

新编高中数学竞赛教程

(上)

主 审 单 樽

主 编 葛 军

河海大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

新编高中数学竞赛教程. 上/葛军主编. —南京:河海大学出版社, 2001. 7

全国高中数学联赛江苏省推荐用书

ISBN 7-5630-1656-2

I. 新... II. 葛... III. 数学课—高中—教材
IV. G634.601

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2001)第 045485 号

书 名 / 新编高中数学竞赛教程(上)

书 号 / ISBN 7-5630-1656-2/G·280

责任编辑 / 朱婵玲

特约编辑 / 陈吉平

封面设计 / 黄炜

出 版 / 河海大学出版社

地 址 / 南京市西康路 1 号(邮编: 210098)

电 话 / (025) 3737852(总编室) (025) 3722833(发行部)

印 刷 / 南京金阳彩色印刷厂

开 本 / 850 毫米×1 168 毫米 1/32 10.75 印张 271 千字

版 次 / 2001 年 7 月第 1 版 2001 年 7 月第 1 次印刷

印 数 / 0001~12040 册

定 价 / 本套定价 48.00 元, 本册定价 16.00 元

高中数学奥林匹克竞赛丛书 编写委员会

主任委员：宋秀芳

委 员：吴国彬 李树奎 杨九俊

殷天然 甫开达 徐德明

冯少东 黄海鸥 郁建文

执行编辑：冯少东 黄海鸥

《新编高中数学竞赛教程》

编 委 会

主 审 单 增

主 编 葛 军

编 者 (按姓氏笔画)

孙旭东 冯惠愚 李 红

祁建新 吴 彤 陈云楼

张太年 张圣官 张国良

金树泽 周敏泽 徐 杰

陶维林 高志雄 高朋中

曹瑞林

前 言

数学竞赛(这里主要指高中数学竞赛),自上个世纪首先在匈牙利兴起,很快就风靡了全世界。各种层次的竞赛吸引了众多的学生参加,成为数学教育中一件非常重要的事情。

我国教育家很早就注意到学习兴趣的重要性:“学之者不如好之者,好之者不如乐之者”。数学竞赛提高了学生的学习兴趣。年青的学生,求知欲很强,而好胜心更是这个年龄阶段人人具备的。竞赛活动,激发了他们的“斗志”,唤起了学习的热情。一旦他们觉得需要学习,主动地学习,那就什么困难也都不在话下。

竞赛活动,还使学生眼界大开。他们跳出一个班、一个学校或一个地区的小圈子,与其他的“高手”互相琢磨,又听了一些名师的讲座,看了很多有趣的小册子,阅读的能力,理解的能力,交流的能力,表达的能力都与日俱增。更重要的是,通过解竞赛题,他们创造能力也大大加强,而这是通常的教育难以企及的。

有人认为“竞赛只是培养少数尖子”,这种看法与事实不符。从竞赛中得益的决不只是少数人。我们可以用体育竞赛作为参照。诚然,参加奥运会,具备夺金夺银实力的只是寥寥数人。但参加体育活动却使众多的人体质增加。数学竞赛也是如此。广大的学生明白这一点,家长也明白这一点。所以参加竞赛活动的人数不断增加,形成一种无法阻挡的潮流。

还有人忧心忡忡,认为数学竞赛容易造成“偏科”,不利于“减负”。这些人死死抱住学生必须“全优”的观点,反对学生发展自己的兴趣爱好,不利于学生的正常成长。其实,只要学生有兴趣,困难

挡不住他们,负担也不成为负担。目前,教育部的政策是竞赛中获奖的可以保送,可见高等学校(特别是重点学校)十分欢迎获奖的选手。

也有人把竞赛与高考对立起来,认为做竞赛题花时间太多,影响高考成绩。他们不明白“取法务上”的道理。会做竞赛题,上了一个层次,居高临下,做高考题就不感到困难。如果“取法务中”,往往“仅得乎下”,连中游也保不住。当然,学生也应根据自己的实际情况,首先打好基础,不要好高骛远,一味钻难题。

这套《新编高中数学竞赛教程》正是注意将竞赛与高考有机地结合起来,注意基础知识、基本技能与基本的思想方法,由浅入深,循序渐进。其中例题与练习,大多是有代表性的问题,过偏过难的一般不予收录。更有不少高考中的问题,有助升学考试。书中的问题也尽量注明出处,以备查对。每讲除练习外,还有自我检测题。最后有 15 套综合练习,5 套高中联赛模拟题。习题均有解答,可供参考。

