

前 言

QIAN YAN

《高中总复习优化设计》系列丛书经过几年来的不断实践和持续打造,以其对教考信息迅捷而敏锐的吸纳,以其科学实用的复习备考模式,以其致力于继承与创新的精品意识,在全国教辅书中独树一帜,已经成为与广大读者建立了深厚心理默契和情感依恋的品牌图书。

2002—2003 学年《高中总复习优化设计》系列丛书在整体策划和编写过程中,既秉承已有的新颖、优化、科学、实用等基本特色和“宏观优化,微观设计”的指导理念,又力求发展与创新。在认真学习高考改革最新精神和深入研究 2003 年高考“3+X”命题特点的基础上,立足高三备考复习的实际与需求,从素质备考的角度全程规划复习方案与内容,注重学生创新能力、实践能力、综合能力的全面培养与提升。

本书根据第一阶段复习的情况以及学生的实际水平,选择了有针对性的专题和内容进行讲解,以专项练习、模拟练习为基本方式,以提升学生综合素质及应试能力为目的,充分体现高考第二、第三阶段复习的系统性、深刻性、启发性、层次性和科学性。

2002 年的高考数学科命题,在执行《考试说明》的各项规定中,创造性地贯彻了数学教育的新思想、新观念,围绕对数学知识、数学理性思维、数学应用与创新意识以及数学人文价值四个方面的考查来设计试卷和试题。鉴于此,本书在今年的编写过程中依据 2003 年《考试说明》的最新要求,既注重体现近几年高考命题的稳定性和规律性,又努力探索高考命题的新特点和新趋势。

本书在内容上,分“专题辅导与强化训练”和“考前指导与综合模拟”两部分;“专题辅导与强化训练”部分,每个专题设置了五个栏目,依次为:

【高考分析与趋势预测】分析本专题涉及的内容、思想方法在近两年高考中的特点,预测 2003 年高考命题的趋势。

【主干知识整合】梳理本课时涉及的基础要点,指明知识主干,总结出应注意的问题,分析主干要点在高考中的地位。

【典型例题透析】选题突出典型性、新颖性、全面性、应用性,并给出详尽的解题过程,以便训练学生的答题规范性。

【综合能力训练】主要以 2001 年以来全国、各省市高考模拟题及高考题为主,并增加了一些以能力立意为主,题型较新的题目。

【能力提升质量检测】以本专题涉及内容为主设置一套高考模拟题,以加强专题巩固,提升应试能力。

“考前指导与综合模拟”部分,包括对 2002 年高考试题的详尽解析,注重多角度、全方位、异途径,帮助考生在进一步熟悉高考题型的基础上,激活思维,挖掘潜能,并及时收录了 2003 年北京春季高考试题;八套专题补差强化训练,帮助考生在高考前达到再强化、再巩固的目的;综合模拟题,是考前的一次练兵,帮助考生进一步提升考前应试能力。

为了帮助教师充分把握本书的设计思想和意图,促进本书的有效使用,本书配有《教师用书》。

本书编者身处中学数学教学第一线,希望能给广大高三师生后期复习提供有效、有益的参考。受编者水平和编写时间所限,书中难免存在疏忽与不妥之处,敬请广大读者批评赐教。

编者

2003 年 1 月


 MUMU
 目录

第一部分 专题辅导与强化训练

一、函数的性质及其应用	(001)
§ 1.1 函数的性质	(001)
§ 1.2 函数的图象	(003)
§ 1.3 函数的综合问题及应用	(005)
能力提升质量检测(一)	(008)
二、数 列	(011)
§ 2.1 数列的基本运算和性质	(011)
§ 2.2 数列的综合运用	(013)
能力提升质量检测(二)	(016)
三、三角函数	(018)
§ 3.1 三角变换	(018)
§ 3.2 三角函数的图象和性质	(020)
§ 3.3 三角函数的最值及应用	(022)
能力提升质量检测(三)	(025)
四、平面向量	(027)
§ 4.1 向量的运算、数量积	(027)
§ 4.2 平面向量的应用	(029)
能力提升质量检测(四)	(031)
五、不等式	(033)
§ 5.1 不等式的证明	(033)
§ 5.2 不等式的解法	(035)
§ 5.3 不等式的应用	(037)
能力提升质量检测(五)	(039)
六、直线与圆锥曲线	(041)
§ 6.1 直线与圆	(041)
§ 6.2 圆锥曲线	(043)
§ 6.3 直线与圆锥曲线的位置关系	(046)
§ 6.4 解析几何的综合问题	(048)
能力提升质量检测(六)	(051)
七、直线、平面、简单几何体	(053)
§ 7.1 直线与平面的位置关系	(053)
§ 7.2 空间向量	(055)
§ 7.3 空间角与距离的计算	(058)

MU
LU
目
录

§ 7.4 简单多面体与球	(060)
能力提升质量检测(七)	(064)
八、排列、组合和概率	(067)
§ 8.1 排列、组合与二项式定理	(067)
§ 8.2 概率与统计	(068)
能力提升质量检测(八)	(071)
九、极限与导数	(073)
§ 9.1 极限与数学归纳法	(073)
§ 9.2 导数及其应用	(075)
能力提升质量检测(九)	(077)
十、选择题、填空题的解法	(079)
§ 10.1 选择题的解法	(079)
§ 10.2 填空题的解法	(080)
能力提升质量检测(十)	(082)
十一、最值问题	(083)
§ 11.1 利用函数的性质求最值	(083)
§ 11.2 利用不等式的性质求最值	(084)
§ 11.3 利用几何图形的性质求最值	(086)
§ 11.4 最值求解综合应用	(087)
能力提升质量检测(十一)	(090)
十二、应用问题	(092)
§ 12.1 函数的应用	(092)
§ 12.2 方程与不等式的应用	(094)
§ 12.3 数列、极限的应用	(096)
能力提升质量检测(十二)	(099)
十三、探索性问题	(102)
§ 13.1 条件探索和结论探索型	(102)
§ 13.2 存在性探索型	(104)
能力提升质量检测(十三)	(106)
十四、变换与转化思想	(108)
§ 14.1 变换转化的主要策略	(108)
§ 14.2 变换转化的方法及依据	(109)
能力提升质量检测(十四)	(112)


 MU
 LU
 目
 录

十五、数形结合思想	(113)
§ 15.1 方程、函数中的数形结合问题	(113)
§ 15.2 不等式、复数、解析几何中的数形结合	(114)
能力提升质量检测(十五)	(117)
十六、分类讨论思想	(119)
§ 16.1 分类讨论的原则与方法	(119)
§ 16.2 分类讨论的重要题型	(121)
能力提升质量检测(十六)	(123)
第二部分 考前指导与综合模拟	
一、考前指导	(125)
(一)2002年高考试题解析	(125)
(二)2003年北京春季高考试题解析(理工)	(141)
(三)重视数学能力的培养	(146)
(四)考前应注意的几个问题	(147)
(五)答题技巧	(149)
二、综合模拟题	(151)
专题补差强化训练(一)	(151)
专题补差强化训练(二)	(152)
专题补差强化训练(三)	(153)
专题补差强化训练(四)	(154)
专题补差强化训练(五)	(155)
专题补差强化训练(六)	(156)
专题补差强化训练(七)	(157)
专题补差强化训练(八)	(158)
2003年普通高等学校招生全国统一考试模拟试卷(A)	(159)
2003年普通高等学校招生全国统一考试模拟试卷(B)	(162)
参考答案	(165)

第一部分

专题辅导与强化训练

一、函数的性质及其应用

高考分析与趋势预测

函数是一条纽带,它把中学教学各个分支紧紧地连在一起.一些常见的解题技巧和方法在这里都得到了比较充分的体现.函数是初等数学与高等数学的衔接部分,是承上启下的必备知识,自然就成为高考的热点.近几年高考试题中函数部分占有相当大的比重,所考查的内容主要有函数的定义域、值域、反函数、奇偶性、单调性、周期性、指数函数、对数函数以及函数图象的变化趋势、函数图象的某些对称性等.高考主要涉及:①具体的函数问题;②方程、不等式与函数的综合问题;③数列(作为特殊的函数)问题及数列与函数的综合题;④利用辅助函数解题.如:2002年高考试题中的(9)(10)小题就是具体的函数问题;2001年高考试题中的(21)(22)题及2002年高考试题中的(21)题就是与函数有关的综合问题.二轮复习要注意引导学生用函数的思想看待问题、处理问题,并揭示其内在联系.

