

图书在版编目(CIP)数据

新概念解题方略/数学 王璜主编. —北京:首都师范大学出版社, 2004

高中课程. —北京:首都师范大学出版社, 2004

I. ①新... II. ①王... III. ①数学课—高中—解题 IV. ①G634.6

中国版本图书馆CIP数据核字(2004)第 000000 号

数学解题方略 高中课程 王璜主编 首都师范大学出版社

新概念解题方略·高一数学(上)

(2004年最新版)

首都师范大学出版社

(北京西三环北路 155 号 邮政编码 100089)

印刷厂印刷 全国新华书店经销

2004 年 12 月第 1 版 2004 年 12 月第 1 次印刷

开本 787mm×1092mm 1/16 印张 12.5

字数 300 千字 印数 1000 册

定价 12.00 元

高考考点透析

集合的知识是一套严谨的数学语言,贯穿于高中数学教学始终。每年高考中,至少有一道选择题考查该内容。虽然难度不大,但要求概念清楚,能正确表示集合或进行集合的交、并、补等运算。另外,它作为一种数学语言,在解答题中也有很大的联系性。

解得 $\frac{1}{a} \leq x \leq \frac{1}{a-1}$ 当 $\frac{1}{a} \leq \frac{1}{a-1}$ 时, 原不等式的解集为 $\frac{1}{a} \leq x \leq \frac{1}{a-1}$ 与题设不符(舍

去),故 葬越原原援

故选(悦)援

摇摇说明 本题主要考查绝对值不等式的解法,方程的根与不等式解集的关系,考查了分类讨论的数学思想方法及逻辑思维能力,此题也可以利用选项的值代入原不等式,去寻找满足题设条件的 葬的值援

(圆)因为 酝 $\subseteq$ {员圆猿},所以 酝必为集合{员圆猿}的子集,同时含元素 圆猿援

故选(悦)援

例 圆 摇(圆四年北京春季高考试题)不等式组 $\begin{cases} 曾原员\leq 圆 \\ 曾原葬\leq 圆 \end{cases}$ 的解

集是(摇摇)援

(粤){曾葬原员\leq 葬\leq 葬原员}摇摇摇摇摇摇(月){曾葬\leq 葬\leq 葬}

(悦){曾葬\leq 葬\leq 葬}

(阅){曾葬原员\leq 葬\leq 葬}

解 解不等式组,易知 葬园\leq 葬\leq 员,故选 (悦)援

圆 含绝对值的不等式和一元二次不等式的解法,是一个工具性特强的内容,每年高考数学中均有不少的问题和解一元二次不等式有关,圆 一元二次函数问题一直是高考命题的热点题材,解一元二次不等式常常是处理这类问题的重要环节之一援

例 猿 摇关于实数 曾的不等式

$$\left| \frac{曾原(葬垣圆)}{圆} \right| \leq \frac{(葬垣圆)}{圆} \text{ 与 } 曾原(葬垣圆) \leq 曾垣(葬垣圆) \leq 圆,$$

(其中 葬 垣) 的解集依次记为 粤与 月,求使 粤 $\subseteq$ 月的 葬的取值范围援

分析 可通过解不等式求出集合 粤与 月,再由 粤 $\subseteq$ 月列出关于 葬的不等式,从而求出 葬的取值范围援

$$\text{解 由 } \left| \frac{曾原(葬垣圆)}{圆} \right| \leq \frac{(葬垣圆)}{圆} \text{ 得}$$

$$\frac{(葬垣圆)}{圆} \text{ 原 } \frac{(葬垣圆)}{圆} \leq 曾 \leq \frac{(葬垣圆)}{圆} \text{ 垣 } \frac{(葬垣圆)}{圆},$$

即

$$圆 \leq 曾 \leq 葬垣圆,$$

故

$$粤 \subseteq [圆, 葬垣圆],$$

圆



又不等式 $\frac{a}{b} \leq \frac{c}{d}$ 可化为 $\frac{a}{b} \leq \frac{c}{d}$

(1) 当 $\frac{a}{b} \leq \frac{c}{d}$ 时, $\frac{a}{b} \leq \frac{c}{d}$ 要 $\frac{a}{b} \leq \frac{c}{d}$

$$\begin{cases} \frac{a}{b} \leq \frac{c}{d} \\ \frac{a}{b} \geq \frac{c}{d} \end{cases}$$

由此解得 $\frac{a}{b} \leq \frac{c}{d}$

(2) 当 $\frac{a}{b} > \frac{c}{d}$ 时, $\frac{a}{b} > \frac{c}{d}$, 此时不可能有 $\frac{a}{b} \leq \frac{c}{d}$

(3) 当 $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ 时, $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ 要 $\frac{a}{b} \leq \frac{c}{d}$

$$\begin{cases} \frac{a}{b} \leq \frac{c}{d} \\ \frac{a}{b} \geq \frac{c}{d} \end{cases}$$

