

新编

高中 数学

解题途径

夏益辉 徐惠芳 编
刘定一 鲍宜国

第二版



华东师范大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

新编高中数学解题途径/夏益辉等编.-2 版.-上海:华东师范大学出版社, 1999

ISBN 7-5617-2001-7

I .新… II .夏… III .数学课-高中-解题 IV .G634.604

中国版本图书馆 CIP 数据核字(1999)第 43480 号

责任编辑:陈信漪倪明

封面设计:黄惠敏

新编高中数学解题途径

(第二版)

夏益辉 徐惠芳 刘定一 鲍宜国 编

华东师范大学出版社出版发行

(上海中山北路 3663 号 邮政编码 200062)

新华书店上海发行所经销

复旦大学印刷厂印刷

开本 850×1168 1/32 印张 18.25 字数 456 千字

1999 年 9 月第一版 1999 年 12 月第 2 次印刷

印数 5 101-16100 本

ISBN7-5617-2001-7/G · 915

定价:20.00 元

新编高中数理解题途径

编 委 会

石源泉 徐惠芳 张正大 蔡爱莉

前言

《中学数学解题途径》初版于 80 年代初。出版后，深受广大师生及自学青年的欢迎。我们收到了许多读者的来信，他们肯定了该书的作用，提出了不少修改的意见和建议。我们遂于 1995 年作了一次全面的修订，取名为《新编高中数学解题途径》，以更好地为广大读者服务。

近年来，为了提高教育质量，提高全民族的文化素质，更好地培养学生的创新意识，各地各校都在进行教改探索和教育实践。作为课程改革的试点城市上海，第一期课程改革的工程正在全面实施，面向 21 世纪的第二期工程已经启动；全国范围内的新的高中数学教学大纲已制定，新的教材将于 2000 年全面使用。这就要求我们这本“解题途径”作再次修订，以满足读者需求。现修订后，作为《新编高中数学解题途径》的第二版出版。

在修订过程中，我们力求做到：(1)精选精讲例题。所选的例题具有典型性和新颖性，并分析探讨解题

方法，揭示解题规律，指出解题的途径，以提高学生的分析问题和解决问题的能力。(2)精编习题。本书的习题分 A、B 两组，其中 A 组为基本要求，要求学生对本章内容基本掌握即能完成；B 组为有一定难度的综合题，着眼于学生对知识的融会贯通和综合能力的培养。为了便于自学，书末附有习题答案与提示。

。

本书适合于高中各年级的学习使用，也可供高三复习参考。

本书的第一、二、三、四章由夏益辉执笔，第七、十一章由徐惠芳执笔，第五、六、九、十章由刘定一执笔，第十二、十三、十四、十五章由鲍宜国执笔，第八章由于国金执笔。

我们欢迎读者的批评和建议，为提高本书质量而共同努力。

编者

1998 年 8 月

目 录

第一章 集合与命题	7
第二章 函数指数函数与对数函数	26
第三章 三角比	76
第四章 三角函数	103
第五章 复数	143
第六章 不等式	175
第七章 数列、数学归纳法	228
第八章 导数与积分	271
第九章 排列、组合、二项式定理	319
第十章 向量初步	356
第十一章 立体几何	399
第十二章 直线与圆的方程	480
第十三章 圆锥曲线	495
第十四章 轨迹方程	542
第十五章 参数方程与极坐标	581
习题答案与提示	629

第一章 集合与命题

一 集合

集合是一个不定义的原始概念.集合的元素必须具有三个特征:确定性、互异性和无序性.

元素同集合的关系是“属于”或“不属于”.集合同集合的关系有“包含”与“不包含”,包含关系有包含、相等、真包含.要注意符号“ $\in$ ”、“ $\notin$ ”,只能用在元素与集合的符号之间,而符号“ $\supset$ ”、“ $\supseteq$ ”用在两个集合的符号之间,不能用错.