函数这部分内容,涉及到数形结合、函数与方程、分类讨论和等价转化的思想.用到了配方法、待定系数法、数学归纳法、换元法、消元法、反证法、代入法等数学方法.因此学好中学数学,函数是基础,函数是重点.

纵观近年来的高考试题,每年都有一些设问新颖的函数题目,“开放题”“组合题”“判断题”等将更多地出现,针对这些特点,函数的复习要解决好四个问题:准确深刻地理解函数的有关概念;揭示并认识函数与其他知识的内在联系;把握数形结合的方法;认识函数的实质,强化应用意识.

§ 1.1 函数的性质

主干知识整合

知识纲要是:函数的定义域、值域,函数的奇偶性、单调性与周期性,反函数.重点问题是:判断、论证、灵活运用函数的三大性质,研究抽象函数的性质,求函数的值域是本节的难点.

典型例题透析

[例1](2003年北京春季高考题)函数 $f(x)=|x|$ 和 $g(x)=x(2-x)$ 的递增区间依次是

A. $(-\infty, 0], (-\infty, 1]$

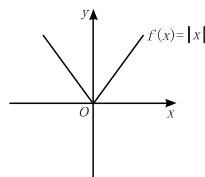
B. $(-\infty, 0], [1, +\infty)$

C. $[0, +\infty), (-\infty, 1]$

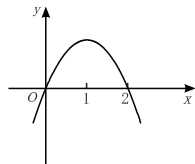
D. $[0, +\infty), [1, +\infty)$

考查方向:考查函数的单调性.

试题分析: $f(x)$ 的增区间为 $x \geq 0$,



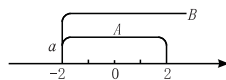
$g(x) = -x^2 + 2x$ 的增区间为 $(-\infty, 1]$.



答案:C

[例2](2003年上海春季高考题)已知集合 $A = \{x \mid |x| \leq 2, x \in \mathbf{R}\}$, $B = \{x \mid x \geq a\}$, 且 $A \subseteq B$, 则实数 a 的取值范围是 _____.

解析:在数轴上



$\therefore a \geq -2$.

答案: $a \geq -2$

[例3]已知 a, b 为常数且 $a \neq 0$, $f(x) = ax^2 + bx$, 且 $f(2) = 0$ 并使方程 $f(x) = x$ 有等根.

(1)求 $f(x)$ 的解析式;

(2)是否存在实数 $m, n (m < n)$, 使 $f(x)$ 的定义域和值域分别为 $[m, n]$ 和 $[2m, 2n]$?

解:(1) $\because f(x) = ax^2 + bx$ 且 $f(2) = 0$,

$\therefore 4a + 2b = 0$



三、解答题

►8. 设 $f(x)$ 是定义域为 \mathbf{R} 的单调奇函数, 且有 $f(1) = -2$, 若 $f(k \cdot \log_2 t) + f(\log_2 t - \log_2^2 t - 2) > 0$, 求实数 t 的取值范围.

►9. 已知函数 $f(x) = \lg(ax^2 + 2x + 1)$.

(1) 若 $f(x)$ 的定义域为 \mathbf{R} , 求实数 a 的取值范围及 $f(x)$ 的值域;

(2) 若 $f(x)$ 的值域为 \mathbf{R} , 求实数 a 的取值范围及 $f(x)$ 的定义域.

►10. 已知函数 $f(x)$ 的反函数是 $f^{-1}(x) = \log_2 \frac{1+x}{1-x}$,

(1) 求 $f(x)$ 的解析式;

(2) 解不等式 $1 - f(x) > \frac{1}{4^x - 1}$;

(3) 试猜想 $f(n)$ 与 $g(n) = \frac{n}{n+1}$ ($n \in \mathbf{N}$, 且 $n \geq 2$) 的大小.

§ 1.2 函数的图象

主干知识整合

函数的图象中常见的问题是: 函数的图象的作法, 函数的图象的变换. 平移变换、对称变换, 利用函数的图象比较式的大小、判断根的个数, 求单调区间等是近几年高考的热点. 作函数的图象、函数的图象的应用是本节难点.

典型例题透析

[例1] (2003年上海春季高考题) 已知函数 $f(x) = \sqrt{x} + 1$, 则 $f^{-1}(3) = \underline{\hspace{2cm}}$.

解析: $f(x) = \sqrt{x} + 1$, 令 $f(x) = 3$, 得 $3 = \sqrt{x} + 1, x = 4$

$\therefore f^{-1}(3) = 4$.

答案: 4

[例2] 若函数 $y = f(x)$ 恒满足 $f(2k - x) = f(x)$ (k 为常数), 证明 $y = f(x)$ 的图象关于直线 $x = k$ 对称.

证明: 设 $P(x_0, y_0)$ 是函数 $y = f(x)$ 图象上任一点, $y_0 = f(x_0)$. 点 P 关于直线 $x = k$ 的对称点 $P'(2k - x_0, y_0)$, 由于 $f(2k - x_0) = f(x_0) = y_0$, 所以 $P'(2k - x_0, y_0)$ 也在函数 $y = f(x)$ 的图象上. 由点 P 的任意性, $y = f(x)$ 的图象关于直线 $x = k$ 对称.

说明: $f(2k - x) = f(x) \Leftrightarrow f(-x + k) = f(x + k) \Leftrightarrow y = f(x)$ 的图象关于直线 $x = k$ 对称; $f(-x + a) = f(x + b) \Leftrightarrow y = f(x)$ 的图象关于直线 $x = \frac{a+b}{2}$ 对称.

[例3] 已知函数 $y = f(x)$ 的图象是自原点出发的一条折线. 当 $n \leq y \leq n+1$ ($n = 0, 1, 2, \dots$) 时, 该图象是斜率为 b^n 的线段 (其中正常数 $b \neq 1$), 设数列 $\{x_n\}$ 由 $f(x_n) = n$ ($n = 1, 2, \dots$) 定义.

(1) 求 x_1, x_2 和 x_n 的表达式;

(2) 求 $f(x)$ 的表达式, 并写出其定义域.

分析: 本题是由函数的值域定义的分段函数, 在区间 $y[n, n+1]$ 上其图象是一条线段, 故可用线段两端点的坐标表示出线段所在直线的斜率, 进而求出 x_n 的表达式.

解: (1) 由题意 $f(0) = 0$, 又 $f(x_1) = 1$, 当 $0 \leq y \leq 1$ 时, 函数 $y = f(x)$ 的图象是斜率为 $b^0 = 1$ 的线段, 故由 $\frac{f(x_1) - f(0)}{x_1 - 0} = 1$, 得 $x_1 = 1$; 又由 $f(x_2) = 2$, 当 $1 \leq y \leq 2$ 时, 函数 $y = f(x)$ 的图象是斜率为 b 的线段, 故由 $\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = b$,

即 $x_2 - x_1 = \frac{1}{b}, x_2 = 1 + \frac{1}{b}$, 记 $x_0 = 0$, 由函数 $y = f(x)$ 图象

中第 n 段线段的斜率为 b^{n-1} , 故得 $\frac{f(x_n) - f(x_{n-1})}{x_n - x_{n-1}} = b^{n-1}$,

又 $f(x_n) = n, f(x_{n-1}) = n-1$,

$\therefore x_n - x_{n-1} = (\frac{1}{b})^{n-1}, n = 1, 2, \dots$

由此知数列 $\{x_n - x_{n-1}\}$ 为等比数列,

其首项为 1, 公比为 $\frac{1}{b}$, 因 $b \neq 1$, 得 $x_n = \frac{b - (\frac{1}{b})^{n-1}}{b-1}$.