江苏省科协青少年科技中心组织编写此书,是为青少年做了一件好事。

最后,感谢河海大学出版社管理者的远见卓识和朱婵玲女士的大力支持,使这套书尽早问世。

单 博

2001. 6

目 录

| | |
|-------------------|---------|
| 第 1 讲 集合 | (1) |
| 自我检测题 1 | (10) |
| 第 2 讲 容斥原理 | (11) |
| 自我检测题 2 | (20) |
| 第 3 讲 函数 | (21) |
| 自我检测题 3 | (35) |
| 第 4 讲 函数的性质 | (36) |
| 自我检测题 4 | (48) |
| 第 5 讲 指数函数与对数函数 | (50) |
| 自我检测题 5 | (59) |
| 第 6 讲 基本数列 | (60) |
| 自我检测题 6 | (66) |
| 第 7 讲 数列求和 | (68) |
| 自我检测题 7 | (75) |
| 第 8 讲 数学归纳法 | (77) |
| 自我检测题 8 | (84) |
| 第 9 讲 数学归纳法证题 1 | (85) |
| 自我检测题 9 | (92) |
| 第 10 讲 三角函数的性质及应用 | (93) |
| 自我检测题 10 | (103) |
| 第 11 讲 三角恒等变形 | (104) |
| 自我检测题 11 | (114) |
| 第 12 讲 三角不等式与三角最值 | (115) |
| 自我检测题 12 | (124) |

| | |
|--------------------------|-------|
| 第 13 讲 反三角函数与三角方程 | (125) |
| 自我检测题 13 | (132) |
| 第 14 讲 平面向量 | (133) |
| 自我检测题 14 | (142) |
| 第 15 讲 向量与几何 1(平面) | (144) |
| 自我检测题 15 | (153) |
| 第 16 讲 三角与几何 | (155) |
| 自我检测题 16 | (167) |
| 第 17 讲 几何证明 1 | (168) |
| 自我检测题 17 | (178) |
| 第 18 讲 几何证明 2 | (179) |
| 自我检测题 18 | (189) |
| 第 19 讲 共线点与共点线 | (191) |
| 自我检测题 19 | (203) |
| 第 20 讲 不等式的解法 | (204) |
| 自我检测题 20 | (211) |
| 第 21 讲 含参数不等式 | (212) |
| 自我检测题 21 | (218) |
| 第 22 讲 平均不等式 | (219) |
| 自我检测题 22 | (225) |
| 第 23 讲 柯西不等式 | (226) |
| 自我检测题 23 | (233) |
| 第 24 讲 排序不等式与琴生不等式 | (234) |
| 自我检测题 24 | (244) |
| 第 25 讲 不等式证明 | (245) |
| 自我检测题 25 | (254) |
| 第 26 讲 递归数列 | (255) |
| 自我检测题 26 | (262) |
| 第 27 讲 周期数列 | (263) |

| | |
|-------------------------|-------|
| 自我检测题 27 | (268) |
| 第 28 讲 抽屉原理 | (269) |
| 自我检测题 28 | (276) |
| 第 29 讲 函数方程 | (277) |
| 自我检测题 29 | (287) |
| 第 30 讲 奇偶分析 | (288) |
| 自我检测题 30 | (298) |
| 第 31 讲 高斯函数 $[x]$ | (300) |
| 自我检测题 31 | (311) |
| 第 32 讲 同余 1 | (312) |
| 自我检测题 32 | (321) |
| 第 33 讲 不定方程 1 | (322) |
| 自我检测题 33 | (331) |

第 1 讲 集 合

【知识概要】

(一) 集合及其基本概念

1. 设集合 $A = \{x | x \text{ 具有性质 } P\}$, 判断一个对象 A 是否属于 A , 等价于判断对象 A 是否具有性质 P .

2. 不含任何元素的集合称为空集, 记作 \emptyset ; 含有有限个元素的集合称为有限集, 如是有限集, 用 $|A|$ 表示 A 的元素的个数; 含有无限个元素的集合叫无限集.

(二) 集合与集合的关系

1. 子集

若 A 中元素都是 B 中的元素, 则称 A 为 B 的子集, 记作 $A \subseteq B$. 若 $A \subseteq B$, 且 B 中至少有一个元素 $b \notin A$, 则称 A 为 B 的真子集, 记作 $A \subset B$.

