形?如果

存在，求出 R 点的坐标，如果不存在，请说明理由.

解　(1) 据题意知：$A(0,-2)$，$B(2,-2)$.

∵ A 点在抛物线上，∴ $C=-2$.

∵ $12a+5c=0$，∴ $a=\frac{5}{6}$.

由 $AB=2$ 知抛物线的对称轴为：$x=1$.

即：$-\frac{b}{2a}=1\Rightarrow b=-\frac{5}{3}$.

∴ 抛物线的解析式为：$y=\frac{5}{6}x^2-\frac{5}{3}x-2$.

(2) ① 由图象知：$PB=2-2t$，$BQ=t$.

∴ $S=PQ^2=PB^2+BQ^2=(2-2t)^2+t^2$.

即 $S=5t^2-8t+4(0\leqslant t\leqslant 1)$.

② 假设存在点 R，可构成以 P、B、R、Q 为顶点的平行四边形.

∵ $S=5t^2-8t+4(0\leqslant t\leqslant 1)$，

∴ $S=5\left(t-\frac{4}{5}\right)^2+\frac{4}{5}(0\leqslant t\leqslant 1)$.

∴ 当 $t=\frac{4}{5}$ 时，S 取得最小值 $\frac{4}{5}$.

这时 $PB=2-\frac{8}{5}=0.4$，$BQ=0.8$，$P(1.6,-2)$，$Q(2,-1.2)$.

分情况讨论：

A 假设 R 在 BQ 的右边，这时 $QR\perp\!\!\!\perp PB$，则：

R 的横坐标为 2.4，R 的纵坐标为 -1.2，即 $(2.4,-1.2)$.

代入 $y=\frac{5}{6}x^2-\frac{5}{3}x-2$，左右两边相等.

∴ 这时存在 $R(2.4,-1.2)$ 满足题意.

B 假设 R 在 BQ 的左边，这时 $PR\perp\!\!\!\perp QB$，则：

R 的横坐标为 1.6，纵坐标为 -1.2，即 $(1.6,-1.2)$.

代入 $y=\frac{5}{6}x^2-\frac{5}{3}x-2$，左右两边不相等，$R$ 不在抛物线上.

C 假设 R 在 PB 的下方，这时 $PR\perp\!\!\!\perp QB$，则：

$R(1.6,-2.4)$ 代入 $y=\frac{5}{6}x^2-\frac{5}{3}x-2$，左右不相等，$R$ 不在抛物线上.

综上所述，存点一点 $R(2.4,-1.2)$ 满足题意.

评析　广安市 2006 年的这道中考题立意新颖，综合性强，全面的考察了学生的基础知识和综合能力，第(1)问利用正方形的性质求抛物线的性质，第(2)问考察了分类讨论思想等，值得我们学习.

例 3　(十堰市实验区，2006)综合运用：已知抛物线 C_1：$y=-x^2+2mx+n$(m，n 为常数，且 $m\neq 0$，$n>0$)的顶点为 A，与 y 轴交于点 C；抛物线 C_2 与抛物线 C_1 关于 y 轴对称，其顶点为 B，连接 AC，BC，AB.

注：抛物线 $y=ax^2+bx+c(a\neq 0)$ 的顶点坐标为 $\left(-\frac{b}{2a},\frac{4ac-b^2}{4a}\right)$.

(1) 请在横线上直接写出抛物线 C_2 的解析式：_____；

(2) 当 $m=1$ 时，判定 $\triangle ABC$ 的形状，并说明理由；

(3) 抛物线 C_1 上是否存在点 P，使得四边形 $ABCP$ 为菱形？如果存在，请求出 m 的值；如果不存在，请说明理由.

解　(1) $y=-x^2-2mx+n$.

(2) 当 $m=1$ 时,$\triangle ABC$ 为等腰直角三角形.

理由如下:

如图:∵ 点 A 与点 B 关于 y 轴对称,点 C 又在 y 轴上,

∴ $AC=BC$.

过点 A 作抛物线 C_1 的对称轴交 x 轴于 D,过点 C 作 $CE\perp AD$ 于 E.

∴ 当 $m=1$ 时,顶点 A 的坐标为 $A(1,1+n)$,∴ $CE=1$.

又∵ 点 C 的坐标为 $(0,n)$,

∴ $AE=1+n-n=1$. ∴ $AE=CE$.

从而 $\angle ECA=45°$,∴ $\angle ACy=45°$.

由对称性知 $\angle BCy=\angle ACy=45°$,∴ $\angle ACB=90°$.

∴ $\triangle ABC$ 为等腰直角三角形.

(3) 假设抛物线 C_1 上存在点 P,使得四边形 $ABCP$ 为菱形,则 $PC=AB=BC$.

由(2)知,$AC=BC$,∴ $AB=BC=AC$.

从而 $\triangle ABC$ 为等边三角形.

∴ $\angle ACy=\angle BCy=30°$,

∵ 四边形 $ABCP$ 为菱形,且点 P 在 C_1 上,∴ 点 P 与点 C 关于 AD 对称.

∴ PC 与 AD 的交点也为点 E,因此 $\angle ACE=90°-30°=60°$.

∵ 点 A,C 的坐标分别为 $A(m,m^2+n)$,$C(0,n)$,

∴ $AE=m^2+n-n=m^2$,$CE=|m|$.

在 $\mathrm{Rt}\triangle ACE$ 中,$\tan 60°=\dfrac{AE}{CE}=\dfrac{m^2}{|m|}=\sqrt{3}$.

∴ $|m|=\sqrt{3}$,∴ $m=\pm\sqrt{3}$.

故抛物线 C_1 上存在点 P,使得四边形 $ABCP$ 为菱形,此时 $m=\pm\sqrt{3}$.

例 4　(湖南省岳阳市课改区,2006) 如图 6-3,抛物线 $y=-\dfrac{\sqrt{3}}{3}x^2-\dfrac{2}{3}\sqrt{3}x+\sqrt{3}$ 交 x 轴于 A、B 两点,交 y 轴于点 C,顶点为 D.

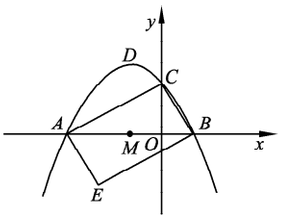


图 6-3

(1) 求点 A、B、C 的坐标;

(2) 把 $\triangle ABC$ 绕 AB 的中点 M 旋转 180°,得到四边形 $AEBC$.

① 求 E 点的坐标;

② 试判断四边形 $AEBC$ 的形状,并说明理由.

(3) 试探求:在直线 BC 上是否存在一点 P,使得 $\triangle PAD$ 的周长最小,若存在,请求出点 P 的坐标,若不存在,请说明理由.

解　(1) $y=-\dfrac{\sqrt{3}}{3}x^2-\dfrac{2\sqrt{3}}{3}x+\sqrt{3}$,令 $x=0$,得 $y=\sqrt{3}$,

令 $y=0$,即 $-\dfrac{\sqrt{3}}{3}x^2-\dfrac{2\sqrt{3}}{3}x+\sqrt{3}=0$,$x^2+2x-3=0$,∴ $x_1=1$,$x_2=-3$∴ A、B、C 三点的坐标分别为 $A(-3,0)$、$B(1,0)$、$C(0,\sqrt{3})$.