(2) 由(1)知, 当 $0 \leq y \leq 1$ 时, $y = x$, 即当 $0 \leq x \leq 1$ 时, $f(x) = x$; 当 $n \leq y \leq n+1$ 时, 即 $x_n \leq x \leq x_{n+1}$ 时, 由(1)知, $f(x) = n + b^n \cdot (x - x_n)$ ($n = 1, 2, \dots$).

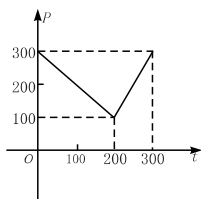
当 $b > 1$ 时 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \frac{b}{b-1}$,

$\therefore f(x)$ 的定义域为 $[0, \frac{b}{b-1})$;

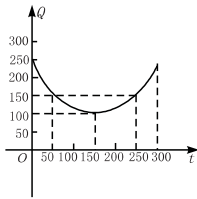
当 $0 < b < 1$ 时, $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ 不存在, 此时 $y = f(x)$ 的定义域为 $[0, \frac{b}{b-1})$.

说明: 如果本题先做出图象, 根据图象就能更易得出结论.

[例4] 某蔬菜基地种植西红柿, 由历年行情得知, 从 2 月 1 日起的 300 天内, 西红柿市场售价与上市时间的关系用图(1)的一条折线表示; 西红柿的种植成本与上市时间的关系用图(2)的抛物线表示.



图(1)



图(2)

(1)写出图(1)表示的市场售价与时间的函数关系式 $P=f(t)$;写出图(2)表示的种植成本与时间的函数关系式 $Q=g(t)$.

(2)认定市场售价减去种植成本为纯收益,问何时上市的西红柿纯收益最大?

(注:市场售价和种植成本的单位:元/ 10^2 kg,时间单位:天)

解:(1)由图(1)可得市场售价与时间的函数关系为 $f(t)=\begin{cases} 300-t, & (0 \leq t \leq 200) \\ 2t-300, & (200 < t \leq 300) \end{cases}$

由图(2)可得种植成本与时间的函数关系为 $g(t)=\frac{1}{200}(t-150)^2+100, (0 \leq t \leq 300)$

(2)设 t 时刻的纯收益为 $h(t)$,则由题意得

$$h(t)=f(t)-g(t)$$

$$\text{即 } h(t)=\begin{cases} -\frac{1}{200}t^2 + \frac{1}{2}t + \frac{175}{2}, & (0 \leq t \leq 200) \\ -\frac{1}{200}t^2 + \frac{7}{2}t - \frac{1025}{2}, & (200 < t \leq 300) \end{cases}$$

当 $0 \leq t \leq 200$ 时,配方整理得

$$h(t)=-\frac{1}{200}(t-50)^2+100$$

\therefore 当 $t=50$ 时, $h(t)$ 取得区间 $[0, 200]$ 上的最大值 100;

当 $200 < t \leq 300$ 时,配方整理得

$$h(t)=-\frac{1}{200}(t-350)^2+100$$

\therefore 当 $t=300$ 时, $h(t)$ 取得区间 $[200, 300]$ 上的最大值 87.5.

综上,由 $100 > 87.5$ 可知, $h(t)$ 在区间 $[0, 300]$ 上可以取得最大值 100,此时 $t=50$,即从 2 月 1 日开始的第 50 天时,上市的西红柿纯收益最大.

说明:本题是一道由函数图象建立函数关系式和求函数最大值问题,既考查了函数的图象和性质,又考查了应用函数知识解决实际问题的能力.

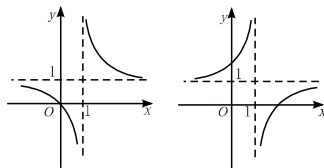
综合能力训练

一、选择题

- 1. 已知函数 $f(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^x$,且函数 $g(x)$ 的图象与 $f(x)$ 的图象关于直线 $y=x$ 对称,则 $g(x^2)$ 是 ()
- A. 奇函数,在 $(0, +\infty)$ 上单调递减
 B. 偶函数,在 $(0, +\infty)$ 上单调递增
 C. 奇函数,在 $(-\infty, 0)$ 上单调递减
 D. 偶函数,在 $(-\infty, 0)$ 上单调递增
- 2. 当函数 $f(x)=2^{x+1}+m$ 的图象不过第二象限时, m 的取值范围是 ()
- A. $m \geq 2$ B. $m \leq -2$ C. $m > 2$ D. $m < -2$

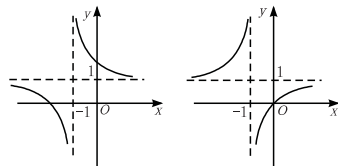
- 3. 如果函数 $y=ax^2+2ax-1$,对于 $x \in [1, 3]$ 上的图象都在 x 轴下方,则 a 的取值范围是 ()
- A. $(0, \frac{1}{15})$ B. $(-\infty, 0)$
 C. $(-\infty, 0) \cup (0, \frac{1}{15})$ D. $(-\infty, \frac{1}{15})$

- 4. 函数 $y=1-\frac{1}{x-1}$ 的图象是 ()



A

B



C

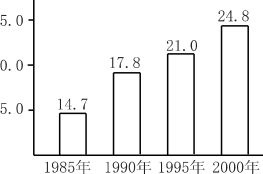
D

- 5. 设二次函数 $f(x)=x^2+x+a(a>0)$,若 $f(m)<0$,则 $f(m+1)$ 的值是 ()

- A. 正数 B. 负数
 C. 非负数 D. 非上述结果

二、填空题

- 6. 据新华社 2002 年 3 月 12 日电, $\frac{\text{面积}/\text{m}^2}{\text{年}}$
 1985 年到 2000 年间,我国农村人均居住面积如图所示,其中,从 _____ 年到 _____ 年的五年间增长最快.



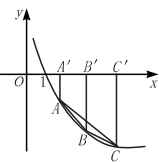
- 7. 将函数 $y=\frac{3}{x+a}$ 的图象向左平

移一个单位后得到 $y=f(x)$ 的图象,再将 $y=f(x)$ 的图象绕原点旋转 180° 后仍与 $y=f(x)$ 的图象本身重合,则 a 的值为 _____.

三、解答题

- 8. 已知二次函数 $f(x)=ax^2+bx+1(a, b \in \mathbf{R}, a > 0)$,设方程 $f(x)=x$ 的两个实根为 x_1 和 x_2 .
- (1)如果 $x_1 < 2 < x_2 < 4$,设函数 $f(x)$ 的对称轴为 $x=x_0$. 求证: $x_0 > -1$;
- (2)如果 $|x_1| < 2, |x_2 - x_1| = 2$,求 b 的取值范围.

- 9. 在函数 $y = \log_a x (0 < a < 1, x \geq 1)$ 的图象上有 A, B, C 三点, 它们的横坐标分别为 $t, t+2, t+4$, 设 $\triangle ABC$ 的面积为 S .



- (1) 求 S 关于 t 的函数表达式;
- (2) 判断 $S(t)$ 的单调性;
- (3) 求函数 $S(t)$ 的值域.

- 10. 设 $f(x)$ 是定义在 $(-\infty, +\infty)$ 上的以 2 为周期的周期函数, 且 $f(x)$ 为偶函数, 在区间 $[2, 3]$ 上 $f(x) = -2(x-3)^2 + 4$.

- (1) 求 $x \in [1, 2]$ 时 $f(x)$ 的解析式;
- (2) 若矩形 $ABCD$ 的两个顶点 A, B 在 x 轴上, C, D 在 $y = f(x) (0 \leq x \leq 2)$ 的图象上, 求这个矩形面积的最大值.

数 $g(x)$ 的图象与函数 $y = \frac{4-3x}{x-1}$ 的图象关于直线 $y = x-1$ 成轴对称图形, 记作 $F(x) = f(x) + g(x)$.

- (1) 求函数 $F(x)$ 的解析式及定义域;
- (2) 试问在函数 $F(x)$ 的图象上是否存在两个不同的点 A, B , 使直线 AB 恰好与 y 轴垂直, 若存在, 求出 A, B 两点的坐标; 若不存在, 说明理由.