2. 集合相等

若 $A \subseteq B$, 且 $B \subseteq A$, 则 $A = B$, 即 A, B 中的元素完全一样.

3. 集合与集合关系的性质

(1) $\emptyset \subseteq A, \emptyset \subset B (B \neq \emptyset)$;

(2) $A \subseteq B, B \subseteq C$ 则 $A \subseteq C$;

(3) $A \cup B = B \Leftrightarrow A \subseteq B; A \cap B = A \Leftrightarrow A \subseteq B; \bar{A} \cup B = I \Leftrightarrow A \subseteq B$ (“ \Leftrightarrow ” 表示充要条件).

4. 若有限集 A 中有 n 个元素, 则 A 的子集共有 2^n 个, 真子集有 $2^n - 1$ 个.

(三) 集合的运算

1. 交集和并集

$A \cap B = \{x | x \in A \text{ 且 } x \in B\}; A \cup B = \{x | x \in A \text{ 或 } x \in B\}$.

2. 补集

$$\bar{A} = \{x | x \in I \text{ 且 } x \notin A\}.$$

3. 差集

由所有属于 A 但不属于 B 的元素构成的集合称为 A 关于 B 的差集, 记作 $A \setminus B$, 即 $A \setminus B = \{x | x \in A \text{ 但 } x \notin B\}$.

4. 关于集合运算的常用结论:

(1) 分配律: $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C),$

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C);$$

(2) 吸收律: $A \cup (A \cap B) = A, A \cap (A \cup B) = A;$

(3) De Morgan 法则: $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}, \overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B};$

$$A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C),$$

$$A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C).$$

(四) 集合的分划

设 A_1, A_2, \dots, A_n 是集合 A 的一族非空子集, 并且满足

(1) 对 $1 \leq i < j \leq n$, 均有 $A_i \cap A_j = \emptyset$;

(2) $A = A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n$.

则称 A_1, A_2, \dots, A_n 为集合 A 的一个分划. 如果 A_1, A_2, \dots, A_n 满足条件(2), 那么称 A_1, A_2, \dots, A_n 为集合 A 的一个覆盖.

以集合 A 的子集为元素的集合, 称为集合 A 的子集族.

(五) 处理集合问题的基本方法

1. 图示法

借助文氏图可以直观地显示出集合与集合之间的关系, 为研究与解决集合问题提供了便利.

2. 对应与映射的方法

将集合 A 中的元素两两配成对, 从而解决问题.

【例题】

例 1 已知集合 $M = \{\text{直线}\}, N = \{\text{抛物线}\}$, 则 $M \cap N$ 中元素的个数是多少?

解: M 中的元素为直线, N 中的元素为抛物线, 它们都是无

限集,由于既是直线,又是抛物线的图形不存在,故 $M \cap N = \emptyset$, 即 $M \cap N$ 中元素的个数是 0 个.

说明:集合是由元素确定的,遇到集合问题,首先要弄清集合中的元素是什么.在本题中,若不弄清 M, N 中的元素,误认为是“点”,则直线与抛物线有相离、相交、相切三种关系,会作出 $M \cap N$ 中元素的个数是 0, 1 或 2 的错误判断.

例 2 已知集合 $A = \{(x, y) | ax + y = 1\}$, $B = \{(x, y) | x + ay = 1\}$, $C = \{(x, y) | x^2 + y^2 = 1\}$. 问

(1) 当 a 取何值时, $(A \cup B) \cap C$ 为含有两个元素的集合?

(2) 当 a 取何值时, $(A \cup B) \cap C$ 为含有三个元素的集合?

基本思路:由于 $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$, 只要求出 $A \cap C$ 和 $B \cap C$ 中的元素再分别加以讨论即可.

解:因为 $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$, $A \cap C$ 与 $B \cap C$ 分别为方程组

$$(I) \begin{cases} ax + y = 1, \\ x^2 + y^2 = 1, \end{cases} \quad (II) \begin{cases} x + ay = 1, \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$$

的解集.

由(I)得 $(x, y) = (0, 1), \left(\frac{2a}{1+a^2}, \frac{1-a^2}{1+a^2}\right)$;

由(II)得 $(x, y) = (1, 0), \left(\frac{1-a^2}{1+a^2}, \frac{2a}{1+a^2}\right)$.