(2) ① $E(-2,-\sqrt{3})$

② 四边形 $AEBC$ 是矩形　理由:四边形 $AEBC$ 是平行四边形,且 $\angle ACB=90°$

(3) 存在. $D\left(-1,\dfrac{4\sqrt{3}}{4}\right)$　作出点 A 关于 BC 的对称点 A',连结 $A'D$ 与直线 BC 交于点 P. 则点 P 是使

$\triangle PAD$ 周长最小的点. 求得 $A'(3,2\sqrt{3})$　过 A'、D 的直线 $y=\frac{\sqrt{3}}{6}x+\frac{3\sqrt{3}}{2}$. 过 B,C 的直线 $y=-\sqrt{3}x+\sqrt{3}$. 两直线的交点 $P\left(-\frac{3}{7},\frac{10\sqrt{3}}{7}\right)$.

例 5　(内蒙古包头市课改区,2006)已知抛物线 $y=kx^2+2kx-3k$,交 x 轴于 A、B 两点(A 在 B 的左边),交 y 轴于 C 点,且 y 有最大值 4.

(1) 求抛物线的解析式;

(2) 在抛物线上是否存在点 P,使 $\triangle PBC$ 是直角三角形?若存在,求出 P 点坐标;若不存在,说明理由.

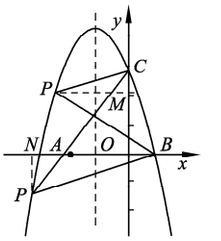


图 6－4

解　(1) $y=kx^2+2kx-3k=k(x^2+2x-3)=k(x+1)^2-4k$,

∵ y 有最大值 4,∴ $-4k=4$,∴ $k=-1$　∴ 抛物线的解析式为 $y=-x^2-2x+3$;

(2) 由 $y=-x^2-2x+3$ 可得 $A(-3,0)$,$B(1,0)$,$C(0,3)$. 设点 $P(a,b)$

① 当 $PC\perp BC$ 时,作 $PM\perp y$ 轴,垂足为 M 点,∵ $\triangle PMC\backsim\triangle COB$,∴ $\frac{PM}{CO}=\frac{MC}{OB}$,即 $\frac{-a}{3}=\frac{3-b}{1}$,∴ $a=3b-9$,∵ $P(a,b)$ 在 $y=-x^2-2x+3$ 上,

∴ $b=-a^2-2a+3$,解方程组 $\begin{cases}a=3b-9,\\ b=-a^2-2a+3.\end{cases}$

得 $\begin{cases}a_1=-\frac{7}{3},\\ b_1=\frac{20}{9}\end{cases}$. $\begin{cases}a_2=0,\\ b_2=3.\end{cases}$ (舍去)∴ $P\left(-\frac{7}{3},\frac{20}{9}\right)$.

② 当 $PB\perp BC$ 时,作 $PN\perp x$ 轴,垂足为 N 点,∵ $\triangle PNB\backsim\triangle BOC$,∴ $\frac{PN}{BO}=\frac{NB}{OC}$,即 $\frac{-b}{1}=\frac{-a+1}{3}$,∴ $a=3b+1$　∵ $P(a,b)$ 在 $y=-x^2-2x+3$ 上,∴ $b=-a^2-2a+3$,解方程组 $\begin{cases}a=3b+1\\ b=-a^2-2a+3.\end{cases}$ 得 $\begin{cases}a_1=-\frac{10}{3},\\ b_1=-\frac{13}{9}.\end{cases}$ $\begin{cases}a_2=1,\\ b_2=0.\end{cases}$ (舍去)∴ $P\left(-\frac{10}{3},-\frac{13}{9}\right)$,综上所述,抛物线上存在点 P,使得 $\triangle PBC$ 为直角三角形,此时 $P\left(-\frac{7}{3},\frac{20}{9}\right)$ 或 $P\left(-\frac{10}{3},-\frac{13}{9}\right)$.

例 6　(南充市,2006)如图 6－5,经过点 $M(-1,2)$,$N(1,-2)$ 的抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 与 x 轴交于 A、B 两点,与 y 轴交于 C 点.

(1) 求 b 的值;

(2) 若 $OC^2=OA\cdot OB$,试求抛物线的解析式;

(3) 在该抛物线的对称轴上是否存在点 P,使 $\triangle PAC$ 的周长最小?若存在,求出点 P 的坐标;若不存在,请说明理由.

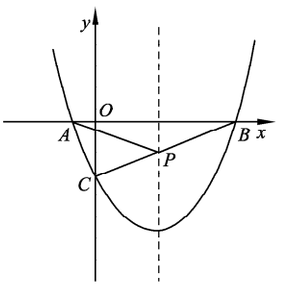


图 6－5

解　(1) 将 M、N 两点的坐标代入抛物线解析式,得

$\begin{cases}a-b+c=2, & ①\\ a+b+c=-2. & ②\end{cases}$

②－①,得 $2b=-4$,

∴ $b=-2$.

(2) 由(1)$b=-2$,$a+c=0$,

所以抛物线解析式可写为 $y=ax^2-2x-a$.

需要全本请访问 www.ertongbook.com

则 $C(0,-a)$.

设 $A(x_1,0),B(x_2,0)$,

则 x_1,x_2 是方程 $ax^2-2x-a=0$ 的二根,

从而 $x_1x_2=-1$.

由所给图形可知 $OC=a,OA=-x_1,OB=x_2$.

∵ $OC^2=OA\cdot OB$,

∴ $a^2=-x_1x_2$.

∴ $a^2=1$,

∴ $a=1(a>0)$.

∴ 抛物线解析式为 $y=x^2-2x-1$.

(3) 在抛物线对称轴上存在点 P,使△PAC 的周长最小.

∵ AC 长为定值.

∴ 要使△PAC 的周长最小,只需 $PA+PC$ 最小.

∵ 点 A 关于对称轴 $x=1$ 的对称点是 B,由几何知识知,

$PA+PC=PB+PC$.

BC 与对称轴的交点为所求点 P.

由(2)知 $B(\sqrt{2}+1,0),C(0,-1)$,

经过点 $B(\sqrt{2}+1,0),C(0,-1)$的直线为

$y=(\sqrt{2}-1)x-1$.

当 $x=1$ 时,$y=\sqrt{2}-2$.

即 $P(1,\sqrt{2}-2)$.

例7 (太原市课改区,2006)如图 6－6,已知直线 $y=kx+1$ 经过点 $A(-3,-2)$,点 $B(a,2)$,交 y 轴于点 M.

(1) 求 a 的值及 AM 的长;

(2) 在 x 轴的正半轴上确定点 P,使得△AMP 成为等腰三角形,在图中标明点 P 的位置并直接写出坐标;

(3) 将直线 AB 绕点 A 顺时针旋转 45°得到直线 AC,点 $D(3,b)$在 AC 上,连结 BD,设 BE 是△ABD 的高,过点 E 的射线 EF 将△ABD 的面积分成 2∶3两部分,交△ABD 的另一边于点 F. 求点 F 的坐标.