解: (1) 由 $y = \frac{2}{10^x+1} - 1 (x \in \mathbf{R})$ 得其反函数为 $f(x) = \lg \frac{1-x}{1+x} (-1 < x < 1)$, 设点 $P(x, y)$ 是函数 $g(x)$ 图象上任意一点, 点 P 关于直线 $y = x-1$ 的对称点是 $Q(a, b)$, 则

$$\begin{cases} \frac{y-b}{x-a} = -1 \\ \frac{y+b}{2} = \frac{x+a}{2} - 1 \end{cases}, \text{解得} \begin{cases} a = y+1 \\ b = x-1 \end{cases}$$

∵ Q 在函数 $y = \frac{4-3x}{x-1}$ 的图象上,

$$\therefore x-1 = \frac{4-3(y+1)}{(y+1)-1},$$

$$\text{即 } g(x) = \frac{1}{x+2} (x \neq -2),$$

$$\therefore F(x) = \lg \frac{1-x}{1+x} + \frac{1}{x+2}, \text{其定义域为 } (-1, 1)$$

(2) 假设函数 $F(x)$ 的图象上存在两个不同的点 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$, 使 AB 与 y 轴垂直, 其中 $x_1, x_2 \in (-1, 1)$, 即当 $x_1 \neq x_2$ 时, 有 $y_1 = y_2$, 不妨设 $x_1 < x_2$.

$$\begin{aligned} y_2 - y_1 &= F(x_2) - F(x_1) \\ &= \lg \frac{(1-x_2)(1+x_1)}{(1+x_2)(1-x_1)} + \frac{x_1 - x_2}{(x_2+2)(x_1+2)} \end{aligned}$$

$$\because -1 < x_1 < x_2 < 1,$$

$$\therefore 0 < \frac{(1+x_1)(1-x_2)}{(1-x_1)(1+x_2)} < 1,$$

$$\lg \frac{(1+x_1)(1-x_2)}{(1-x_1)(1+x_2)} < 0$$

$$\text{同理, } \frac{x_1 - x_2}{(x_2+2)(x_1+2)} < 0,$$

$$\therefore y_2 - y_1 < 0, \text{这与 } y_1 = y_2 \text{ 矛盾.}$$

故函数 $F(x)$ 的图象上不存在两个不同的点 A, B , 使直线 AB 与 y 轴垂直.

[例2] (2003 年上海春季高考题) 已知函数 $f(x) = \frac{x^{\frac{1}{3}} - x^{-\frac{1}{3}}}{5}$,

$$g(x) = \frac{x^{\frac{1}{3}} + x^{-\frac{1}{3}}}{5}.$$

- (1) 证明 $f(x)$ 是奇函数; 并求 $f(x)$ 的单调区间.
- (2) 分别计算 $f(4) - 5f(2)g(2)$ 和 $f(9) - 5f(3)g(3)$ 的值, 由此概括出涉及函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 的对所有不等于零的实数 x 都成立的一个等式, 并加以证明.

$$(1) \text{证明: } f(x) = \frac{x^{\frac{1}{3}} - x^{-\frac{1}{3}}}{5},$$

$$f(-x) = \frac{(-x)^{\frac{1}{3}} - (-x)^{-\frac{1}{3}}}{5} = \frac{-x^{\frac{1}{3}} + x^{-\frac{1}{3}}}{5}$$

$$= -\frac{x^{\frac{1}{3}} - x^{-\frac{1}{3}}}{5} = -f(x)$$

∴ $f(x)$ 是奇函数.

§ 1.3 函数的综合问题及应用

主干知识整合

函数, 几乎渗透到中学数学的各个角落, 它与其他知识互相渗透, 相互融和. 函数这一章应用的广泛性、解法的多样性和思维的创造性构成了本课时的重点, 特别是函数与不等式、函数与数列的综合问题是近几年高考的热点, 多半也是高考压轴题. 运用函数思想解决应用问题是函数中的难点.

典型例题透析

[例1] 已知函数 $f(x)$ 是函数 $y = \frac{2}{10^x+1} - 1 (x \in \mathbf{R})$ 的反函数, 函

设 $0 < x_1 < x_2, x_1^{\frac{1}{3}} < x_2^{\frac{1}{3}}, x_2^{-\frac{1}{3}} < x_1^{-\frac{1}{3}}$

$$f(x_1) - f(x_2) = \frac{x_1^{\frac{1}{3}} - x_1^{-\frac{1}{3}}}{5} - \frac{x_2^{\frac{1}{3}} - x_2^{-\frac{1}{3}}}{5}$$

$$= \frac{x_1^{\frac{1}{3}} - x_2^{\frac{1}{3}}}{5} + \frac{x_2^{-\frac{1}{3}} - x_1^{-\frac{1}{3}}}{5} > 0$$

∴ $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上是增函数,

又 $f(x)$ 为奇函数

∴ $f(x)$ 在 $(-\infty, 0)$ 或 $(0, +\infty)$ 上都是增函数.

(2) 解: $f(4) - 5f(2)g(2) = \frac{4^{\frac{1}{3}} - 4^{-\frac{1}{3}}}{5} - 5 \times \frac{2^{\frac{1}{3}} - 2^{-\frac{1}{3}}}{5} \times$

$$\frac{2^{\frac{1}{3}} + 2^{-\frac{1}{3}}}{5} = 0$$

$$f(9) - 5f(3)g(3) = \frac{9^{\frac{1}{3}} - 9^{-\frac{1}{3}}}{5} - 5 \times \frac{3^{\frac{1}{3}} - 3^{-\frac{1}{3}}}{5} \times \frac{3^{\frac{1}{3}} + 3^{-\frac{1}{3}}}{5}$$

= 0

由此得到一个等式, $f(x^2) - 5f(x) \cdot g(x) = 0 (x \neq 0)$

证明: $f(x^2) - 5f(x) \cdot g(x) = \frac{(x^2)^{\frac{1}{3}} - (x^2)^{-\frac{1}{3}}}{5} - 5 \times$

$$\frac{x^{\frac{1}{3}} - x^{-\frac{1}{3}}}{5} \times \frac{x^{\frac{1}{3}} + x^{-\frac{1}{3}}}{5}$$

$$= \frac{x^{\frac{2}{3}} - x^{-\frac{2}{3}}}{5} - \frac{x^{\frac{2}{3}} - x^{-\frac{2}{3}}}{5} = 0$$

故所得等式对于 $x \neq 0$ 都成立.

[例3] 设函数 $f(x)$ 定义域为 \mathbf{R} , 当 $x > 0$ 时, $f(x) > 1$, 且对任意 $x, y \in \mathbf{R}$, 有 $f(x+y) = f(x) \cdot f(y)$.

(1) 证明: $f(0) = 1$;

(2) 证明: $f(x)$ 在 \mathbf{R} 上是增函数;

(3) 设集合 $A = \{(x, y) | f(x^2) \cdot f(y^2) < f(1)\}$, $B = \{(x, y) | f(x+y+c) = 1, c \in \mathbf{R}\}$, 若 $A \cap B = \emptyset$, 求 c 的取值范围.

(1) 证明: 为使 $f(x+y) = f(x) \cdot f(y)$ 中出现 $f(0)$, 借助 $x > 0$ 时, $f(x) > 1$.

则设 $x=0, y=1$, 得

$$f(0+1) = f(0) \cdot f(1),$$

$$\text{即 } f(1) = f(0) \cdot f(1)$$

$$\because f(1) > 1 \quad \therefore f(0) = 1$$

(2) 证明: $f(x)$ 在 \mathbf{R} 上是增函数, 即证明当 $x_1 < x_2$ 时, 有 $f(x_1) < f(x_2)$.

∴ 对 $x_1, x_2 \in \mathbf{R}, x_1 < x_2$, 则 $x_2 - x_1 > 0$

$$f(x_2) = f(x_1 + x_2 - x_1) = f(x_1) \cdot f(x_2 - x_1)$$

$$\because f(x_2 - x_1) > 1$$

故要证明 $f(x_2) > f(x_1)$, 只要证明 $f(x_1) > 0$ 即可.