集合的交与并: $A \cap B = \{x | x \in A, \text{ 且 } x \in B\}$,

$A \cup B = \{x | x \in A, \text{ 或 } x \in B\}$.

“ $x \in A, \text{ 且 } x \in B$ ”是说 x 既是 A 的元素,又是 B 的元素,也就是说 x 是 A 和 B 的公共元素.“ $x \in A, \text{ 或 } x \in B$ ”就包含三种可能情况:① $x \in A$, 但 $x \notin B$; ② $x \in B$, 但 $x \notin A$; ③ $x \in A$, 同时 $x \in B$.明确“且”和“或”的上述含义,以正确地使用“交”和“并”.

集合 A 的补集是相对于给定的全集 I 来说的, A 必须是 I 的子集,于是由 I 中所有不属于 A 的元素组

成的集合 $\bar{A}$ ，就是 A 在全集 I 中的补集.

要熟悉关于交集、并集、补集的一些性质：

$$\begin{aligned} A \cup \emptyset &= A, A \cap \emptyset = \emptyset, A \cup A = A, A \cap A = A, \\ A \cup \bar{A} &= I, A \cap \bar{A} = \emptyset, \bar{\bar{A}} = A, \\ \overline{A \cap B} &= \bar{A} \cup \bar{B}, \overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}, \dots \end{aligned}$$

利用集合的元素的三个特征，可以确定一个集合. 从集合的交、并、补等概念上作分析，可把集合问题转化为代数问题或几何问题来求解. 借助于数轴、图象、文氏图进行思考，能帮助我们寻找集合问题的解答途径.

例 1 已知集合 $A=\{2, 4, a^3-2a^2-a+7\}$, $B=\{-4, a+3, a^2-2a+2, a^3+a^2+3a+7\}$, 且 $A \cap B = \{2, 5\}$. 求实数 a 的值.

分析: 依据集合中元素的确定性和互异性，从已条件 $A \cap B = \{2, 5\}$ 入手，可知 A 中元素 a^3-2a^2-a+7 必为 5.

解: 因为 $A \cap B = \{2, 5\}$ ，所以 $A = \{2, 4, 5\}$ ，因此 $a^3-2a^2-a+7=5$ ，从而 $(a-2)(a^2-1)=0$ ，得 $a=2$ ，或 $a=\pm 1$.

当 $a=2$ 时， $B=\{-4, 5, 2, 25\}$ ，这时 $A \cap B = \{2, 5\}$ ，符合题意.

当 $a=1$ 时, $B=\{-4, 4, 1, 12\}$, 这时 $A \cap B = \{4\}$, 与已知 $A \cap B = \{2, 5\}$ 矛盾, 不合题意.

当 $a=-1$ 时, $B=\{-4, 2, 5, 4\}$, 这时 $A \cap B = \{2, 4, 5\}$, 与已知 $A \cap B = \{2, 5\}$ 矛盾, 不合题意.

因此, $a=2$ 为所求的值.

注:本题要深刻理解交集的概念, $A \cap B$ 中元素既属于 A , 又属于 B , 也就是说 $A \cap B$ 是 A 的子集, 又是 B 的子集, 即 $A \cap B \subseteq A$, $A \cap B \subseteq B$.

例 2 已知集合 $A=\{x|x^2-mx+m^2-19=0\}$, $B=\{x|x^2-5x+6=0\}$, $C=\{x|x^2+2x-8=0\}$, 且 $A \cap B \neq \emptyset$, $A \cap C = \emptyset$. 求实数 m 的值.

分析:不难求出 B 、 C 的元素, 然后根据题中条件来确定 A 的元素, 从而求得 m 的取值.

解:不难求得, $B=\{2, 3\}$, $C=\{2, -4\}$. 由 $A \cap C = \emptyset$, 可知 $2 \notin A$, $-4 \notin A$; 又由 $A \cap B \neq \emptyset$, 可知 2 、 3 之中至少有一个属于 A ; 于是只有 $3 \in A$.