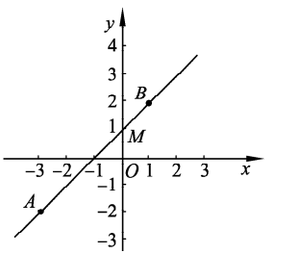


图 6－6

解 (1) 把 $A(-3,-2)$代入 $y=kx+1$,得 $k=1$. ∴ $y=x+1$,∵ 点 $B(a,2)$在直线 $y=x+1$ 上,∴ $a=1$. 当 $x=0$ 时,$y=1$. ∴ $M(0,1)$,$OM=1$. 如图,过点 A 作 $AN\perp y$ 轴于点 N,则 $ON=2$,$AN=3$,∴ $MN=3$. ∴ $AM=\sqrt{AN^2+MN^2}=3\sqrt{2}$.

(2) 如图,符合条件的点 P 有两个:$P_1(\sqrt{14}-3,0),P_2(\sqrt{17},0)$.

(3) 在 Rt△ANM 中,$\angle ANM=90°$,$AN=MN$,∴ $\angle MAN=\angle AMN=45°$. ∵ 直线 AB 绕点 A 顺时针旋转 45°得到直线 AC,∴ 直线 AC 经过点 N. ∴ $AC\perp y$ 轴,∵ 点 $D(3,b)$在直线 AC 上,BE 是△ABD 的高,$B(1,2)$,

∴ $D(3,-2),E(1,-2)$. ∴ $AE=4,AD=6,BE=4,ED=2$.

① 设点 F 在边 AB 上. 设点 F 的坐标为(m,n),它到 AD 的距离为 h. 由条件得 $S_{\triangle AEF}=\frac{2}{5}S_{\triangle ABD}$,或 $S_{\triangle AEF}=\frac{3}{5}S_{\triangle ABD}$. 当 $S_{\triangle AEF}=\frac{2}{5}S_{\triangle ABD}$ 时,由 $\frac{1}{2}AE\times h=\frac{2}{5}$

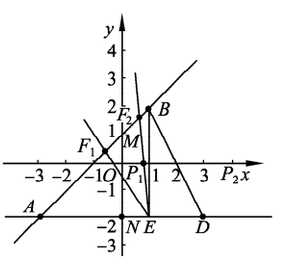


图 6－7

$\times\frac{1}{2}AD\times BE$，得 $h=\frac{12}{5}$. ∴ $n=\frac{12}{5}-2=\frac{2}{5}$. 把 $n=\frac{2}{5}$ 代入 $y=x+1$，得 $m=-\frac{3}{5}$. ∴ $F_1\left(-\frac{3}{5},\frac{2}{5}\right)$. 当 $S_{\triangle AEF}=\frac{2}{5}S_{\triangle ABD}$ 时，同理可得 $h=\frac{18}{5}$，$n=\frac{8}{5}$，$m=\frac{3}{5}$.

∴ $F_2\left(\frac{3}{5},\frac{8}{5}\right)$，

② 设点 F 在边 BD 上.（方法一）当 $S_{\triangle FED}=\frac{2}{5}S_{\triangle ABD}$ 时，由 $\frac{1}{2}ED\times h=\frac{2}{5}\times\frac{1}{2}AD\times BE$，得 $h=\frac{24}{5}$，$h>BE$.

当 $S_{\triangle FED}=\frac{3}{5}S_{\triangle ABD}$ 时，同理可得 $h=\frac{36}{5}$，$h>BE$. ∴ 边 BD 上不存在符合条件的点 F.

（方法二）∵ $S_{\triangle BED}=\frac{1}{2}ED\times BE=\frac{1}{2}\times2\times4=4$，$S_{\triangle ABD}=\frac{1}{2}AD\times BE=\frac{1}{2}\times6\times4=12$，∴ $S_{\triangle BED}=\frac{1}{3}S_{\triangle ABD}<\frac{2}{5}S_{\triangle ABD}$ ∵ $S_{\triangle FED}\leqslant S_{\triangle BED}$，∴ $S_{\triangle FED}<\frac{2}{5}S_{\triangle ABD}<\frac{3}{5}S_{\triangle ABD}$. ∴ 边 BD 上不存在符合条件的点 F. 由①，②得点 F 的坐标分别为 $F_1\left(-\frac{3}{5},\frac{2}{5}\right)$，$F_2\left(\frac{3}{5},\frac{8}{5}\right)$.

例 8　（威海市，2006）抛物线 $y=ax^2+bx+c(a\neq0)$ 过点 $A(1,-3)$，$B(3,-3)$，$C(-1,5)$，顶点为 M 点.

（1）求该抛物线的解析式；

（2）试判断抛物线上是否存在一点 P，使 $\angle POM=90°$. 若不存在，说明理由；若存在，求出 P 点的坐标；

（3）试判断抛物线上是否存在一点 K，使 $\angle OMK=90°$，说明理由.

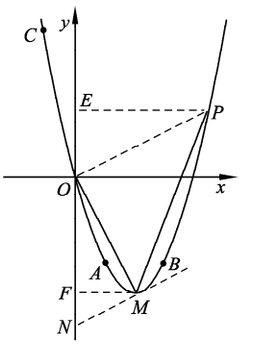


图 6－8

解　（1）根据题意，得

$$\begin{cases}-3=a+b+c,\\-3=9a+3b+c,\\5=a-b+c.\end{cases}$$

解得 $\begin{cases}a=1,\\b=-4,\\c=0.\end{cases}$

∴ 抛物线的解析式为 $y=x^2-4x$.

（2）抛物线上存在一点 P，使 $\angle POM=90°$.

$x=-\frac{b}{2a}=-\frac{-4}{2}=2$，$y=\frac{4ac-b^2}{4a}=\frac{-16}{4}=-4$.

∴ 顶点 M 的坐标为 $(2,-4)$.

设抛物线上存在一点 P，满足 $OP\perp OM$，其坐标为 (a,a^2-4a).

过 P 点作 $PE\perp y$ 轴，垂足为 E；过 M 点作 $MF\perp y$ 轴，垂足为 F.

则 $\angle POE+\angle MOF=90°$，$\angle POE+\angle EPO=90°$.

∴ $\angle EPO=\angle FOM$.

∵ $\angle OEP=\angle MFO=90°$，

∴ Rt$\triangle OEP\backsim$Rt$\triangle MFO$.

∴ $OE:MF=EP:OF$.

即 $(a^2-4a):2=a:4$.

解，得 $a_1=0$（舍去），$a_2=\frac{9}{2}$.

∴ P 点的坐标为 $\left(\frac{9}{2},\frac{9}{4}\right)$.

(3) 过顶点 M 作 $MN\perp OM$,交 y 轴于点 N. 则 $\angle FMN+\angle OMF=90^\circ$.