事实上, ∴ $x_1 > 0$ 时, $f(x_1) > 1 > 0$

当 $x_1 = 0$ 时, $f(x_1) = 1 > 0$

当 $x_1 < 0$ 时, $f(x_1) \cdot f(x_1) = f(x_1 - x_1) = f(0) = 1$

又 ∴ $f(-x_1) > 1, \therefore 0 < f(x_1) < 1$

故对于一切 $x_1 \in \mathbf{R}$, 有 $f(x_1) > 0$

∴ $f(x_2) = f(x_1) \cdot f(x_2 - x_1) > f(x_1)$, 故命题得证.

(3) 解: A: $f(x^2 + y^2) < f(1)$, 则由单调性知 $x^2 + y^2 < 1$.

B: 由单调性知 $f(x+y+c) = f(0)$

$$\therefore x+y+c=0$$

故若 $A \cap B = \emptyset$, 用图形分析知: 只要圆 $x^2 + y^2 = 1$ 与直线 $x + y + c = 0$ 相离或相切, 故 $\frac{|c|}{\sqrt{2}} \geq 1, \therefore c \geq \sqrt{2}$ 或 $c \leq -\sqrt{2}$

说明: 第(2)题也可作如下处理:

$$f(x) \cdot f(-x) = f(0) = 1 > 0, \text{得 } f(-x) = \frac{1}{f(x)} \text{ 证得 } f(x) > 0 \text{ 恒成立.}$$

> 0 恒成立.

$$\text{且 } \frac{f(x_2)}{f(x_1)} = f(x_2) \cdot f(-x_1) = f(x_2 - x_1) > 1$$

$$\therefore f(x_2) > f(x_1)$$

[例4] 某地区地理环境偏僻, 严重制约经济发展, 其土特产品只能在本地销售, 该地区政府每投资 x 万元, 所获利润为 $P = -\frac{1}{160}(x-40)^2 + 10$ 万元. 为顺应开发大西北的宏伟决策, 该地区政府在制订经济发展十年规划时, 拟开发此种土特产品, 而开发前后用于该项目投资的专项财政拨款每年都是 60 万元. 若开发该产品, 必须在前 5 年中, 每年从 60 万元专款中拿出 30 万元投资修通一条公路, 且 5 年可以修通. 公路修通后该土特产品在异地销售, 每投资 x 万元, 可获利润 $Q = -\frac{159}{160}(60-x)^2 + \frac{119}{2}(60-x)$ 万元. 问从十年的总利润看, 该项目有无开发价值?

解: 若按原来投资环境不变, 由 $P = -\frac{1}{160}(x-40)^2 + 10$ 知,

当 $x=40$ 时, $P_{\text{最大}} = 10$ (万元), 即每年只需从 60 万元专款中拿出 40 万元投资, 可获得最大利润 10 万元, 这样 10 年总利润最大值为 100 万元.

若对该产品开发, 前 5 年可用于对该产品的投资只有 30 万元, 而 $P = -\frac{1}{160}(x-40)^2 + 10$ 在 $(0, 30]$ 上递增,

$$\therefore \text{当 } x=30 \text{ 时, } P_{\text{最大}} = \frac{75}{8}, \text{ 前 5 年总利润 } \frac{375}{8} \text{ 万元.}$$

设后 5 年, x 万元用于本地销售投资, $60-x$ 万元用于异地销售投资, 则总利润:

$$\left[-\frac{1}{160}(x-40)^2 + 10\right] \times 5 + \left(-\frac{159}{160}x^2 + \frac{119}{2}x\right) \times 5 = -5\left[-(x-30)^2 + 900\right],$$

∴ 当 $x=30$ 时, 利润最大, 此时利润为 4500 万元, ∴ 十年总利润为 $\frac{375}{8} + 4500 > 100$, 故该项目具有极大的开发价值.

说明: 本题是一道应用题, 这类题目的立意、实际背景、创设的情境、设问角度和方式新颖灵活, 对学生的能力和数学素质有较高的要求, 成为近几年高考的热点. 解答应用题应过好三关: ① 读懂题意; ② 将实际背景问题转化为数学的符号语言; ③ 构建数学模型, 用数学方法解答.

[例5] (2003 年北京春季高考题) 某租赁公司拥有汽车 100 辆. 当每辆车的月租金为 3000 元时, 可全部租出. 当每辆车的月租金每增加 50 元时, 未租出的车将会增加一辆. 租出的车每辆每月需要维护费 200 元.

(1) 当每辆车的月租金定为 3600 元时, 能租出多少辆车?

(2) 当每辆车的月租金定为多少元时, 租赁公司的月收益最大? 最大月收益是多少?

本小题主要考查二次函数的性质等基本知识, 考查分析和解决问题的能力. 解: (1) 当每辆车的月租金定为 3600 元时, 未租出的车辆数为 $\frac{3600-3000}{50} = 12$, 所以这时租出了 88 辆车.

(2) 设每辆车的月租金定为 x 元, 则租赁公司的月收益为



$$f(x) = (100 - \frac{x-3000}{50})(x-200),$$

整理得

$$f(x) = \frac{1}{50}(8000-x)(x-200) = -\frac{1}{50}x^2 + 164x - 32000 = -\frac{1}{50}(x-4100)^2 + 304200.$$

所以,当 $x = 4100$ 时, $f(x)$ 最大,最大值为 $f(4100) = 304200$.

即当每辆车的月租金定为 4100 元时,租赁公司的月收益最大,最大月收益为 304200 元.

综合能力训练

一、选择题

- 1. 已知 x_1 是方程 $x + \lg x = 3$ 的根, x_2 是方程 $x + 10^x = 3$ 的根,则 $x_1 + x_2$ 等于 ()
 A. 6 B. 3 C. 2 D. 1
- 2. 函数 $y = x^2 + bx + c (x \in [0, +\infty))$ 是单调函数的充要条件是 ()
 A. $b \geq 0$ B. $b \leq 0$ C. $b > 0$ D. $b < 0$
- 3. 东方旅社有 100 张普通客床,每床每夜收租费 10 元时,客床可以全部租出;若每床每夜收费提高 2 元,便减少 10 张床租出;再提高 2 元,再减少 10 张床租出,依次变化下去,为了投资少而获利大,每床每夜应提高租金 ()
 A. 4 元 B. 6 元
 C. 4 元或 6 元 D. 10 元
- 4. 设函数 $y = f(x)$ 对任意实数 x 都有 $f(3+x) = f(3-x)$,且 $f(x) = 0$ 的所有实根之和为 18,则方程 $f(x) = 0$ 共有实根 ()
 A. 4 个 B. 6 个
 C. 8 个 D. 非上述结果
- 5. 设 $f(x), g(x)$ 都是单调函数,则下列命题中正确的命题是 ()
 ①若 $f(x)$ 单调递增, $g(x)$ 单调递增,则 $f(x) - g(x)$ 单调递增;
 ②若 $f(x)$ 单调递增, $g(x)$ 单调递减,则 $f(x) - g(x)$ 单调递增;
 ③若 $f(x)$ 单调递减, $g(x)$ 单调递增,则 $f(x) - g(x)$ 单调递减;
 ④若 $f(x)$ 单调递减, $g(x)$ 单调递减,则 $f(x) - g(x)$ 单调递减.
 A. ①③ B. ①④ C. ②③ D. ②④

二、填空题

- 6. 老师给出一个函数 $y = f(x)$,四个学生甲、乙、丙、丁各指出这个函数的一个性质:
 甲:对于 $x \in \mathbf{R}$,都有 $f(1+x) = f(1-x)$;
 乙:在 $(-\infty, 0]$ 上函数递减;
 丙:在 $(0, +\infty)$ 上函数递增;
 丁: $f(0)$ 不是函数的最小值.
 如果其中恰有三人说得正确,请写出一个这样的函数 _____.
- 7. $f(x)$ 是定义在 \mathbf{R} 上的偶函数,其图象关于 $x = 2$ 对称,且当 $x \in (-2, 2)$ 时, $f(x) = -x^2 + 1$,则当 $x \in (-6, -2)$ 时, $f(x) =$ _____.