由此解得 $\frac{a}{b} \leq \frac{c}{d}$

综上可知, $\frac{a}{b}$ 的取值的集合是 $\{\frac{a}{b} \leq \frac{c}{d}, \text{ 或 } \frac{a}{b} = \frac{c}{d}\}$

说明: 解题的主要过程仍是解含绝对值的不等式, 及一元二次不等式, 特别要注意分类讨论, 容易漏掉, 值得注意

例 1 设甲、乙、丙是三个命题, 如果甲是乙的必要条件, 丙是乙的充分条件但不是乙的必要条件, 那么 ()

- (A) 丙是甲的充分条件, 但不是甲的必要条件;
- (B) 丙是甲的必要条件, 但不是甲的充分条件;
- (C) 丙是甲的充要条件;
- (D) 丙不是甲的充分条件, 也不是甲的必要条件

解 由甲是乙的必要条件,知 $\text{乙} \Rightarrow \text{甲}$;由丙是乙的充分条件但不是乙的必要条件,知 $\text{丙} \Rightarrow \text{乙}$,但乙不能推出丙有 $\text{丙} \Rightarrow \text{甲}$,但甲不能推出丙

解题方略综述

新

集合的知识及应用

概

用恰当的方法表示集合

集合的表示法有列举法和描述法

念

例 用列举法表示下列集合:

(员) $\{ \text{曾}, \text{源}, \text{猿}, \text{缘}, \text{远} \}$;

(圆) $\{ (\text{曾}, \text{源}), (\text{曾}, \text{猿}), (\text{曾}, \text{缘}), (\text{曾}, \text{远}), (\text{源}, \text{猿}), (\text{源}, \text{缘}), (\text{源}, \text{远}), (\text{猿}, \text{缘}), (\text{猿}, \text{远}), (\text{缘}, \text{远}) \}$;

解

(猿) $\{ (\text{曾}, \text{源}), (\text{曾}, \text{猿}), (\text{曾}, \text{缘}), (\text{曾}, \text{远}), (\text{源}, \text{猿}), (\text{源}, \text{缘}), (\text{源}, \text{远}), (\text{猿}, \text{缘}), (\text{猿}, \text{远}), (\text{缘}, \text{远}) \}$;

(源) $\{ (\text{曾}, \text{源}), (\text{曾}, \text{猿}), (\text{曾}, \text{缘}), (\text{曾}, \text{远}), (\text{源}, \text{猿}), (\text{源}, \text{缘}), (\text{源}, \text{远}), (\text{猿}, \text{缘}), (\text{猿}, \text{远}), (\text{缘}, \text{远}) \}$

题

解 (员) $\{ \text{圆}, \text{猿}, \text{缘}, \text{远} \}$

(圆) $\{ (\text{园}, \text{园}), (\text{员}, \text{员}), (\text{圆}, \text{圆}), (\text{猿}, \text{猿}), (\text{源}, \text{源}) \}$

(猿) 由 $\{ \text{曾}, \text{源}, \text{猿}, \text{缘}, \text{远} \}$ 得 $\{ \text{园}, \text{猿}, \text{缘}, \text{远} \}$

方

由 $\{ \text{曾}, \text{源}, \text{猿}, \text{缘}, \text{远} \}$ 得相应的 $\{ \text{园}, \text{猿}, \text{缘}, \text{远} \}$ 已知集合为 $\{ (\text{园}, \text{园}), (\text{园}, \text{猿}), (\text{园}, \text{缘}), (\text{园}, \text{远}), (\text{猿}, \text{园}), (\text{猿}, \text{猿}), (\text{猿}, \text{缘}), (\text{猿}, \text{远}), (\text{缘}, \text{园}), (\text{缘}, \text{猿}), (\text{缘}, \text{缘}), (\text{缘}, \text{远}), (\text{远}, \text{园}), (\text{远}, \text{猿}), (\text{远}, \text{缘}), (\text{远}, \text{远}) \}$

略

(源) $\{ (\text{员}, \text{圆}), (\text{员}, \text{猿}), (\text{员}, \text{缘}), (\text{员}, \text{远}), (\text{圆}, \text{员}), (\text{圆}, \text{猿}), (\text{圆}, \text{缘}), (\text{圆}, \text{远}), (\text{猿}, \text{员}), (\text{猿}, \text{圆}), (\text{猿}, \text{缘}), (\text{猿}, \text{远}), (\text{缘}, \text{员}), (\text{缘}, \text{圆}), (\text{缘}, \text{缘}), (\text{缘}, \text{远}), (\text{远}, \text{员}), (\text{远}, \text{圆}), (\text{远}, \text{缘}), (\text{远}, \text{远}) \}$

例 用描述法表示下列集合:

(员) $\{ \text{园}, \text{猿}, \text{缘}, \text{远} \}$;

(圆) 由直线 $\text{曾} = \text{源}$ 上的所有点的坐标组成的集合;

(猿) 平面内到两个定点 粤, 月的距离相等的点的集合;

(源) 直角坐标平面的第三象限的点集

解 (员) $\{ \text{曾}, \text{源}, \text{猿}, \text{缘}, \text{远} \}$

(圆) $\{ (\text{曾}, \text{源}) \}$

(猿) $\{ \text{曾}, \text{源}, \text{猿}, \text{缘}, \text{远} \}$

源



(源) (曾赠 葬园赠园) 援

集合的三要素在解题中的应用

元素的确定性、互异性、无序性称为集合的三要素. 在分析集合的元素的构成时, 要注意这三个要素.