∵ $\angle MOF+\angle OMF=90^\circ$,

∴ $\angle MOF=\angle FMN$.

又∵ $\angle OFM=\angle MFN=90^\circ$,

∴ $\triangle OFM\backsim\triangle MFN$.

∴ $OF:MF=MF:FN$. 即 $4:2=2:FN$. ∴ $FN=1$.

∴ 点 N 的坐标为 $(0,-5)$.

设过点 M,N 的直线的解析式为 $y=kx+b$.

$\begin{cases}-4=2k+b,\\-5=b\end{cases}$ 解,得 $\begin{cases}k=\dfrac{1}{2},\\b=-5.\end{cases}$ 直线的解析式为 $y=\dfrac{1}{2}x-5$.

∴ $\begin{cases}y=\dfrac{1}{2}x-5, & ①\\y=x^2-4x. & ②\end{cases}$ 把①代入②,得 $x^2-\dfrac{9}{2}x+5=0$.

$\Delta=\left(-\dfrac{9}{2}\right)^2-4\times5=\dfrac{81}{4}-20=\dfrac{1}{4}>0$.

∴ 直线 MN 与抛物线有两个交点(其中一点为顶点 M).

∴ 抛物线上必存在一点 K,使 $\angle OMK=90^\circ$.

例 9 (济宁市课改区,2006)如图 6－9,以 O 为原点的直角坐标系中,A 点的坐标为 $(0,1)$,直线 $x=1$ 交 x 轴于点 B. P 为线段 AB 上一动点,作直线 $PC\perp PO$,交直线 $x=1$ 于点 C. 过 P 点作直线 MN 平行于 x 轴,交 y 轴于点 M,交直线 $x=1$ 于点 N.

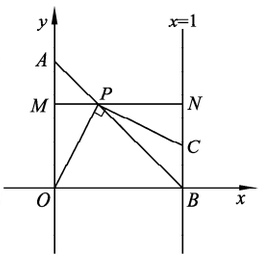


图 6－9

(1) 当点 C 在第一象限时,求证:$\triangle OPM\cong\triangle PCN$;

(2) 当点 C 在第一象限时,设 AP 长为 m,四边形 $POBC$ 的面积为 S,请求出 S 与 m 间的函数关系式,并写出自变量 m 的取值范围;

(3) 当点 P 在线段 AB 上移动时,点 C 也随之在直线 $x=1$ 上移动,$\triangle PBC$ 是否可能成为等腰三角形?如果可能,求出所有能使 $\triangle PBC$ 成为等腰三角形的点 P 的坐标,如果不可能,请说明理由.

解 (1) ∵ $OM/\!/BN$, $MN/\!/OB$, $\angle AOB=90^\circ$,

∴ 四边形 $OBNM$ 为矩形.

∴ $MN=OB=1$, $\angle PMO=\angle CNP=90^\circ$.

∵ $\dfrac{AM}{AO}=\dfrac{PM}{BO}$, $AO=BO=1$.

∴ $AM=PM$.

∴ $OM=OA-AM=1-AM$, $PN=MN-PM=1-PM$.

∴ $OM=PN$.

∵ $\angle OPC=90^\circ$.

∴ $\angle OPM+\angle CPN=90^\circ$.

又∵ $\angle OPM+\angle POM=90^\circ$.

∴ $\angle CPN=\angle POM$

∴ $\triangle OPM\cong\triangle PCN$.

(2) ∵ $AM=PM=AP\sin45^\circ=\dfrac{\sqrt{2}}{2}m$.

∴ $NC=PM=\frac{\sqrt{2}}{2}m$.

∴ $BN=OM=PN=1-\frac{\sqrt{2}}{2}m$.

∴ $BC=BN-NC=1-\frac{\sqrt{2}}{2}m-\frac{\sqrt{2}}{2}m=1-\sqrt{2}m$.

∴ $S=S_{\triangle OPB}+S_{\triangle PBC}=\frac{1}{2}OB\cdot OM+\frac{1}{2}BC\cdot PN$

$=\frac{1}{2}\times1\times\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}m\right)+\frac{1}{2}\times(1-\sqrt{2m})\times\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}m\right)$

$=\frac{1}{2}m^2-\sqrt{2}m+1\left(0\leqslant m<\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

(3) $\triangle PBC$ 可能为等腰三角形.

① 当点 P 与点 A 重合时，$PC=BC=1$，此时，P 点的坐标为$(0,1)$；

② 当点 C 在第四象限，且 $PB=BC$ 时，

有 $BN=PN=1-\frac{\sqrt{2}}{2}m$.

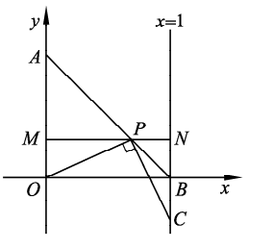


图 6－10

∴ $BC=PB=\sqrt{2}PN=\sqrt{2}-m$.

∴ $NC=BN+BC=1-\frac{\sqrt{2}}{2}m+\sqrt{2}-m$.

由(2)可知：

$NC=PM=\frac{\sqrt{2}}{2}m$.

∴ $1-\frac{\sqrt{2}}{2}m+\sqrt{2}-m=\frac{\sqrt{2}}{2}m$.

∴ $m=1$.

∴ $PM=\frac{\sqrt{2}}{2}m=\frac{\sqrt{2}}{2}$，$BN=1-\frac{\sqrt{2}}{2}m=1-\frac{\sqrt{2}}{2}$.

∴ 此时，P 点的坐标为 $\left(\frac{\sqrt{2}}{2},1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

∴ 使 $\triangle PBC$ 成为等腰三角形的点 P 的坐标为$(0,1)$或 $\left(\frac{\sqrt{2}}{2},1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

例 10　(北京市课改区，2006)已知抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 与 y 轴交于点 $A(0,3)$，与 x 轴分别交于 $B(1,0)$、$C(5,0)$ 两点.

(1) 求此抛物线的解析式；

(2) 若点 D 为线段 OA 的一个三等分点，求直线 DC 的解析式；

(3) 若一个动点 P 自 OA 的中点 M 出发，先到达 x 轴上的某点(设为点 E)，再到达抛物线的对称轴上某点(设为点 F)，最后运动到点 A. 求使点 P 运动的总路径最短的点 E、点 F 的坐标，并求出这个最短总路径的长.

解　(1) 根据题意，$c=3$，

所以 $\begin{cases}a+b+3=0,\\25a+5b+3=0.\end{cases}$

解得 $\begin{cases}a=\frac{3}{5},\\b=-\frac{18}{5}.\end{cases}$

需要全本请访问 www.ertongbook.com

所以　抛物线解析式为 $y=\frac{3}{5}x^2-\frac{18}{5}x+3$.

(2) 依题意可得 OA 的三等分点分别为(0,1),(0,2).

设直线 CD 的解析式为 $y=kx+b$.

当点 D 的坐标为(0,1)时,直线 CD 的解析式为 $y=-\frac{1}{5}x+1$;

当点 D 的坐标为(0,2)时,直线 CD 的解析式为 $y=-\frac{2}{5}x+2$.