三、解答题

- 8. 已知 $y = x^2 - 2x + 3$ 在区间 $[0, a]$ 上的最大值为 3,最小值为 2,求 a 的取值范围.
- 9. 在研究并行计算的基本算法时,有以下简单模型问题:

用计算机求 n 个不同的数 v_1, v_2, \dots, v_n 的和 $\sum_{i=1}^n v_i = v_1 + v_2 + v_3 + \dots + v_n$. 计算开始前, n 个数存贮在 n 台由网络连接的计算机中,每台机器存一个数. 计算开始后,在一个单位时间内,每台机器至多到一台其他机器中读数据,并与自己原有数据相加得到新的数据,各台机器可同时完成上述工作. 为了用尽可能少的单位时间,使各台机器都得到这 n 个数的和,需要设计一种读和加的方法. 比如 $n=2$ 时,一个单位时间即可完成计算,方法可用下表表示:

机器号	初始时	第一单位时间		第二单位时间		第三单位时间	
		被读机号	结果	被读机号	结果	被读机号	结果
1	v_1	2	$v_1 + v_2$				
2	v_2	1	$v_2 + v_1$				

- (1) 当 $n=4$ 时,至少需要多少个单位时间可完成计算? 把你设计的方法填入下表:

机器号	初始时	第一单位时间		第二单位时间		第三单位时间	
		被读机号	结果	被读机号	结果	被读机号	结果
1	v_1						
2	v_2						
3	v_3						
4	v_4						

- (2) 当 $n=128$ 时,要使所有机器都得到 $\sum_{i=1}^n v_i$,至少需要多少个单位时间可完成计算? (结论不要求证明)

- 10. 已知函数 $f(x) = a \cdot b^x$ 的图象过点 $A(4, \frac{1}{4})$ 和 $B(5, 1)$.
- (1) 求函数 $f(x)$ 的解析式;
 (2) 记 $a_n = \log_2 f(n)$, n 是正整数, S_n 是数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和,解关于 n 的不等式 $a_n S_n \leq 0$;
 (3) 对于(2)中的 a_n 与 S_n , 整数 10^4 是否为数列 $\{a_n S_n\}$ 中的项? 若是,则求出相应的项数;若不是,则说明理由.

能力提升质量检测(一)

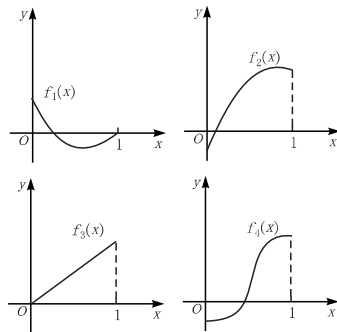
第 I 卷(选择题 共 60 分)

一、选择题(本大题共 12 小题,每小题 5 分,共 60 分.在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的)

- ▶ 1. 定义 $A-B = \{x | x \in A \text{ 且 } x \notin B\}$, 如果 $M = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $N = \{2, 3, 6\}$, 则 $M-N$ 等于 ()
- A. M B. N C. $\{1, 4, 5\}$ D. $\{6\}$
- ▶ 2. 先将 $y=2^x$ 的图象如何移动, 再作关于直线 $y=x$ 对称的图象, 可得到函数 $y=\log_2(x+1)$ 的图象 ()
- A. 先向左平行移动 1 个单位
B. 先向右平行移动 1 个单位
C. 先向上平行移动 1 个单位
D. 先向下平行移动 1 个单位
- ▶ 3. 已知 $f(x) = 3ax - 2a + 1$ 在 $[-1, 1]$ 上存在 $x_0 (x_0 \neq 1)$, 使 $f(x_0) = 0$, 则实数 a 的取值范围为 ()
- A. $(-1, \frac{1}{5})$ B. $(\frac{1}{5}, +\infty)$
C. $(-\infty, -1)$ D. $(-\infty, -1) \cup [\frac{1}{5}, +\infty)$
- ▶ 4. 已知函数 $y = f(x)$ 是定义域 \mathbf{R} 上的减函数, 则 $y = f(|x+2|)$ 的单调递减区间是 ()
- A. \mathbf{R} B. $(-2, +\infty)$
C. $(2, +\infty)$ D. $(-\infty, -2)$
- ▶ 5. 如图所示, 把函数 $y = f(x)$ 在 $x \in [a, b]$ 之间的一段图象近似地看作线段, 设 $a \leq c \leq b$, 则 $f(c)$ 的近似值为 ()
- A. $\frac{f(a)+f(b)}{2}$
B. $\sqrt{f(a) \cdot f(b)}$
C. $f(a) + \frac{c-a}{b-a}[f(b)-f(a)]$
D. $f(b) - \frac{c-b}{a-b}[f(a)-f(b)]$
- ▶ 6. 若函数 $y = \log_{\frac{1}{2}}(x^2 - ax - a)$ 在区间 $(-\infty, 1 - \sqrt{3})$ 上是增函数, 则 a 的取值范围是 ()
- A. $a \geq 2 - 2\sqrt{3}$
B. $a > 2 - 2\sqrt{3}$
C. $2 - 2\sqrt{3} \leq a \leq 2$
D. $2 - 2\sqrt{3} < a < 2$
- ▶ 7. 已知定义在 \mathbf{R} 上的偶函数 $f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上是增函数, 且 $f(\frac{1}{3}) = 0$, 则满足 $f(\log_{\frac{1}{8}} x) > 0$ 的 x 的取值范围是 ()
- A. $(\frac{1}{2}, 1) \cup (2, +\infty)$ B. $(0, \frac{1}{2})$
C. $(0, \frac{1}{2}) \cup (2, +\infty)$ D. $(2, +\infty)$
- ▶ 8. 设 $f(x)$ 是奇函数, 且对任意 $x, y \in \mathbf{R}$, 有 $f(x+y) = f(x) + f(y)$, 若 $x > 0$ 时, 有 $f(x) < 0$, 又 $f(1) = -2$, 则对于 $f(x)$

- 在 $[-3, 3]$ 上的最值的结论是 ()
- A. 最大值为 6, 无最小值
B. 最小值为 -6, 无最大值
C. 最大值为 6, 最小值为 -6
D. 最小值为 -6, 最大值不是 6

- ▶ 9. 如图所示, $f_1(x), f_2(x), f_3(x), f_4(x)$ 是定义在 $[0, 1]$ 上的四个函数, 其中满足性质: “对 $[0, 1]$ 中任意的 x_1 和 x_2 , $f(\frac{x_1+x_2}{2}) \leq \frac{1}{2}[f(x_1) + f(x_2)]$ 恒成立” 的只有 ()



- A. $f_1(x), f_3(x)$ B. $f_2(x)$
C. $f_2(x), f_3(x)$ D. $f_4(x)$
- ▶ 10. 已知 $f(x)$ 是定义在 \mathbf{R} 上的函数, $f(10+x) = f(10-x)$ 且 $f(20-x) = -f(20+x)$, 则 $f(x)$ 是 ()
- A. 周期为 20 的奇函数 B. 周期为 20 的偶函数
C. 周期为 40 的奇函数 D. 周期为 40 的偶函数
- ▶ 11. 将 $y = \frac{1}{x}$ 的图象向右平移 1 个单位, 向上平移 2 个单位, 再作关于 $y=x$ 的对称图象, 所得图象的函数的解析式为 ()
- A. $y = \frac{x-1}{x-2}$ B. $y = \frac{-x+3}{x-2}$
C. $y = \frac{-x-1}{x+2}$ D. $y = \frac{x+3}{x+2}$
- ▶ 12. 设 $a > 1$, 函数 $f(x) = \frac{1}{2}(a^x + a^{-x})$, 则使 $f^{-1}(x) > 1$ 成立的 x 的取值范围是 ()
- A. $(\frac{a^2-1}{2a}, +\infty)$ B. $(-\infty, \frac{a^2-1}{2a})$
C. $[a, \frac{a^2-1}{2a})$ D. $(a, +\infty)$

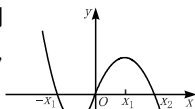
第 II 卷(非选择题 共 90 分)

二、填空题(本大题共 4 小题, 每小题 4 分, 共 16 分. 把正确答案填在题中横线上)

- ▶ 13. 使函数 $y = x^2 - 4x + 5$ 具有反函数的一个条件是 _____.
- ▶ 14. 已知函数 $f(x) = \frac{x^2}{1+x^2}$, 那么 $f(1) + f(2) + f(\frac{1}{2}) + f(3) + f(\frac{1}{3}) + f(4) + f(\frac{1}{4}) =$ _____.