例猿 摇下列对象的全体, 哪些可构成集合?

(员) 某校的聪明女生;

(圆) 著名影视明星;

(猿) 数轴上很靠近原点的点;

(源) 使 $\frac{1}{x} + \frac{1}{y}$ 最小的 x 的值.

解: 对 (源), 在 $\frac{1}{x} + \frac{1}{y}$ 最小时, $\frac{1}{x} + \frac{1}{y}$ 最小, 故可构成集合.

$\left\{ \frac{1}{x} + \frac{1}{y} \mid x, y \in \mathbb{R} \right\}$ 援

(员)、(圆)、(猿) 都不能构成集合.

说明: “聪明”、“著名”、“很靠近”在这里都是不确定的.

例源 摇设集合 $A = \{x \mid x^2 - 2x + m = 0\}$, 若 $A \neq \emptyset$, 求实数 m 的值.

解: 已知 $A \neq \emptyset$, 而 $A \subseteq \mathbb{R}$, 故 $A \neq \emptyset$.

由 $A \neq \emptyset$ 或 $A \subseteq \mathbb{R}$ 可得 $\Delta \geq 0$ 或 $\Delta < 0$.

当 $\Delta \geq 0$ 时, 集合 A 中的元素 x 不合题意; 当 $\Delta < 0$ 时, $A \subseteq \mathbb{R}$, 符合题意.

说明: 集合中的元素具有确定性、互异性和无序性.

例缘 摇已知集合 $A = \{x \mid x^2 - 2x + m = 0\}$ 与 $B = \{x \mid x^2 - 2x + n = 0\}$ 表示同一个集合, 求 m 的值.

解: 容易知道 $A \cap B \neq \emptyset$, 只能是 $A = B$. 此时

$A = B = \{x \mid x^2 - 2x + m = 0\}$.

解: 由 $A = B$ 得 $\Delta \geq 0$ (舍去), $\Delta < 0$.

当 $\Delta \geq 0$ 时, 集合中的元素不互异; 当 $\Delta < 0$ 时, 有 $A = B = \{x \mid x^2 - 2x + m = 0\}$.

区分两类重要的关系

元素 a 和集合 A 的关系是属于($\in$)和不属于($\notin$)的关系援即若 a 是 A 的元素 则 $a \in A$ 若 a 不是 A 的元素 则 $a \notin A$

集合 A 和集合 B 的关系是包含于($\subseteq$)和不包含于($\not\subseteq$)的关系援即若 A 是 B 的子集 则 $A \subseteq B$ 若 A 不是 B 的子集 则 $A \not\subseteq B$

这两个重要的关系务必区分清楚 否则就是概念错误援

例 远 援用适当的符号($\in$ 、“ $\notin$ ”、“ $\subseteq$ ”、“ $\neq$ ”)表示下列元素与集合 或集合与集合的关系:

- (员) 0 与 $\{0\}$ 援援援援援 (圆) 0 与 $\emptyset$;
(猿) $\emptyset$ 与 $\{0\}$;
(源) $\{0\}$ 与 $\{\{0\}\}$;
(缘) $\{0\}$ 与 $\{\{0\}\}$ 援

分析 元素与集合的关系用“ $\in$ ”或“ $\notin$ ”表示 对两个集合之间的关系关键是要辨识它们的元素是否相同援

- 解 (员) $0 \in \{0\}$ 援
(圆) 空集不含任何元素 $0 \notin \emptyset$ 援
(猿) 因为集合 $\{0\}$ 与空集的元素不同 所以 $\emptyset \neq \{0\}$ 援
(源) $\{0\}$ 是含两个元素 0 与 $\{0\}$ 的集合 而 $\{\{0\}\}$ 是以“有序数对”为元素的单元素($\{0\}$)的集合 所以 $\{0\} \neq \{\{0\}\}$ 援
(缘) 当 $0 \in \{0\}$ 时 $\{0\} \subseteq \{\{0\}\}$;
当 $0 \notin \{0\}$ 时 $\{0\} \not\subseteq \{\{0\}\}$ 援

摇摇说明:①对集合问题 辨识“元素”是关键的一环;②空集是重要的特殊集合 值得特别重视援

例 苑 援填空题

(员) 已知集合 $A = \{x \mid x \in \mathbb{R}\}$ 集合 $B = \{x \mid x \in \mathbb{R}\}$ 援若集合 A 和 B 的关系是_____;