(1) 使 $(A \cup B) \cap C$ 恰有两个元素的情况只有两种可能:

$$\textcircled{1} \begin{cases} \frac{2a}{1+a^2} = 0, \\ \frac{1-a^2}{1+a^2} = 1, \end{cases} \quad \textcircled{2} \begin{cases} \frac{2a}{1+a^2} = 1, \\ \frac{1-a^2}{1+a^2} = 0. \end{cases}$$

由①得 $a = 0$; 由②得 $a = 1$.

故当 $a = 0$ 或 1 时, $(A \cup B) \cap C$ 恰有两个元素.

(2) 使 $(A \cup B) \cap C$ 恰有 3 个元素的情况是

$$\frac{2a}{1+a^2} = \frac{1-a^2}{1+a^2},$$

解得 $a = -1 \pm \sqrt{2}$.

故当 $a = -1 \pm \sqrt{2}$ 时, $(A \cup B) \cap C$ 恰有三个元素.

例 3 设函数 $f(x) = x^2 + bx + c (a, b \in \mathbf{R})$, 集合 $A = \{x \mid x = f(x), x \in \mathbf{R}\}$, $B = \{x \mid x = f(f(x)), x \in \mathbf{R}\}$.

(1) 证明 $A \cap B = A$;

(2) 若 $A = \{-1, 3\}$, 求集合 B ;

(3) 若 A 为只含有一个元素的集合, 则 $A = B$.

基本思路: 要证 $A \cap B = A$, 只要证 $A \subseteq B$, 即证 A 中的每一个元素均在 B 中.

解: (1) 设任意的 $x_0 \in A$, 则 $x_0 = f(x_0)$. 又因为

$$f(f(x_0)) = f(x_0) = x_0,$$

故 $x_0 \in B$, 所以 $A \subseteq B$, 即 $A \cap B = A$.

(2) 当 $A = \{-1, 3\}$ 时, 即方程

$$x = x^2 + bx + c$$

有两个根 $-1, 3$, 所以 $b = -1, c = -3$.

此时, 集合 B 即为方程

$$(x^2 - x - 3)^2 - (x^2 - x - 3) - 3 = x$$

的解集.

此方程即 $(x^2 - x - 3)^2 - x^2 = 0$, 解方程得 $B = \{-1, 3, -\sqrt{3}, \sqrt{3}\}$.

(3) 设集合 $A = \{a\} (a \in \mathbf{R})$, 则方程 $f(x) - x = 0$ 有重根 a ,

即 $f(x) - x = (x - a)^2; f(x) = (x - a)^2 + x$,

从而方程 $x = f(f(x))$ 即为

$$x = [(x - a)^2 + x - a]^2 + (x - a)^2 + x,$$

整理得 $(x - a)^2[(x - a + 1)^2 + 1] = 0$.

因为 $x, a \in \mathbf{R}, (x - a + 1)^2 + 1 \neq 0$, 故 $x = a$, 即 $B = \{a\}$.

所以 $A = B$.

例 4 设 S 为集合 $\{1, 2, 3, \dots, 50\}$ 的具有下列性质的子集: S 中任意两个不同元素之和不被 7 整除, 那么 S 中元素最多可能有

多少个?

(第 43 届美国中学数学竞赛题)

基本思路: 对于两个不同的自然数 a 与 b , 如果 $7 \nmid (a+b)$, 那么它们被 7 除所得的余数的和不为 0, 故将集合 $\{1, 2, \dots, 50\}$ 的元素按照被 7 除所得的余数相同与否进行分类, 余数相同的组成一个集合, 这样得到 7 个子集, 然后从这 7 个子集中适当抽取满足题意的元素组成集合 S .

解: 将集合 $A = \{1, 2, \dots, 50\}$ 划分为 7 个子集: $A_0, A_1, A_2, \dots, A_6$, 其中 A_i 中的每个元素除以 7 后余数为 i ($i = 0, 1, 2, \dots, 6$), 即

$$A_0 = \{7, 14, 21, 28, 35, 42, 49\}$$

$$A_1 = \{1, 8, 15, 22, 29, 36, 43, 50\}$$

$$A_2 = \{2, 9, 16, 23, 30, 37, 44\}$$

$$A_3 = \{3, 10, 17, 24, 31, 38, 45\}$$

$$A_4 = \{4, 11, 18, 25, 32, 39, 46\}$$

$$A_5 = \{5, 12, 19, 26, 33, 40, 47\}$$

$$A_6 = \{6, 13, 20, 27, 34, 41, 48\}.$$

根据题意得:

① S 最多含 A_0 中的一个元素;

② S 若含 A_i ($i = 1, 2, \dots, 6$) 中的一个元素, 则可以含这个子集中的所有元素; 但一定不含 A_{7-i} 中的元素.