由此用 3 代入 $x^2-mx+m^2-19=0$ 中的 x , 得 $3^2-3m+m^2-19=0$, 解得 $m=5$, 或 $m=-2$.

当 $m=5$ 时, $A=\{x|x^2-5x+6=0\}=\{2, 3\}$, 此时 $A \cap C = \{2\} \neq \emptyset$ 与已知条件矛盾, 不合题意.

当 $m=-2$ 时, $A=\{x|x^2+2x-15=0\}=\{3, -5\}$, 此时满足所有已知条件.

因此, $m=-2$ 即为所求的值.

注:若集合的表示式中含有字母(如例 1 中的 a , 例 2 中的 m), 在求得字母的值之后, 必须进行检验.

例 3 设 $A=\{x|x^2-9<0\}$, $B=\{x|x^2-4x+3\geq 0\}$, $I=\mathbf{R}$, 求: (1) $A\cap B$; (2) $A\cup B$; (3) $\bar{B}$; (4) $\bar{A}\cap B$; (5) $\bar{A}\cup\bar{B}$; (6) $\bar{A}\cup\bar{B}$.

解:化简得 $A=\{x|-3<x<3\}$, $B=\{x|x\leq 1, \text{ 或 } x\geq 3\}$, 把 A 、 B 、 I 在数轴上表示出来, 如图 1-1 所示.

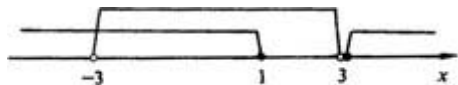


图 1-1

$$(1) A\cap B = \{x|-3 < x \leq 1\};$$

$$(2) A\cup B = \mathbf{R};$$

$$(3) \bar{B} = \{x|1 < x < 3\};$$

$$(4) \bar{A}\cap B = \{x|x \leq -3, \text{ 或 } x \geq 3\};$$

$$(5) \bar{A}\cup\bar{B} = \emptyset;$$

$$(6) \bar{A}\cup\bar{B} = \{x|x \leq -3, \text{ 或 } x > 1\}.$$

注:借助于数轴, 可直观地得到解答.

例 4 设全集 $I=\{(x, y)|x, y\in\mathbf{R}\}$, 集合 $M=\{(x, y)|\frac{y-3}{x-2}=1, x, y\in\mathbf{R}\}$, $N=\{(x, y)|y=x+1, x, y\in\mathbf{R}\}$, 求

$$\overline{M} \cap N.$$

解: $M = \left\{ (x, y) \mid \frac{y-3}{x-2} = 1 \right\} = \{ (x, y) \mid y = x + 1, \text{ 且 } x \neq 2 \}$, $\overline{M} = \{ (x, y) \mid y \neq x + 1 \text{ 或 } x = 2 \}$. 所以

$$\overline{M} \cap N = \{ (2, 3) \}.$$

注: (1) 由 $\frac{y-3}{x-2}=1$ 化为 $y=x+1$, 不是同解变形.

(2) 不能把 $\{(2, 3)\}$ 写成 $\{2, 3\}$, 因为两者的意义不相同.

例 5 已知集合 $A = \{x \mid 2a \leq x \leq a^2 + 1\}$, $B = \{x \mid x^2 - 3(a+1)x + 2(3a+1) \leq 0\}$, 求使 $A \subseteq B$ 的实数 a 的取值范围.

解: 由 $x^2 - 3(a+1)x + 2(3a+1) \leq 0$, 得 $(x-2)[x(3a+1)] \leq 0$.