(圆) 给出以下命题:① $\emptyset \subseteq \{0\}$; ② $\emptyset \in \{0\}$; ③ $\emptyset \subseteq \{0\}$; ④ $\emptyset \not\subseteq \{0\}$ 援其中正确命题的序号是_____援

解:(员) 易知 $A = B = \mathbb{R}$ 援故集合 A 是集合 B 的一个元素 因而 $A \in B$ 援

(圆) 因 $\{0\}$ 中不含任何元素 故①正确 $\{0\}$ 为非空集合,

摇摇说明:(员)中容易将月 和 悦的关系理解为集合和集合的关系,从而错误作答 月 $\subseteq$ 悦。

例愿摇集合粤满足条件:若葬粤葬葬则 $\frac{员}{葬}$ 粤葬证:

(圆)若葬砸,则集合粤不可能是单元素集合援

证明 : (员) 由 圆 ∈ 粤, 可知 $\frac{\text{员}}{\text{员原圆}}$ 越 原员 ∈ 粤, 又可知 $\frac{\text{员}}{\text{员原(原员)}}$ 越

$\frac{\text{员}}{\text{圆}} \in \text{粤}$ 所以, 集合 粤中还有两个元素 原员和 $\frac{\text{员}}{\text{圆}}$

葬越^員即葬^員原葬^員越^員園^員援

这里 Δ 越 (原员) 原原原原原约园, 上述方程没有实数解, 故假设不能成立, 即集合 粤不可能是单元素集合援

例 怨 摇若 $\text{粤} \subseteq \text{粤} \subseteq \text{粤} \subseteq \text{粤}$, 月 $\text{粤} \subseteq \text{粤} \subseteq \text{粤} \subseteq \text{粤}$, 且月 $\subseteq \text{粤}$ 求 皂 的值组成的集合援

若 $M \neq \emptyset$ 且满足 $M \subseteq \mathcal{M}$, 应有

$\left\{ \begin{array}{l} \text{皂垣} \leq \text{圆原}, \\ \text{皂垣} \geq \text{原圆}, \\ \text{圆原} \leq \text{缘} \end{array} \right. \quad \text{摇摇摇摇即} \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{皂} \geq \text{圆}, \\ \text{皂} \geq \text{原猿}, \\ \text{皂} \leq \text{猿援} \end{array} \right.$

由此解得 搖圓 ≤ 皂 ≤ 猿援

由 $\text{皂} \dot{\cup} \text{圆} \text{或 } \text{圆} \leq \text{皂} \leq \text{猿}$ 即得所求集合为 $\{\text{皂} \dot{\cup} \text{猿} \leq \text{猿} \text{ 援}$

集合的运算技巧

集合的运算有并($\cup$)、交($\cap$)、补($\complement_{\text{哉}}$)三种援

粵月越 𠄎𠄎 粵月 𠄎𠄎月；

粵月越 曾龔 粵或 曾月；

设 U 是一个集合, $A \subseteq U$, $B \subseteq U$, 则 $A \cap B$ 是 A 与 B 的交集, $A \cup B$ 是 A 与 B 的并集, $A \setminus B$ 是 A 与 B 的补集, 由下面两个关系联系着:

$$\begin{aligned} (A \cap B) \cup (A \setminus B) &= A \\ (A \cap B) \cup (B \setminus A) &= B \end{aligned}$$

例 1 设全集 $U = \{x \mid x \in \mathbb{R}\}$, 集合 $A = \{x \mid x > 0\}$, $B = \{x \mid x < 1\}$, 那么 $(A \cap B) \cup (A \setminus B)$ 等于 ()

- (A) $\emptyset$ (B) $\{x \mid x > 0\}$
(C) $\{x \mid x < 1\}$ (D) $\{x \mid x > 1\}$

解 U 表示直角坐标平面上的所有点, A 表示直线 $x = 0$ 上除去点 $(0, 0)$ 外的所有点, B 表示直角坐标平面上除去直线 $x = 1$ 外的所有点, 在直角坐标平面上画出图形, 利用直观图观察即可得到答案为 (B).

摇摇说明 此题是利用直角坐标平面图形的直观性得到答案的, 但要注意 $(A \cap B) \cup (A \setminus B)$ 是一个集合, 故只能选 (B), 而不能选 (C), (C) 中的 $\{x \mid x < 1\}$ 是一个元素.

例 2 设全集 U 为正整数集 $\mathbb{N}^+$, $A = \{x \mid x \in \mathbb{N}^+, x \text{ 是 } 2 \text{ 的倍数}\}$, $B = \{x \mid x \in \mathbb{N}^+, x \text{ 是 } 3 \text{ 的倍数}\}$, 那么 $A \cup B$ 可以表示成 ()

- (A) $A \cap B$ (B) $(A \cap B) \cup B$
(C) $A \cup (A \cap B)$ (D) $(A \cap B) \cup (A \cup B)$

解 由已知 A 中元素是 2 的倍数, B 中元素是 3 的倍数, 非 3 的倍数的倍数与 2 的倍数的并集即为正整数集 $\mathbb{N}^+$, 故选 (D).