③ A_1 中含有 8 个元素, 而其他子集只包含 7 个元素, 故最大子集 S 必含 A_1 中的所有元素.

由以上三点可知最大子集 S 含 $1 + 8 + 7 + 7 = 23$ 个元素.

说明: 利用余数构造集合的划分是解决集合问题的一种常用手段.

例 5 设 $M = \{1, 2, \dots, 1995\}$, $A \subseteq M$, 且当 $x \in A$ 时, $15x \notin A$, 求 $|A|$ 的最大值. (1995 年全国高中数学竞赛试题)

基本思路: 因为 $\left\lfloor \frac{1995}{15} \right\rfloor = 133$, 所以当 $k = 134, 135, \dots, 1995$

时, $15k$ 一定不在 A 中; 又因为 $\left[\frac{133}{15}\right] = 8$, 故当 $k = 9, 10, 11, \dots, 133$ 时 k 与 $15k$ 不能同时在 A 中, 所以 $|A| \leq 1995 - 125 = 1870$. 再构造一个 A , 使 $|A| = 1870$ 即可.

解: 由题意, 当 $k = 9, 10, \dots, 133$ 时, k 与 $15k$ 不能同时在 A 中, 故至少有

$$133 - 8 = 125$$

个数不在 A 中, 即 $|A| \leq 1995 - 125 = 1870$.

另一方面, M 的子集 A 可取 $\{1, 2, \dots, 8, 134, 135, \dots, 1997\}$ 满足题意, 此时 $|A| = 1870$. 故 $|A|_{\max} = 1870$.

例 6 设集合 $M = \{1, 2, \dots, 1000\}$. 现对 M 的任一非空子集 X , 令 a_x 表示 X 中最大数与最小数之和, 那么, 所有这样的 a_x 的算术平均值为多少? (1991 年全国高中数学竞赛试题)

基本思路: 对于集合 M 的任意一个子集 $X = \{b_1, b_2, \dots, b_k\}$, 其中 $b_1 < b_2 < \dots < b_k$, 存在一个子集 $X' = \{1001 - b_1, 1001 - b_2, \dots, 1001 - b_k\}$, $a_x = b_1 + b_k, a'_x = 2002 - b_1 - b_k$, 其算术平均数为 1001. 从而可得所有 a_x 的算术平均数为 1001.

解: 将 M 中非空子集配对. 对每个非空集 $X \subset M$, 令 $X' = \{1001 - x | x \in X\}$, 则 $X' \subset M$.

如果 $X \neq X'$, 那么 $a_x + a'_x = 2002$; 对于 $X' = X$, 必有 $a_x = 1001$.

由此可见, 所有 a_x 的算术平均数为 1001.

说明: 运用对应的观点将集合配对是解决集合问题的一种常用手段.

例 7 设 S 是数集 $\{1, 2, 3, \dots, 2001\}$ 的一个子集, 且 S 中任意两个数的差不等于 4, 也不等于 7, 问集合 S 中最多可以包含多少个数?

基本思路: 由于 4 与 7 的和是 11, 先考虑前 11 个自然数 1, 2, 3, \dots , 11, 发现其中 1, 4, 6, 7, 9 满足题设条件, 而这 5 个数分别加

上 $11k$ (k 为非负整数) 后的 5 个数仍满足条件.

解: 显然数集 $\{1, 4, 6, 7, 9\}$ 中任意两个元素之差都不等于 4 或 7.

取 $A = \{x | x = 11t + 1, 11t + 4, 11t + 6, 11t + 7, 11t + 9, t \geq 0, t \in \mathbf{Z}, 11t + 9 \leq 2001\}$, 则 A 中任意两个数之差不是 4 或 7. 所以 $|S|$ 的最大值 $\geq 5 \times 182 = 910$.