(1) 当 $3a+1 \geq 2$ 即 $a \geq 1/3$ 时, 得 $B = \{x \mid 2 \leq x \leq 3a+1\}$,

$$\begin{array}{l} \text{由 } A \subseteq B, \text{ 必须} \\ \text{解得} \end{array} \quad \begin{cases} 2 \leq 2a, \\ a^2 + 1 \leq 3a + 1. \end{cases}$$

$$1 \leq a \leq 3.$$

(2) 当 $3a+1 < 2$ 即 $a < 1/3$ 时, 得 $B = \{x \mid 3a+1 \leq x \leq 2\}$
由 $A \subseteq B$, 必须

$$\begin{array}{l} \text{解得} \end{array} \quad \begin{cases} 3a + 1 \leq 2a, \\ a^2 + 1 \leq 2. \end{cases}$$

$$a = -1$$

综合(1)和(2)可知，使 $A \subseteq B$ 的 a 的取值范围是 $\{a \mid 1 \leq a \leq 3, \text{ 或 } a = -1\}$.

注：借助于数轴，可以直观地处理两个区间的覆盖问题.

例 6 已知非空集合 $S \subseteq \mathbb{N}$ ，且满足条件：“若 $x \in S$ ，则 $20/x \in S$.” 问这样的集合 S 有哪几个？

解：由于 20 的正约数有 1、2、4、5、10、20 等 6 个，故由题设可知， S 中元素的个数只能是 2、4、6 三种情况.

含有 2 个元素的 S 是 $\{1, 20\}$ ， $\{2, 10\}$ ， $\{4, 5\}$ ；

含有 4 个元素的 S 是 $\{1, 2, 10, 20\}$ ， $\{1, 4, 5, 20\}$ ， $\{2, 4, 5, 10\}$ ；

含有 6 个元素的 S 是 $\{1, 2, 4, 5, 10, 20\}$.

故满足题设条件的集合 S 共有上述七个.

例 7 已知集合 $M = \{a, a+d, a+2d\}$ ， $N = \{a, aq, aq^2\}$ ，其中 $a \neq 0$ ，且 $M = N$ ，求 q 的值.

解：由已知 $M = N$ ，可知有两种情况：

$$\begin{cases} a+d=aq, & \textcircled{1} \\ a+2d=aq^2, & \textcircled{2} \end{cases}$$

或

$$\begin{cases} a+d=aq^2, & \textcircled{3} \\ a+2d=aq, & \textcircled{4} \end{cases}$$

式②-式①得 $d=aq(q-1)$ ，代入式①， $aq^2-2aq+a=0$. 因为 $a \neq 0$ ，故 $q^2-2q+1=0$ ，得 $q=1$ ，于是 $a=aq=aq^2$. 与互异性矛盾，应舍去.

式④-式③得 $d=aq(1-q)$ ，代入式③，得 $2q^2-q-1=0$. 所以 $q=-1/2$ ，或 $q=1$ (舍去).

故 $q=-1/2$.

例 8 设 a 、 b 是两个实数.

$A=\{(x, y) | x=n, y=na+b, n \text{ 是整数}\}$,

$B=\{(x, y) | x=m, y=3m^2+15, m \text{ 是整数}\}$,

$C=\{(x, y) | x^2+y^2 \leq 144\}$

是平面 xOy 内点的集合，讨论是否存在 a 和 b ，使得

(1) $A \cap B \neq \emptyset$;

(2) $(a, b) \in C$ 同时成立.

分析:把题设条件综合整理，由(1) $A \cap B \neq \emptyset$ ，可得 $n=m$ 和 $na+b=3m^2+15$ ，由(2) $(a, b) \in C$ 得 $a^2+b^2 \leq 144$. 利用等价转化，本题就归结为二次不等式的有无实数解的问题；或者利用数形结合，转化为“形”