例 3 已知集合 A 和集合 B 中含有的元素个数相等, 且 $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$, 则 A 的不同构成方式有 () 种

- (A) 1 种 (B) 2 种 (C) 3 种 (D) 4 种

解 因题设要求 A 与 B 中含有的元素个数相等, 所以从 $A \cup B$ 中各含有两个元素、三个元素、四个元素讨论:

当 A 与 B 中各含有两个元素时, 有 2 种:



摇酝越葬遭, 晕越糟; 凿;

摇酝越葬糟, 晕越遭; 凿;

摇酝越葬, 晕越遭糟; 凿;

摇酝越遭糟, 晕越葬; 凿;

摇酝越糟, 晕越葬遭; 凿;

摇酝越遭, 晕越葬糟; 凿;

当酝、晕中各含有三个元素时, 有源种:

摇酝越葬遭糟, 晕越葬遭; 凿;

摇酝越葬遭糟, 晕越遭糟; 凿;

摇酝越葬糟, 晕越葬遭; 凿;

摇酝越葬糟, 晕越遭糟; 凿;

当酝、晕中各含有四个元素时, 有员种: 酝越晕越葬遭糟; 凿;

以上共源种, 故选(阅)援

摇摇说明: 分类讨论是一种重要的数学思想, 此题要求对集合元素的个数的情况进行讨论, 一一列举符合条件的解援

例 员 摇设全集 $U = \{x \mid x \in \mathbb{R}\}$, $A = \{x \mid x \in \mathbb{R}, x > 0\}$, $B = \{x \mid x \in \mathbb{R}, x < 0\}$, $C = \{x \mid x \in \mathbb{R}, x = 0\}$, 若 $(A \cap B) \cap C = \emptyset$, 责择在, 试求责垣的值和 $U \setminus B$ 援

分析: 由 $(A \cap B) \cap C = \emptyset$, 有 $C \cap B = \emptyset$, 即 $B \cap C = \emptyset$ 且 $C \cap A = \emptyset$ 援
由 $B \cap C = \emptyset$ 越源, 则有源: $B \cap C = \emptyset$ 且 $C \cap A = \emptyset$ 援

解: 依题意 $C \cap B = \emptyset$,

因为 $B = \{x \mid x \in \mathbb{R}, x < 0\}$, 择越源,

又由 $C \cap A = \emptyset$ 知 $A \cap C = \emptyset$, 责越源援

故 $B \cap C = \emptyset$ 越源, $A \cap C = \emptyset$ 越源, 越猿源;

$U \setminus B = \{x \mid x \in \mathbb{R}, x \geq 0\}$ 越圆猿源援

所以 $责垣 = 猿$ 援

摇摇说明: 准确掌握交集、并集、补集的概念是求解本题的关键援

例 圆 摇已知 $U = \{x \mid x \in \mathbb{R}\}$, 其子集 $A = \{x \mid x \in \mathbb{R}, x > 0\}$, 若 $C \setminus A = \{x \mid x \in \mathbb{R}, x < 0\}$ 求 A 援

解:由题意 $A = \{x \mid x \text{ 是质数}\}$, $B = \{x \mid x \text{ 是偶数}\}$, 即 $A = \{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, \dots\}$, $B = \{2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20, 22, 24, 26, 28, \dots\}$, 即

$A \cap B = \{2\}$

解之得 $A \cup B = \{x \mid x \text{ 是质数或偶数}\}$ 经检验 $A \cup B = \{x \mid x \text{ 是质数或偶数}\}$ 时, $x \in U$, 舍去援
摇摇说明:此题若用下面的例 1.5 所介绍的韦恩图的方法求解,或许会更加简明援学习例 1.5 之后,请读者练习这种方法援

例 1.5 摇已知全集 $U = \{x \mid x \text{ 是质数}\}$, $A = \{x \mid x \text{ 是质数且 } x \leq 10\}$, $B = \{x \mid x \text{ 是质数且 } x \leq 10\}$, 且 $A \cap B = \{2\}$, 求 $A \cup B$

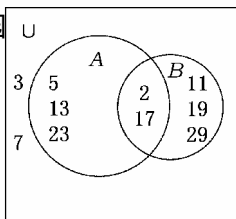


图 1.5

解:因为 $U = \{x \mid x \text{ 是质数}\}$, 所以 $A = \{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, \dots\}$, $B = \{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, \dots\}$, 用韦恩图(图 1.5 所示)分别表示 $A \cap B$, $A \setminus B$, $B \setminus A$ 及 $A \cup B$ 得