另一方面, 若 $|S| \geq 911 = 182 \times 5 + 1$, 则 182 个数组 $(1, 2, \dots, 11), (12, 13, \dots, 22), \dots, (1981, 1982, \dots, 1991), (1992, 1993, \dots, 2001)$ 中必有一组中至少有 6 个数属于 S . 不妨设这组是 $(1, 2, \dots, 11)$, 将它分成 5 组 $(4, 7, 11), (3, 10), (2, 6), (5, 9), (1, 8)$, 其中必有一组至少有两个数属于 S , 而它们的差为 4 或 7, 故 S 最多含有 910 个数.

例 8 设集合 $S_n = \{1, 2, \dots, n\}$. 若 X 是 S_n 的子集, 把 X 中所有数之和称为 X 的“容量”(规定空集容量为 0). 若 X 的容量为奇(偶)数, 则称 X 为 S_n 的奇(偶)子集.

(1) 求证: S_n 的奇子集与偶子集个数相等;

(2) 求证: 当 $n \geq 3$ 时, S_n 的所有奇子集容量之和与所有偶子集容量之和相等.

(3) 当 $n \geq 3$ 时, 求 S_n 所有奇子集的容量之和.

(1992 年全国高中数学竞赛试题)

基本思路: 设 $T \subseteq \{2, 3, \dots, n\}$. 若 T 是奇子集, 则 $T \cup \{1\}$ 为偶子集; 若 T 是偶子集, 则 $T \cup \{1\}$ 是奇子集. 故奇子集的个数与偶子集的个数相等.

证明: (1) 集合 S_n 的子集可分成两类: (A) 含有 1 的子集; (B) 不含有 1 的子集. 这两类子集各有 2^{n-1} 个, 而且对于 (B) 类中的任一子集 T , 必在 A 类中存在惟一个子集 $T \cup \{1\}$ 与之对应, 且若 T 为奇子集, 则 $T \cup \{1\}$ 是偶子集; T 为偶子集, 则 $T \cup \{1\}$ 是奇子集. 所以, 若 (B) 类中有 x 个奇子集, y 个偶子集, 则 (A) 类中必有 x 个偶子集, y 个奇子集.

所以 S_n 的奇子集和偶子集的个数相同。

(2) 对任一 i ($1 \leq i \leq n$), 含 i 的子集共有 2^{n-1} 个, 运用上述配对的方法可知, 当 $i \neq 1$ 时, 这 2^{n-1} 个子集中有一半即 2^{n-2} 个奇子集, 当 $i = 1$ 时, 由于 $n \geq 3$, 将上述的 1 换成 3, 同样可以得到其中有一半是奇子集. 于是在计算奇子集的容量之和时, 元素 i 共出现了 2^{n-2} 次.

所以, 奇子集的容量之和是

$$\sum_{i=1}^n 2^{n-2}i = n(n+1) \cdot 2^{n-3}.$$

同理, 这也是偶子集的容量之和, 两者相等.

(3) 由(2)得 S_n 的所有奇子集的容量之和为

$$n(n+1) \cdot 2^{n-3}.$$

【练习 1】

1. 填空题

(1) 已知集合 $A = \{y | 2 < y < 3\}$, $x = \frac{1}{\log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{3}} + \frac{1}{\log_{\frac{1}{5}} \frac{1}{3}}$, 则

x _____ A . (填 \in 或 \notin) (1983 年全国高中数学竞赛试题)

(2) 集合 $A = \{\text{平行四边形}\}$, 集合 $B = \{\text{梯形}\}$, 则 $A \cap B =$

_____.

(3) 设全集 $I = \{2, 3, a^2 + 2a - 3\}$, $A = \{2, |a + 1|\}$, 则 $\bar{A} =$

_____.

(4) 若非空集合 $A = \{x | 2a + 1 \leq x \leq 3a - 5\}$, $B = \{x | 3 \leq x \leq 22\}$, 则能使 $A \subseteq A \cap B$ 成立的所有 a 的集合是 _____.

(1998 年全国高中数学竞赛试题)

(5) 集合 M 中的元素是连续自然数, 且 $|M| \geq 2$, 且 M 中元素之和为 1996, 这样的集合 M 共有 _____ 个.

2. 集合 $M_1 = \{u | u = 12m + 8n + 4l, m, n, l \in \mathbf{Z}\}$, $M_2 = \{u | u = 20p + 16q + 12r, p, q, r \in \mathbf{Z}\}$, 求证 $M_1 = M_2$.

(1989 年全国高中数学竞赛试题)