(3) 如图,由题意,可得 $M\left(0,\frac{3}{2}\right)$.

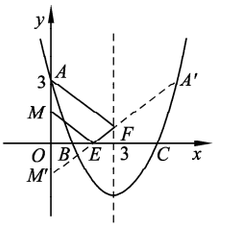


图 6－11

点 M 关于 x 轴的对称点为 $M'\left(0,-\frac{3}{2}\right)$,

点 A 关于抛物线对称轴 $x=3$ 的对称点为 $A'(6,3)$.

连结 $A'M'$.

根据轴对称性及两点间线段最短可知,$A'M'$ 的长就是所求点 P 运动的最短总路径的长.

所以 $A'M'$ 与 x 轴的交点为所求 E 点,与直线 $x=3$ 的交点为所求 F 点.

可求得直线 $A'M'$ 的解析式为 $y=\frac{3}{4}x-\frac{3}{2}$.

可得 E 点坐标为(2,0),F 点坐标为 $\left(3,\frac{3}{4}\right)$.

由勾股定理可求出 $A'M'=\frac{15}{2}$.

所以点 P 运动的最短总路径($ME+EF+FA$)的长为 $\frac{15}{2}$.

例 11　(钦州市,2006)如图 6－12,在平面直角坐标系中,矩形 $OABC$ 的顶点 O 为原点,E 为 AB 上一点,把 $\triangle CBE$ 沿 CE 折叠,使点 B 恰好落在 OA 边上的点 D 处,点 A,D 的坐标分别为(5,0)和(3,0).

(1) 求点 C 的坐标;

(2) 求 DE 所在直线的解析式;

(3) 设过点 C 的抛物线 $y=2x^2+\sqrt{3}bx+c(b<0)$ 与直线 BC 的另一个交点为 M,问在该抛物线上是否存在点 G,使得 $\triangle CMG$ 为等边三角形. 若存在,求出点 G 的坐标;若不存在,请说明理由.

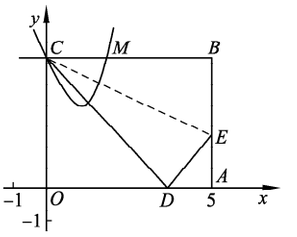


图 6－12

解　(1) 根据题意,得 $CD=CB=OA=5$,$OD=3$,

∵ $\angle COD=90°$,∴ $OC=\sqrt{CD^2-OD^2}=\sqrt{5^2-3^2}=4$.

∴ 点 C 的坐标是(0,4);

(2) ∵ $AB=OC=4$,设 $AE=x$,

则 $DE=BE=4-x$

$AD=OA-OD=5-3=2$.

在 Rt$\triangle DEA$ 中,$DE^2=AD^2+AE^2$.

∴ $(4-x)^2=2^2+x^2$.

解之,得 $x=\frac{3}{2}$,

即点 E 的坐标是 $\left(5,\frac{3}{2}\right)$.

设 DE 所在直线的解析式为 $y=kx+b$，

$\therefore \begin{cases}3k+b=0,\\5k+b=\frac{3}{2},\end{cases}$

解之，得 $\begin{cases}k=\frac{3}{4},\\b=-\frac{9}{4}.\end{cases}$

$\therefore$ DE 所在直线的解析式为 $y=\frac{3}{4}x-\frac{9}{4}$；

(3) $\because$ 点 $C(0,4)$ 在抛物线 $y=2x^2+\sqrt{3}bx+c$ 上，$\therefore$ $c=4$.

即抛物线为 $y=2x^2+\sqrt{3}bx+4$.

假设在抛物线 $y=2x^2+\sqrt{3}bx+4$ 上存在点 G，使得 $\triangle CMG$ 为等边三角形，根据抛物线的对称性及等边三角形的性质，得点 G 一定在该抛物线的顶点上.

设点 G 的坐标为 (m,n)，

$\therefore$ $m=-\frac{\sqrt{3}b}{2\times2}=-\frac{\sqrt{3}b}{4}$，$n=\frac{4\times2\times4-(\sqrt{3}b)^2}{4\times2}=\frac{32-3b^2}{8}$，

即点 G 的坐标为 $\left(-\frac{\sqrt{3}b}{4},\frac{32-3b^2}{8}\right)$.

设对称轴 $x=-\frac{\sqrt{3}b}{4}$ 与直线 CB 交于点 F，与 x 轴交于点 H.

则点 F 的坐标为 $\left(-\frac{\sqrt{3}b}{4},4\right)$.

$\because$ $b<0$，$\therefore$ $m>0$，点 G 在 y 轴的右侧，

$CF=m=-\frac{\sqrt{3}b}{4}$，$FH=4$，$FG=4-\frac{32-3b^2}{8}=\frac{3b^2}{8}$.

$\because$ $CM=CG=2CF=-\frac{\sqrt{3}b}{2}$，

$\therefore$ 在 $\mathrm{Rt}\triangle CGF$ 中，$CG^2=CF^2+FG^2$，$\left(-\frac{\sqrt{3}b}{2}\right)^2=\left(-\frac{\sqrt{3}b}{4}\right)^2+\left(\frac{3b^2}{8}\right)^2$.

解之，得 $b=-2$.（$\because$ $b<0$）.

$\therefore$ $m=-\frac{\sqrt{3}b}{4}=\frac{\sqrt{3}}{2}$，$n=\frac{32-3b^2}{8}=\frac{5}{2}$.

$\therefore$ 点 G 的坐标为 $\left(\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{5}{2}\right)$.

$\therefore$ 在抛物线 $y=2x^2+\sqrt{3}bx+4(b<0)$ 上存在点 $G\left(\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{5}{2}\right)$，使得 $\triangle CMG$ 为等边三角形.

在 $\mathrm{Rt}\triangle CGF$ 中，$\angle CGF=\frac{1}{2}\times60^\circ=30^\circ$.

$\therefore$ $\tan\angle CGF=\frac{CF}{FG}=\frac{-\frac{\sqrt{3}b}{4}}{\frac{3b^2}{8}}=-\frac{2\sqrt{3}}{3b}=\tan30^\circ$.

$\therefore$ $-\frac{2\sqrt{3}}{3b}=\frac{\sqrt{3}}{3}$. 解之，得 $b=-2$.（下同）

例 12　(咸宁市,2006)如图 6－13,$OABC$ 是一张放在平面直角坐标系中的矩形纸片,O 为原点,点 A 在 x 轴的正半轴上,点 C 在 y 轴的正半轴上,$OA=5$,$OC=3$.

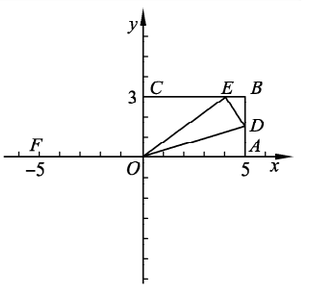


图 6－13

(1) 在 AB 边上取一点 D,将纸片沿 OD 翻折,使点 A 落在 BC 边上的点 E 处,求点 D,E 的坐标;

(2) 若过点 D,E 的抛物线与 x 轴相交于点 $F(-5,0)$,求抛物线的解析式和对称轴方程;

(3) 若(2)中的抛物线与 y 轴交于点 H,在抛物线上是否存在点 P,使 $\triangle PFH$ 的内心在坐标轴上?若存在,求出点 P 的坐标,若不存在,请说明理由.