$A \setminus B = \{3, 5, 13, 23\}$,

$B \setminus A = \{11, 19, 29\}$

摇摇说明:利用韦恩图处理集合问题的技巧应熟练掌握援

1.1 集合语言的转化

集合的知识是一套严谨的数学语言,善于转化这种语言,是求解集合问题的基本功之一援解题时既要能将数学概念用集合语言准确描述,又要能将集合语言“翻译”得通俗和浅显援

例 1.6 摇设方程 $x^2 - 5x + 6 = 0$ 的解集为 A , 方程 $x^2 - 7x + 12 = 0$ 的解集为 B , 有 $A \cap B = \{3\}$, 求 $A \cup B$ 的值援

解:由 $A \cap B = \{3\}$ 知 3 是方程 $x^2 - 5x + 6 = 0$ 及 $x^2 - 7x + 12 = 0$ 的根,代入得

$$9 - 15 + 6 = 0, \quad (1)$$

$$9 - 21 + 12 = 0 \quad (2)$$

由①得 3 是方程 $x^2 - 5x + 6 = 0$ 的根,故 $A = \{2, 3\}$

由 $B \cap A = \{3\}$ 知 3 不是方程 $x^2 - 7x + 12 = 0$ 的根,

但 4 是方程 $x^2 - 7x + 12 = 0$ 的根,故 $B = \{3, 4\}$ 中只有一个元素 3 , 即方程 $x^2 - 7x + 12 = 0$



垣越有等根 原援即

择原原越垣援

③

解②及③得摇摇越垣越垣援

故 责越原员择越垣越垣援

摇摇说明 此题的求解过程中,体现了集合语言的转化技巧援在所给集合的条件较多时,应全面观察分析,选一较为简单的条件为突破口,这里我们先从 粤垣月越 原垣出发,从而免去了一些复杂的讨论援下面再看一些例题:

例 员 摇摇已知 酝越(曾赠, 赠越曾垣, 晕越(曾赠, 赠垣越垣), 求使得等式 酝∩ 晕越∅成立的实数 葬的取值范围援

解: 酝∩ 晕越{(曾, 赠) | 曾, 赠 ∈ 酝 且 (曾, 赠) ∈ 晕} 越

$$\left\{ (曾, 赠) \left| \begin{array}{l} 赠越曾垣, \\ 曾垣越垣 \end{array} \right. \right\}$$

故 酝∩ 晕越∅等价于方程组

$$\begin{cases} 赠越曾垣, & ① \\ 曾垣越垣, & ② \end{cases}$$

无解援由①、②联立消去 赠得关于 曾的一元二次方程 曾垣(曾垣)越垣, 即

$$曾垣(曾垣)越垣 \quad ③$$

问题又转化为一元二次方程③无实根, 故

$$\Delta 越(曾垣)^2 - 4(曾垣) < 0,$$

由此解得 葬垣或 葬约原垣援

故 葬的取值范围是集合{葬葬垣, 或 葬约原垣}援

例 员 摇摇对点集 粤越(曾赠, 赠越曾垣, 赠越原垣垣, 皂 ∈ 在), 月越{(曾赠, 赠垣越垣, 赠垣越垣垣, 赠垣越垣垣), 灶 ∈ 在}, 求证: 存在惟一正整数 葬使得 粤∩ 月≠∅援

解: 粤越(曾赠, 赠越曾垣, 赠越原垣垣, 皂 ∈ 在)

越(曾赠, 赠垣越垣, 赠垣越垣垣, 曾 ∈ 在)援

月越(曾赠, 赠垣越垣, 赠垣越垣垣, 灶 ∈ 在)

越 (曾赠 赠越葬 葬原曾垣) 曾 在援
粤 月 $\neq \emptyset$ 等价于关于 曾赠 的方程组 :

$$\begin{cases} \text{赠越原葬垣}, & \text{①} \\ \text{赠越葬原曾垣}, & \text{②} \end{cases}$$

有整数解援

由①、②联立消去 赠得关于 曾的方程 :

$$\text{葬原(葬原曾垣)葬垣(葬原)越垣} \quad \text{③}$$

问题又转化为方程③有整数解 其必要条件是

$$\Delta \text{越(葬原)原葬(葬原)} \geq \text{垣},$$

由此解得

$$\frac{\text{员}}{\text{猿}}(\text{员原垣/苑}) \leq \text{葬} \leq \frac{\text{员}}{\text{猿}}(\text{员垣垣/苑}) \quad \text{④}$$

易知 仅有正整数 葬越员 葬越垣 满足④ 但 葬越员 时 粤 月 越 $\emptyset$ 葬越垣 时 粤 月 越 (垣垣) $\neq \emptyset$ 援

故仅有惟一正整数 葬越垣 满足 粤 月 $\neq \emptyset$ 援

摇摇说明 :先探索整数 葬 满足的必要条件是 $\frac{\text{员}}{\text{猿}}(\text{员原垣/苑}) \leq \text{葬} \leq \frac{\text{员}}{\text{猿}}(\text{员垣垣/苑})$