- 15. 已知二次函数 $f(x)$ 的二次项的系数是负值, 对任意实数 x 恒有 $f(2+x) = f(2-x)$ 成立, 则 $f(1-2x^2)$ _____ $f(1+2x-x^2)$ 时, 才有 $-2 < x < 0$.



- 16. 已知函数 $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ 的图象如图所示, 则 a, b, c, d 与 0 可分别用“<”“>”或“=”连接如下: a _____ $0, b$ _____ $0, c$ _____ $0, d$ _____ 0 .

三、解答题(本大题共 6 小题, 共 74 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤)

- 17. (本小题满分 12 分)

已知两个函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ ($[a, b]$ 是其公共定义域), 若

对任意的 $x \in [a, b]$, 总有 $|\frac{f(x)-g(x)}{f(x)}| \leq \frac{1}{10}$, 我们就称

$f(x)$ 可被 $g(x)$ “替代”. 试判断: $f(x) = \sqrt{x}$ 是否可被函数

$g(x) = \frac{1}{5}(x+6)$ 替代 ($x \in [4, 16]$) ?

- 18. (本小题满分 12 分)

已知二次函数 $y = f(x)$ 的定义域为 \mathbf{R} , $f(1) = 2$, 且在 $x = t$ 处 (t 为实数) 取得最值, 若 $y = g(x)$ 为一次函数, 且 $f(x) + g(x) = x^2 + 2x - 3$.

(1) 求 $y = f(x)$ 的解析式;

(2) 若 $x \in [-1, 2]$ 时, $f(x) \geq -1$ 恒成立, 求 t 的取值范围.

- 19. (本小题满分 12 分)

设函数 $f(x) = \frac{(1+a)x^2+1}{bx+c}$ 为奇函数, 其中 $a, b, c \in \mathbf{Z}$, 又

满足 $f(1) = 3, 5 < f(3) < 7$.

(1) 求函数 $f(x)$ 的解析式;

(2) 用单调性定义, 判断函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, 0)$ 上的增减性.

- 20. (本小题满分 12 分)

已知函数 $y = f(x)$ 是定义在 \mathbf{R} 上的周期函数, 周期 $T = 5$, 函数 $y = f(x)$ ($-1 \leq x \leq 1$) 是奇函数, 又知 $y = f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上是一次函数, 在 $[1, 4]$ 上是二次函数且在 $x = 2$ 时函数取得最小值, 最小值为 -5 .

(1) 证明 $f(1) + f(4) = 0$;

(2) 试求 $y = f(x), x \in [1, 4]$ 的解析式;

(3) 试求 $y = f(x)$ 在 $[4, 9]$ 上的解析式.

▶ 21. (本小题满分 12 分)

某商品在近 30 天内每件的销售价格 P (元)与时间 t (天)的函数关系为 $P = \begin{cases} t+20, & (0 < t < 25, t \in \mathbf{N}); \\ -t+100, & (25 \leq t \leq 30, t \in \mathbf{N}) \end{cases}$; 该商品的日销售量 Q (件)与时间 t (天)的函数关系是 $Q = -t + 40 (0 < t \leq 30, t \in \mathbf{N})$. 求这种商品的日销售金额的最大值, 并指出该最大值出现在 30 天中的第几天?

▶ 22. (本小题满分 14 分)

已知 $f(x)$ 是定义在 \mathbf{R} 上的不恒为零的函数, 且对于任意的 $a, b \in \mathbf{R}$ 都满足: $f(a \cdot b) = af(b) + bf(a)$.

- (1) 求 $f(0), f(1)$ 的值;
- (2) 判断 $f(x)$ 的奇偶性, 并证明你的结论;
- (3) 若 $u_n = f(2^n)$ 且 $u_n > 0$, 求证 $u_{n+1} > u_n (n \in \mathbf{N})$.



三军可夺帅也, 匹夫不可夺志也。

二、数 列

高考分析与趋势预测

数列是初等数学与高等数学衔接和联系最密切的内容之一,是进一步学习高等数学的基础,数列的题目形态多变,蕴含丰富的数学思想和方法,是高考的热点之一.在近几年新教材的高考试题中,对数列的考查多以解答题的形式出现,考查数列与极限,数列与数学归纳法,数列与函数,数列与不等式等的综合知识,在知识的交汇点处设计题目,成为高考对能力和素质考查的重要方面.在数列方面的考查,对能力方面的要求,呈现越来越高的趋势,对知识考查的同时,伴随着对数学思想方法的考查.在近几年新教材的高考试题中,数列约占 9.3%,考查的内容主要有:①等差数列、等比数列的基本知识(定义、通项公式、前 n 项和公式);②等差数列与等比数列与其他知识点的综合运用,及用数列知识解决实际问题.③函数和方程的思想,化归思想,分类讨论思想,待定系数法等.

§ 2.1 数列的基本运算和性质

主干知识整合

本课时重点是掌握等差数列、等比数列的概念,并能用定义解题,掌握等差、等比数列的通项公式、前 n 项和公式;掌握用基本量(a_n, d 或 q, a_1, n, S_n)法和利用等差、等比数列的性质解决数列问题的方法;掌握求和的常见方法;培养学生分析问题的能力.

典型例题透析

[例1](2003年北京春季高考题)在等差数列 $\{a_n\}$ 中,已知 $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 = 20$,那么 a_3 等于.....()

- A. 4 B. 5 C. 6 D. 7

考查方向:考查三角函数列的性质.

试题分析: $\because a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 = 20, \therefore 5a_3 = 20, a_3 = 4$.

答案:A

[例2]已知等差数列 $\{a_n\}$ 中, $d = \frac{1}{2}, a_k = \frac{3}{2}, S_k = -\frac{15}{2}$,求 a_1 与 k .

本题主要考查等差数列的通项及前 n 项和公式及其变形.

分析一:由 $a_k = a_1 + (k-1)d, S_k = ka_1 + \frac{k(k-1)}{2}d$ 可建立关于 a_1 与 k 的方程组.

解法一:由 $d = \frac{1}{2}, a_k = \frac{3}{2}, S_k = -\frac{15}{2}$ 得

$$\begin{cases} a_1 + \frac{1}{2}(k-1) = \frac{3}{2} \\ ka_1 + \frac{1}{4}k(k-1) = -\frac{15}{2} \end{cases} \quad \text{解得} \quad \begin{cases} k=10 \\ a_1 = -3 \end{cases}$$

说明:若五个基本量 $a_1, d(q), a_n, S_n, n$ 任知三个,则可求其他两个.

分析二: $S_k = ka_1 + \frac{k(k-1)}{2}d$ 还可变形为 $S_k =$

$k[a_1 - (k-1)d] + \frac{k(k-1)}{2}d$,从而本题还可有如下解法.

解法二:由 $-\frac{15}{2} = k(\frac{3}{2}) - \frac{1}{2}k(k-1) \cdot \frac{1}{2}$ 知

$$k=10(k=-3 \text{舍}), a_1 = \frac{3}{2} - (10-1) \cdot \frac{1}{2} = -3.$$

说明:灵活运用了等差数列的前 k 项和与通项公式的变形:

$S_k = ka_1 - \frac{1}{2}k(k-1)d$,及 $a_1 = a_k - (k-1)d$.对公式的应用,要达到会正用、倒用、变形用、灵活运用公式,有时能简化运算,加速问题的解决.

[例3]数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 $S_n = n^2 p a_n (n \in \mathbf{N}^*)$ 且 $a_1 \neq a_2$,

(1)求常数 p 的值;

(2)证明 $\{a_n\}$ 为等差数列.

本题考查学生反证法的思想,逻辑推理能力及等差数列、数学归纳法的知识.