(4) 若(2)中的抛物线与 y 轴相交于点 H,点 Q 在线段 OD 上移动,作直线 HQ,当点 Q 移动到什么位置时,O,D 两点到直线 HQ 的距离之和最大?请直接写出此时点 Q 的坐标及直线 HQ 的解析式.

解法 1　(1) 依题意,$OE=OA=5$,

在 $\mathrm{Rt}\triangle OCE$ 中,$CE^2=OE^2-OC^2=5^2-3^2=4^2$,$\therefore$ $CE=4$.

$\because$ $\angle OED=\angle OAD=90^\circ$,$\therefore$ $\angle CEO+\angle BED=90^\circ$.

而 $\angle CEO+\angle COE=90^\circ$,$\therefore$ $\angle COE=\angle BED$,

$\therefore$ $\mathrm{Rt}\triangle CEO\backsim\mathrm{Rt}\triangle BDE$.

$\therefore$ $\dfrac{BD}{BE}=\dfrac{CE}{CO}$,$\therefore$ $\dfrac{BD}{5-4}=\dfrac{4}{3}$,

$\therefore$ $BD=\dfrac{4}{3}$,$\therefore$ $AD=AB-BD=3-\dfrac{4}{3}=\dfrac{5}{3}$,

$\therefore$ 点 D,E 的坐标分别为 $\left(5,\dfrac{5}{3}\right)$,$(4,3)$.

解法 2　(上同解法 1)

$\therefore$ $CE=4$.

设点 D 的坐标为 $(5,y)$,

则 $AD=DE=y$,$BD=3-y$,$BE=5-4=1$.

在 $\mathrm{Rt}\triangle BED$ 中,

$ED^2=EB^2+BD^2$,

$\therefore$ $y^2=1^2+(3-y)^2$,解得 $y=\dfrac{5}{3}$,

$\therefore$ 点 D,E 的坐标分别为 $\left(5,\dfrac{5}{3}\right)$,$(4,3)$.

(2) 设抛物线的解析式为 $y=ax^2+bx+c$,

$\because$ 抛物线过点 $D\left(5,\dfrac{5}{3}\right)$,$E(4,3)$,$F(-5,0)$,

$\therefore$ $\begin{cases}25a+5b+c=\dfrac{5}{3}\\16a+4b+c=3\\25a-5b+c=0\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}a=-\dfrac{1}{6}\\b=\dfrac{1}{6}\\c=5\end{cases}$

∴ 抛物线的解析式为 $y=-\frac{1}{6}x^2+\frac{1}{6}x+5$.

对称轴的方程为 $x=-\frac{b}{2a}=-\frac{\frac{1}{6}}{2\times\left(-\frac{1}{6}\right)}=\frac{1}{2}$.

或用配方法：

$y=-\frac{1}{6}x^2+\frac{1}{6}x+5=-\frac{1}{6}(x^2-x-30)=-\frac{1}{6}\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{121}{24}$.

∴ 对称轴的方程为 $x=\frac{1}{2}$.

(3) 存在这样的 P 点，使$\triangle PFH$ 的内心在坐标轴上.

解法 1　① 若$\triangle PFH$ 的内心在 y 轴上，设直线 PH 与 x 轴相交于点 M，

∵ $\angle FHO=\angle MHO$，$HO\perp FM$，

∴ $FO=MO$，∴ 点 M 的坐标为$(5,0)$.

∴ 直线 PH 的解析式为 $y=-x+5$.

解方程组$\begin{cases}y=-x+5\\ y=-\frac{1}{6}x^2+\frac{1}{6}x+5\end{cases}$得$\begin{cases}x_1=0\\ y_1=5\end{cases}$，$\begin{cases}x_2=7\\ y_2=-2\end{cases}$.

∴ 点 P 的坐标为$(7,-2)$.

② 若$\triangle PFH$ 的内心在 x 轴上，设直线 PF 与 y 轴相交于点 N，

∵ $\angle HFO=\angle NFO$，$FO\perp HN$，

∴ $HO=NO$，∴ 点 N 的坐标为$(0,-5)$，

∴ 直线 FN 的解析式为 $y=-x-5$.

解方程组$\begin{cases}y=-x-5\\ y=-\frac{1}{6}x^2+\frac{1}{6}x+5\end{cases}$得$\begin{cases}x_1=-5\\ y_1=0\end{cases}$，$\begin{cases}x_2=12\\ y_2=-17\end{cases}$.

∴ 点 P 的坐标为$(12,-17)$. 综合①②可知点 P 的坐标为$(7,-2)$或$(12,-17)$.

解法 2　① 当$\triangle PFH$ 的内心在 y 轴上时，

设 P 的坐标为$\left(x,-\frac{1}{6}x^2+\frac{1}{6}x+5\right)$，

∵ $\angle FHO=\angle PHO=45°$，

过 P 作 $PM\perp y$ 轴于 M，∴ $HM=PM$.

∴ $5-\left(-\frac{1}{6}x^2+\frac{1}{6}x+5\right)=x$，∴ $x_1=0$，$x_2=7$. ∴ 点 P 的坐标为$(7,-2)$.

② 当$\triangle PFH$ 的内心在 x 轴上时，

设 P 的坐标为$\left(x,-\frac{1}{6}x^2+\frac{1}{6}x+5\right)$，

∵ $\angle HFO=\angle PFO=45°$，

过 P 作 $PN\perp x$ 轴于 N，∴ $FN=PN$.

∴ $x+5=\frac{1}{6}x^2-\frac{1}{6}x-5$，∴ $x^2-7x-60=0$，$x_1=12$，$x_2=-5$.

∴ 点 P 的坐标为$(12,-17)$.

综合①②可知,点 P 的坐标为$(7,-2)$或$(12,-17)$.

(4) 点 Q 的坐标为$\left(\frac{3}{2},\frac{1}{2}\right)$;直线 HQ 的解析式为 $y=-3x+5$.

例 13 (沈阳市,2006)如图 6−14,已知直线 $y=x-2$ 与双曲线 $y=\frac{k}{x}(x>0)$交于点 $A(3,m)$.

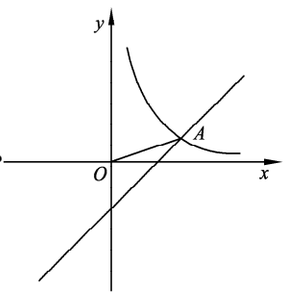


图 6−14

(1) 求 m,k 的值;

(2) 连结 OA,在 x 轴的正半轴上是否存在点 Q,使$\triangle AOQ$ 是等腰三角形?若存在,请直接写出所有符合条件的点 Q 的坐标;若不存在,请说明理由.