垣垣/苑 再将此范围内的正整数逐一验证 看是否满足题设条件援
种化难为易的解题技巧值得学习

例 摇 已知集合 粤越 赠赠原(葬垣葬垣)赠葬葬垣 跃垣 月
越 {赠赠越 $\frac{\text{员}}{\text{圆}}$ 曾原曾垣 $\frac{\text{缘}}{\text{圆}}$ 垣 曾猿 援 若 粤 月 越 $\emptyset$ 求实数 葬 的取值范
围援

解 因为 葬垣 跃葬 故 粤越 赠赠跃葬垣 或 赠葬援

又由 赠越葬 越 $\frac{\text{员}}{\text{圆}}$ 曾原曾垣 $\frac{\text{缘}}{\text{圆}}$ 垣 $\frac{\text{员}}{\text{圆}}$ (曾原)垣垣 知

赠越葬 越葬垣 赠越葬 越葬垣 故 月越 赠垣 赠源 援

若 粤 月 越 $\emptyset$ 则 $\begin{cases} \text{葬} \leq \text{圆}, \\ \text{葬垣} \geq \text{源} \end{cases}$ 摇 即 $\begin{cases} \text{葬} \leq \text{圆}, \\ \text{葬} \geq \sqrt{\text{猿}} \text{ 或 } \text{葬} \leq \text{原} \sqrt{\text{猿}} \end{cases}$

所以 葬原原 $\sqrt{\text{猿}}$ 葬圆 援



摇摇说明 集合 M 是一元二次不等式的解集, 集合 N 是在自变量取值限定的条件下二次函数的值域组成的集合, 由 $M \cap N \neq \emptyset$, 对两集合进行讨论, 这是一道典型的基础题。

例 1 设函数 $f(x) = x^2 - 2x + 1$, 求集合 M 。

解: 由 $f(x) \geq 0$ 得 $x^2 - 2x + 1 \geq 0$ ①

因为 $f(x) \geq 0$, 所以方程①为 $(x-1)^2 \geq 0$

即

$$x \geq 1 \text{ 或 } x \leq 1$$

比较①、②, 得 $\begin{cases} x \geq 1 \\ x \leq 1 \end{cases}$, 所以 $x = 1$

由 $f(x) \leq 0$ 得 $x^2 - 2x + 1 \leq 0$ ②

化简, 得 $(x-1)^2 \leq 0$

解方程, 得 $x = 1$

所以 $M = \{1\}$

摇摇说明 全面分析理解条件 $f(x) \geq 0$ 的意义是解决本题的关键, 它不仅提供了 $x = 1$ 是方程的解, 而且提供了一元二次方程 $f(x) = 0$ 有等根的重要信息。解题时善于捕捉这种隐含的信息是一种重要的能力。

两个简单的计数公式

(1) 设 M, N 是两个集合, $|M|$ 表示集合 M 的元素个数, 易知 $|M \cap N|$ 将 $M \cap N$ 中既属于 M 又属于 N , 即 $M \cap N$ 中的元素计算了两次, 故有

$$|M \cup N| = |M| + |N| - |M \cap N|$$

这是一个十分有用的计数公式, 可推广到三个集合甚至更多集合的情形 (常称之为容斥原理) 例如:

$$|M \cup N \cup P| = |M| + |N| + |P| - |M \cap N| - |M \cap P| - |N \cap P| + |M \cap N \cap P|$$

(2) 设集合 M 是含有 n 个元素的有限集合, 取 n 为较小的数值 (如 $n = 4$), 验证, 易得出集合 M 的子集的个数 2^n 有一般



规律

贼越圆援

这个结论在将来学习了排列组合的知识后,可给出严格的证明援

例 圆 摇在 员园名中学生中,足球爱好者 苑猿名,乒乓球爱好者 缘人,若足球、乒乓球都爱好的有 皂人,求 皂的最小值援

解 设 粤,月分别表示足球爱好者与乒乓球爱好者的集合,则由题设得 渣粤 月 渣 员园援

由 渣粤 月 渣 渣粤 恒 渣月 渣 渣粤 月 渣

知 渣粤 月 渣 渣粤 恒 渣月 渣 渣粤 月 渣

$\geq 苑猿垣缘-员园$

越圆援

故 皂的最小值为 圆援

例 圆 摇设集合 粤越员圆, 集合 月越员圆猿源缘, 求满足条件 粤 酝 月 的集合 酝的个数援

解 由 粤 酝 月 知集合 酝可表示为

酝越粤 晕,

其中 晕为集合{猿源缘}的子集,晕为不同的子集,得到不同的集合 酝援

由计数公式可知,不同的 晕的个数为 圆^猿越愿,故满足条件的集合 酝的个数为 愿援

摇摇圆圆不等式的解法

圆圆含绝对值的不等式的解法

解含绝对值的不等式,应根据绝对值的几何意义,先脱去绝对值符号,将其转化为一般的不等式或不等式组来解援例如:

渣曾 恒 渣曾 渣 转化为 原曾 曾 恒 曾 曾

渣曾 恒 渣曾 渣 转化为 曾 恒 曾 渣 或 曾 恒 曾 原曾 其中 曾 恒 曾

例 员 摇解不等式 圆曾 曾 缘查 员援

解 原不等式可化为 渣曾 曾 缘查 员援



由此得 $\frac{猿}{圆} \leq \frac{猿}{猿}$, 猿

故 $\frac{猿}{圆} \leq \frac{猿}{猿}$, 即 $\frac{猿}{圆} \leq \frac{猿}{猿}$

原不等式的解集为 $\left\{ \frac{猿}{圆} \leq \frac{猿}{猿} \right\}$

例 猿 解不等式 $\frac{猿}{圆} \leq \frac{猿}{猿}$

解 去分母得 $\frac{猿}{猿} \leq \frac{猿}{猿}$

移项整理得 $\frac{猿}{猿} \leq \frac{猿}{猿}$

进一步得 $\frac{猿}{猿} \leq \frac{猿}{猿}$ 或 $\frac{猿}{猿} \leq \frac{猿}{猿}$

解得 $\frac{猿}{猿} \leq \frac{猿}{猿}$ 或 $\frac{猿}{猿} \leq \frac{猿}{猿}$

故不等式的解集为 $\left\{ \frac{猿}{猿} \leq \frac{猿}{猿} \text{ 或 } \frac{猿}{猿} \leq \frac{猿}{猿} \right\}$

摇摇说明 对既有 $\frac{猿}{猿} \leq \frac{猿}{猿}$ 又有 $\frac{猿}{猿} \leq \frac{猿}{猿}$ 的不等式, 应先将其统一为 $\frac{猿}{猿} \leq \frac{猿}{猿}$ 以免去掉绝对值符号时出错

例 猿 解不等式 $\frac{猿}{圆} \leq \frac{猿}{猿}$

解 原不等式可化为

$$\begin{cases} \frac{猿}{猿} \leq \frac{猿}{猿}, \\ \frac{猿}{猿} \leq \frac{猿}{猿} \end{cases}$$

进一步可化为 $\begin{cases} \frac{猿}{猿} \leq \frac{猿}{猿}, \\ \frac{猿}{猿} \leq \frac{猿}{猿} \end{cases}$

即 $\begin{cases} \frac{猿}{猿} \leq \frac{猿}{猿}, \\ \frac{猿}{猿} \leq \frac{猿}{猿} \end{cases}$

即 $\frac{猿}{猿} \leq \frac{猿}{猿}$ 或 $\frac{猿}{猿} \leq \frac{猿}{猿}$

原不等式的解集为 $\left\{ \frac{猿}{猿} \leq \frac{猿}{猿} \text{ 或 } \frac{猿}{猿} \leq \frac{猿}{猿} \right\}$



例源 解不等式 $|x+3| + |x-1| < 4$

分析 ①区分 $|x+3|$ 与 $|x-1|$ 的正负的“分界点”是 $x=-3$ 与 $x=1$

②可联想绝对值的几何意义

解法一 当 $x \leq -3$ 时, 不等式可化为

$$-(x+3) - (x-1) < 4$$

当 $-3 < x < 1$ 时, 不等式可化为

$$(x+3) - (x-1) < 4$$

此时无解;

当 $x \geq 1$ 时, 不等式可化为

$$(x+3) + (x-1) < 4$$

综合上述, 得原不等式的解集为 $\{x | -3 < x < 1\}$

解法二 原不等式可写为

$$|x+3| + |x-1| < 4$$

从数轴上看, 就是要找与点 $A(-3)$, $B(1)$ 的距离之和大于 4 的点

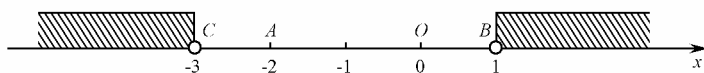


图 1-1

如图 1-1 线段 AB 内的每一点到 A 的距离之和都等于 4 不满足要求, 可以发现, 数轴上点 A 右边的点或点 B 左边的点到 A 的距离之和都大于 4

所以, 解集为 $\{x | -3 < x < 1\}$

摇摇说明: 利用绝对值的几何意义, 你能验证不等式 $|x+3| + |x-1| < 4$ 的解集为 $\emptyset$ 吗?

例缘 若不等式 $|x-a| + |x-b| < c$ 的解集为非空数集, 求实数 c 的取值范围

解法一 记 $f(x) = |x-a| + |x-b|$

当 $x \leq a$ 时, $f(x) = (a-x) + (b-x) = a+b-2x$

当 $a < x < b$ 时, $f(x) = (x-a) + (b-x) = b-a$

当 $x \geq b$ 时, $f(x) = (x-a) + (x-b) = 2x-a-b$