分析:(1)关键是把 S_n 写成项的和的形式,建立关于 p 的方程,给 n 以具体的值 $n=1$ 和 $n=2$.

(2)求 a_n 的表达式.

(1)解:由 $S_n = n^2 p a_n \Rightarrow a_n = p a_1 \Rightarrow (p-1)a_1 = 0$.

若 $p=1$,则 $S_2 = 2a_2, \therefore a_1 + a_2 = 2a_2, \therefore a_1 = a_2$ 矛盾

$\therefore p \neq 1, \therefore a_1 = 0$.

由 $S_2 = 2^2 p a_2$ 得 $a_1 + a_2 = 2p a_2$,

$\therefore (2p-1)a_2 = 0, \therefore a_1 \neq a_2, a_1 = 0$

$\therefore a_2 \neq 0, \therefore p = \frac{1}{2}$.

(2)证明:由 $S_3 = 3 \cdot \frac{1}{2} a_3 \Rightarrow a_3 = 2a_2$,由 $S_4 = 4 \cdot \frac{1}{2} a_4$ 得 $a_4 = 3a_2$,猜想 $a_n = (n-1)a_2$.

以下用数学归纳法证明

当 $n=1$ 时, $a_1 = 0 = (1-1)a_2$,等式成立

假设当 $n=k$ 时成立,即 $a_k = (k-1)a_2$

当 $n=k+1$ 时, $S_{k+1} = S_k + a_{k+1} \Rightarrow (k+1) \cdot \frac{1}{2} a_{k+1} = k \cdot \frac{1}{2} a_k +$

$a_{k+1} \Rightarrow \frac{k-1}{2} a_{k+1} = \frac{k}{2} a_k = \frac{k(k-1)}{2} a_2 \Rightarrow a_{k+1} = k a_2$

即 $n=k+1$ 时,命题成立.

故 $a_n = (n-1)a_2 (n \in \mathbf{N}^*)$

$\therefore \{a_n\}$ 是 $a_1 = 0$,公差为 a_2 的等差数列

本步还可用如下方法解:

由 $S_n = \frac{1}{2}na_n$ 得 $S_{n-1} = \frac{1}{2}(n-1)a_{n-1}$,

两式相减得 $a_n = \frac{1}{2}na_n - \frac{1}{2}(n-1)a_{n-1}$,

整理得 $(n-2)a_n = (n-1)a_{n-1}$

\therefore 当 $n \geq 3$ 时, $a_n = \frac{n-1}{n-2}a_{n-1}$

令 $n=3, 4, \dots, n$ 得 $a_3 = 2a_2, a_4 = \frac{3}{2}a_3, a_5 = \frac{4}{3}a_4, \dots, a_n =$

$\frac{n-1}{n-2}a_{n-1}$

相乘得 $a_n = (n-1)a_2 (n \geq 3)$.

$\therefore \{a_n\}$ 是 $a_1=0$, 公差为 2 的等差数列.

说明: 以数列为载体, 考查学生的数学思想方法和逻辑推理能力是近几年高考的突出特点.

本题学生容易出现由 $a_1 = pa_1 \Rightarrow p=1$, 忽略了 a_1 可能为 0 的情况.

[例4] 求证: 在等差(或等比)数列中, 连续 m 项的和构成的数列仍是等差(或等比)数列, 且其公差 $D=m^2d$, D, d 分别为新数列、原数列的公差; 公比 $Q=q^m$, $Q, q (q \neq 1)$ 分别为新数列、原数列的公比.

证明: 对于数列 $\{a_n\}$ 中, 设 $S_1 = a_k + a_{k+1} + \dots + a_{k+(m-1)}, S_2 = a_{k+m} + a_{k+(m+1)} + \dots + a_{k+(2m-1)}, S_3 = a_{k+2m} + a_{k+2m+1} + \dots + a_{k+3m-1} + \dots$, 在等差数列中, $S_{l+1} - S_l = [m \cdot a_{k+l \cdot m} + \frac{m(m-1)}{2}d] - [m \cdot a_{k+(l-1)m} + \frac{m(m-1)}{2}d] = m \cdot [a_{k+lm} - a_{k+(l-1)m}] = m \cdot md = m^2d$; 在等比数列中, 因公比 $q \neq 1$, 则

$$\frac{S_{l+1}}{S_l} = \frac{a_{k+lm}}{a_{k+(l-1)m}} = q^m.$$

说明: 通过本例要启发学生善于总结, 提炼基础知识与基本方法, 并用于指导解题实践. 如:

(1) 任意两项 a_n, a_m 间的关系, 等差数列中, $a_m - a_n = (m-n)d$; 等比数列中, $\frac{a_m}{a_n} = q^{m-n}$; (2) 等差中项 $b = \frac{a+c}{2}$; 等比中项 $b = \pm \sqrt{ac}$; (3) $S_n = pn^2 + qn (p \neq 0 \text{ 或 } p=0, q \neq 0, p, q \text{ 是常数})$ 是数列 $\{a_n\}$ 为等差数列的充要条件.

综合能力训练

一、选择题

►1. 在项数为 $2n+1$ 的等差数列中, 所有奇数项和与所有偶数项和之比为 ()

- A. $\frac{2n+1}{2n}$ B. $\frac{2n}{2n+1}$ C. $\frac{n+1}{n}$ D. $\frac{n}{n+1}$

►2. 已知数列的通项 $a_n = \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}$, 前 n 项和为 9, 项数 n 是 ()

- A. 9 B. 99 C. 100 D. 1000

►3. 已知 x, y 为正实数, 且 x, a_1, a_2, y 成等差数列, x, b_1, b_2, y 成等比数列, 则 $\frac{(a_1+a_2)^2}{b_1b_2}$ 的取值范围是 ()

- A. \mathbf{R} B. $(0, 4]$
C. $[4, +\infty)$ D. $(-\infty, 0] \cup [4, +\infty)$

►4. 在等差数列 $\{a_n\}$ 中, 若 $S_4=1, S_8=4$, 则 $a_{17}+a_{18}+a_{19}+a_{20}$ 的值为 ()

- A. 7 B. 8 C. 9 D. 13

►5. 已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 且 $a_n = S_n \cdot S_{n-1} (n \geq 2), a_1 = \frac{2}{9}$, 则 a_{10} 等于 ()

- A. $\frac{4}{9}$ B. $\frac{4}{7}$ C. $\frac{4}{63}$ D. $\frac{5}{63}$

►6. 等差数列 $\{a_n\}, \{b_n\}$ 的前 n 项和分别为 S_n 与 T_n , 若 $\frac{S_n}{T_n} = \frac{2n}{3n+1}$, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n}$ 等于 ()

- A. 1 B. $\frac{\sqrt{6}}{3}$ C. $\frac{2}{3}$ D. $\frac{4}{9}$

二、填空题

►7. 设 $\{a_n\}$ 是公比为 q 的等比数列, S_n 是它的前 n 项和, 若 $\{S_n\}$ 是等差数列, 则 $q =$ _____.

►8. 已知数列 $\{a_n\}$ 成等差数列, 并且 $S_m = n, S_n = m (m \neq n)$, 那么 $S_{m+n} =$ _____.

►9. 在等差数列 $\{a_n\}$ 中, 若 $a_{10} = 0$, 则有等式: $a_1 + a_2 + \dots + a_n = a_1 + a_2 + \dots + a_{19-n} (n \in \mathbf{N}^*, n < 19)$ 成立. 类比上述性质, 相应地: 在等比数列 $\{b_n\}$ 中, 若 $b_9 = 1$, 则有等式 _____ 成立.

三、解答题

►10. 等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , S_n 的最大值为 S_{99} , 且 $|a_{99}| < |a_{100}|$, 求使 $S_n > 0$ 的 n 的最大值.

►11. 在数列 $\{a_n\}$ 中, $a_1 = 1$, 当 $n \geq 2$ 时, $a_n, S_n, S_n - \frac{1}{2}$ 成等比数列. 求:

- (1) 通项 a_n ;
(2) 数列 $\{a_n\}$ 所有项的和.