解 (1) ∵ 点 $A(3,m)$在直线 $y=x-2$ 上,

∴ $m=3-2=1$. ∴ 点 A 的坐标是$(3,1)$.

∵ 点 $A(3,1)$在双曲线 $y=\frac{k}{x}$上,

∴ $1=\frac{k}{3}$∴ $k=3$.

(2) 存在.

$Q_1(\sqrt{10},0)$,$Q_2(6,0)$,$Q_3\left(\frac{5}{3},0\right)$.

例 14 (南宁市课改实验区,2005)$OABC$ 是一张放在平面直角坐标系中的矩形纸片,O 为原点,点 A 在 x 轴上,点 C 在 y 轴上,$OA=10$,$OC=6$.

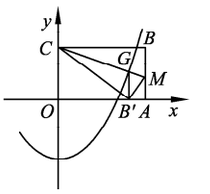


图 6−15

(1) 如图 6−15,在 AB 上取一点 M,使得$\triangle CBM$ 沿 CM 翻折后,点 B 落在 x 轴上,记作 B'点,求 B'点的坐标;

(2) 求折痕 CM 所在直线的解析式;

(3) 作 $B'G\parallel AB$ 交 CM 于点 G,若抛物线 $y=\frac{1}{6}x^2+m$ 过点 G,求抛物线的解析式,并判断以原点 O 为圆心,OG 为半径的圆与抛物线除交点 G 外,是否还有交点?若有,请直接写出交点的坐标.

解 (1) ∵ $\triangle CB'M\cong\triangle CBM$,

∴ $CB'=CB=OA=10$.

∴ $OB'=\sqrt{OA^2-OC^2}=\sqrt{10^2-6^2}=8$. $B'(8,0)$.

(2) 设 $AM=n$,则 $MB'=BM=6-n$. $AB'=10-8=2$

∴ $n^2+2^2=(6-n)^2$. 解得 $n=\frac{8}{3}$,

∴ $M\left(10,\frac{8}{3}\right)$、$C(0,6)$

设直线 CM 解析式为 $y=kx+b$

∴ $\begin{cases}\frac{8}{3}=10k+b,\\ 6=b.\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}k=-\frac{1}{3},\\ b=6.\end{cases}$

∴ 直线 CM 的解析式为 $y=-\frac{1}{3}x+6$.

(3) 设 $G(8,a)$，$\therefore\ a=-\frac{1}{3}\times 8+6=\frac{10}{3}$.

$\therefore\ G\left(8,\frac{10}{3}\right)$. $\therefore\ \frac{10}{3}=\frac{1}{6}\times 8^2+m$.

$\therefore\ m=-\frac{22}{3}$. $\therefore\ y=\frac{1}{6}x^2-\frac{22}{3}$.

除交点 G 外，另有交点为点 G 关于 y 轴的对称点，其坐标为 $\left(-8,\frac{10}{3}\right)$.

例 15　(河南省，2005)已知一个二次函数的图象过如图所示三点.

(1) 求抛物线的对称轴；

(2) 平行于 x 轴的直线 l 的解析式为 $y=\frac{25}{4}$，抛物线与 x 轴交于 A、B 两点. 在抛物线的对称轴上找点 P，使 BP 的长等于直线 l 与 x 轴间的距离. 求点 P 的坐标.

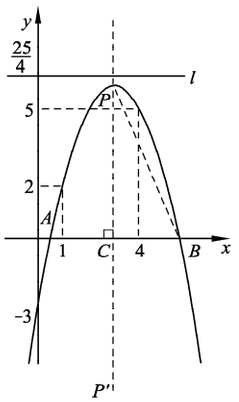


图 6－16

解　(1) 设二次函数的解析式为 $y=ax^2+bx+c$.

根据图象，得 $\begin{cases}c=-3,\\ a+b+c=2,\\ 16a+4b+c=5.\end{cases}$　解得 $\begin{cases}a=-1,\\ b=6,\\ c=-3.\end{cases}$

即 $y=-x^2+6x-3=-(x-3)^2+6$.

$\therefore$ 抛物线的对称轴为直线 $x=3$.

(2) 解得点 $B(3+\sqrt{6},0)$.

设点 P 的坐标为 $(3,y)$，如图 6－16，由勾股定理，得 $BP^2=BC^2+PC^2$，

即 $BP^2=(3+\sqrt{6}-3)^2+y^2=y^2+6$.

$\because$ l 与 x 轴的距离是 $\frac{25}{4}$，

$\therefore\ y^2+6=\left(\frac{25}{4}\right)^2$，解得 $y=\pm\frac{23}{4}$.

$\therefore$ 所求点 P 为 $\left(3,\frac{23}{4}\right)$ 或 $\left(3,-\frac{23}{4}\right)$.

例 16　(连云港市，2005)如图 6－17，将一块直角三角形纸板的直角顶点放在 $C\left(1,\frac{1}{2}\right)$ 处，两直角边分别与 x，y 轴平行，纸板的另两个顶点 A，B 恰好是直线 $y=kx+\frac{9}{2}$ 与双曲线 $y=\frac{m}{x}(m>0)$ 的交点.

(1) 求 m 和 k 的值；

(2) 设双曲线 $y=\frac{m}{x}(m>0)$ 在 A，B 之间的部分为 L，让一把三角尺的直角顶点 P 在 L 上滑动，两直角边始终与坐标轴平行，且与线段 AB 交于 M，N 两点，请探究是否存在点 P 使得 $MN=\frac{1}{2}AB$，写出你的探究过程和结论.

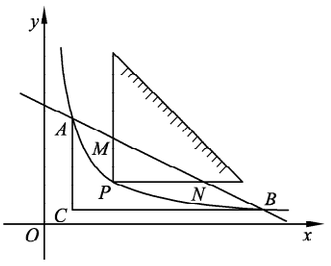


图 6－17

解　(1) $\because$ 点 A，B 在双曲线 $y=\frac{m}{x}(m>0)$ 上，且 $AC\parallel y$ 轴，$BC\parallel x$ 轴，$\therefore$ 点 A，B 的坐标分别为 $(1,m)$，

$\left(2m,\frac{1}{2}\right)$. 又点 A,B,在直线 $y=kx+\frac{9}{2}$ 上,∴ $\begin{cases}m=k+\frac{9}{2},\\ \frac{1}{2}=2mk+\frac{9}{2}.\end{cases}$

解得 $\begin{cases}k=-4,\\ m=\frac{1}{2}\end{cases}$ 或 $\begin{cases}k=-\frac{1}{2},\\ m=4.\end{cases}$

当 $k=-4$ 且 $m=\frac{1}{2}$ 时,点 A、B 的坐标都是 $\left(1,\frac{1}{2}\right)$,不合题意,应舍去;当 $k=-\frac{1}{2}$ 且 $m=4$ 时,点 A、B 的坐标分别为 $(1,4)$,$\left(8,\frac{1}{2}\right)$,符合题意. ∴ $k=-\frac{1}{2}$,$m=4$.

(2) 假设存在点 P 使得 $MN=\frac{1}{2}AB$.

∵ $AC/\!/y$ 轴,$MP/\!/y$ 轴,∴ $AC/\!/MP$,

∴ $\angle PMN=\angle CAB$,∴ $\mathrm{Rt}\triangle MPN\backsim\mathrm{Rt}\triangle ACB$,

∴ $\frac{MP}{AC}=\frac{MN}{AB}=\frac{1}{2}$. 设点 P 坐标为 $\left(x,\frac{4}{x}\right)(1<x<8)$,则 M 点坐标为 $\left(x,-\frac{1}{2}x+\frac{9}{2}\right)$,

∴ $MP=-\frac{1}{2}x+\frac{9}{2}-\frac{4}{x}$. 又 $AC=4-\frac{1}{2}=\frac{7}{2}$,

∴ $-\frac{1}{2}x+\frac{9}{2}-\frac{4}{x}=\frac{7}{4}$,即 $2x^2-11x+16=0$ (※)

∵ $\Delta=(-11)^2-4\times2\times16=-7<0$,∴ 方程(※)无实数根.

所以不存在点 P 使得 $MN=\frac{1}{2}AB$.

例 17 (山西省课改区,2005)矩形 $OABC$ 在直角坐标系中的位置如图 6-18 所示,A、C 两点的坐标分别为 $A(6,0)$,$C(0,3)$,直线 $y=\frac{3}{4}x$ 与 BC 边相交于点 D.

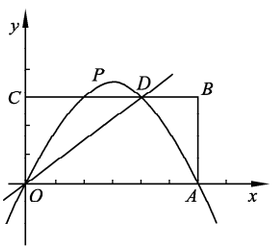


图 6-18

(1) 求点 D 的坐标;

(2) 若抛物线 $y=ax^2+bx$ 经过 D、A 两点,试确定此抛物线的表达式;

(3) P 为 x 轴上方(2)中抛物线上一点,求 $\triangle POA$ 面积的最大值;

(4) 设(2)中抛物线的对称轴与直线 OD 交于点 M,点 Q 为对称轴上一动点,以 Q、O、M 为顶点的三角形与 $\triangle OCD$ 相似,求符合条件的 Q 点的坐标.

解 (1) 由题知,直线 $y=\frac{3}{4}x$ 与 BC 交于点 $D(x,3)$.

把 $y=3$ 代入 $y=\frac{3}{4}x$ 中得,$x=4$∴ $D(4,3)$.

(2) ∵ 抛物线 $y=ax^2+bx$ 经过 $D(4,3)$、$A(6,0)$两点.

把 $x=4$,$y=3$;$x=6$,$y=0$,分别代入 $y=ax^2+bx$ 中得,

$\begin{cases}16a+4b=3\\ 36a+6b=0,\end{cases}$ 解之得 $\begin{cases}a=-\frac{3}{8}\\ b=\frac{9}{4}.\end{cases}$

∴ 抛物线的解析式为：$y=-\frac{3}{8}x^2+\frac{9}{4}x$.

(3) 因△POA 底边 $OA=6$，∴ 当 $S_{\triangle POA}$ 有最大值时，点 P 须位于抛物线的最高点，

∵ $a=-\frac{3}{8}<0$，∴ 抛物线顶点恰为最高点.

∵ $\frac{4ac-b^2}{4a}=\frac{4\times\left(-\frac{3}{8}\right)\cdot 0-\left(\frac{9}{4}\right)^2}{4\times\left(-\frac{3}{8}\right)}=\frac{27}{8}$,

∴ $S_{\triangle POA}$ 的最大值 $=\frac{1}{2}\times 6\times\frac{27}{8}=\frac{81}{8}$.

(4) 抛物线的对称轴与 x 轴的交点 Q_1，符合条件.

∵ $CB/\!/OA$　$\angle Q_1OM=\angle CDO$,

∴ Rt△Q_1OM∽Rt△CDO.

$x=-\frac{b}{2a}=3$，该点坐标为 $Q_1(3,0)$.

过点 O 作 OD 的垂线交抛物线的对称轴于点 Q_2，

∵ 对称轴平行于 y 轴，

∴ $\angle Q_2MO=\angle DOC$,

∴ Rt△Q_2MO∽Rt△DOC.

在 Rt△Q_2Q_1O∽和 Rt△DCO 中，

$Q_1O=CO=3$，$\angle Q_2=\angle ODC$,

∴ Rt△Q_2Q_1O≌Rt△DCO.

∴ $CD=Q_1Q_2=4$，∵ 点 Q_2 位于第四象限，∴ $Q_2(3,-4)$.

因此，符合条件的点有两个，分别是 $Q_1(3,0)$，$Q_2(3,-4)$.

例 18　(深圳市课改区，2005)如图 6－19，已知：△ABC 是边长为 4 的等边三角形，BC 在 x 轴上，点 D 为 BC 的中点，点 A 在第一象限内，AB 与 y 轴正半轴相交于点 E，点 B 的坐标是$(-1,0)$，P 点是 AC 上的动点(P 点与 A、C 两点不重合).

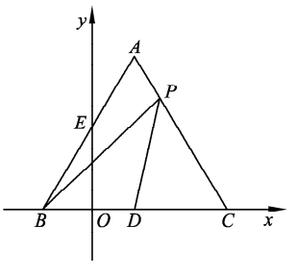


图 6－19

(1) 写出点 A、点 E 的坐标；

(2) 若抛物线 $y=-\frac{6\sqrt{3}}{7}x^2+bx+c$ 过 A、E 两点，求抛物线的解析式；

(3) 连结 PB、PD. 设 l 为△PBD 的周长，当 l 取最小值时，求点 P 的坐标及 l 的最小值，并判断此时点 P 是否在(2)中所求的抛物线上，请充分说明你的判断理由.

解　(1) 点 E 坐标是$(0,\sqrt{3})$，点 A 的坐标是$(1,2\sqrt{3})$.

(2) ∵ 抛物线 $y=-\frac{6\sqrt{3}}{7}x^2+bx+c$ 过 $E(0,\sqrt{3})$，$A(1,2\sqrt{3})$ 两点，

得：$\begin{cases}c=\sqrt{3}\\-\frac{6\sqrt{3}}{7}+b+c=2\sqrt{3}\end{cases}$ ∴ $\begin{cases}c=\sqrt{3}\\b=\frac{13}{7}\sqrt{3}\end{cases}$

抛物线的解析式是：$y=-\frac{6\sqrt{3}}{7}x^2+\frac{13\sqrt{3}}{7}x+\sqrt{3}$.

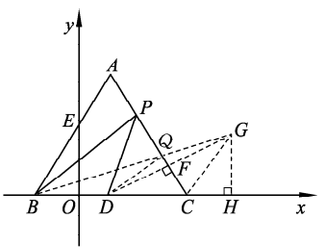


图 6－20

(3) 过 D 点作 $DF\perp AC$，垂足为 F 点，并延长 DF 至 G 点，使得 $DF=FG$.

则 D 点关于 AC 的对称点为 G 点.

需要全本请访问 www.ertongbook.com