的问题来思考，把本题解释成直线与圆的相交问题，由此得到如下两种解法。

解法一：如果实数 a 和 b 使得(1)成立，那么必存在整数 m 和 n ，使得 $(n, na+b)=(m, 3m^2+15)$ ，即

$$\begin{cases} n = m, \\ na + b = 3m^2 + 15. \end{cases}$$

由此得出，存在整数 n 使得 $na+b=3n^2+15$ ，即

$$b=3n^2+15-na. \quad ①$$

$$\text{由(2)成立，得 } a^2+b^2 \leq 144. \quad ②$$

现把式①代入式②，得到如下关于 a 的不等式：

$$(1+n^2)a^2 - 2n(3n^2+15)a + (3n^2+15)^2 - 144 \leq 0, \quad ③$$

它的判别式

$$\begin{aligned} \Delta &= 4n^2(3n^2+15)^2 - 4(1+n^2)[(3n^2+15)^2 - 144] \\ &= -36(n^2-3)^2, \end{aligned}$$

但 n 是整数， $n^2-3 \neq 0$ ，因而 $\Delta < 0$ ，又因 $1+n^2 > 0$ ，故式③不可能有实数解 a ，这就表明，不存在实数 a 和 b 使得(1)、(2)同时成立。

解法二：假如存在实数 a 和 b 使得(1)、(2)同时成立，同解法

$$\begin{aligned} \text{一得} \quad & \begin{cases} na + b = 3n^2 + 15, \\ a^2 + b^2 \leq 144. \end{cases} \end{aligned} \quad \begin{matrix} ① \\ ② \end{matrix}$$

这表明点 $P(a, b)$ 既在直线 $l: nx+y=3n^2+15$ 上, 又在圆面: $x^2+y^2 \leq 144$ 上, 于是①、②两式同时成立的条件是, 圆心 O 到直线 l 的距离不大于圆 O 的半径 12, 即

$$\frac{|3n^2 + 15|}{\sqrt{n^2 + 1}} \leq 12.$$

因此, $|n^2 + 5| \leq 4\sqrt{n^2 + 1}$, 两端平方, 经整理得

$$n^4 - 6n^2 + 9 \leq 0, \quad (n^2 - 3)^2 \leq 0.$$

但 $(n^2 - 3)^2 \geq 0$, 故只有 $n^2 - 3 = 0$. 这与 n 是整数矛盾.

于是, 不存在实数 a 和 b 使得(1)、(2)同时成立.

例 9 某班共有 50 名同学, 其中参加数学小组的有 20 名, 参加物理小组的有 15 名, 既参加数学小组又参加物理小组的有 5 名. 问这两个小组都不参加的有几名?

分析: 本题可考虑用集合来解.

解: 如图 1-2 所示, 设 $I = \{\text{某班全体同学}\}$, $A = \{\text{参加数学小组的同学}\}$, $B = \{\text{参加物理小组的同学}\}$, 则

$A \cap B = \{\text{既参加数学小组又参加物理小组的同学}\},$

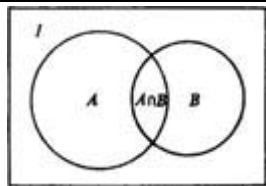


图 1-2

$\bar{A} \cap \bar{B} = \{ \text{既不参加数学小组又不参加物理小组的同学} \}$.

再设 $n(I)$ 、 $n(A)$ 、 $n(\bar{A} \cap \bar{B})$ 分别表示集合 I 、 A 、 $\bar{A} \cap \bar{B}$ 的元素个数，其余类推，则

$$n(I)=50, n(A)=20, n(B)=15, n(A \cap B)=5.$$

于是 $n(\bar{A} \cap \bar{B}) = n(\bar{A} \cup \bar{B}) = n(I) - n(A \cup B)$

$$= n(I) - n(A) - n(B) + n(A \cap B)$$

$$= 50 - 20 - 15 + 5 = 20.$$

注：常用的有限集合中元素个数的计算公式，有

$$n(\bar{A}) = n(I) - n(A);$$

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B);$$

$$n(A \cap B) = n(A) - n(A \cap \bar{B}) = n(B) - n(\bar{B} \cap A);$$

$$n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(B \cap C) - n(C \cap A) + n(A \cap B \cap C).$$

这些公式都可借助于文氏图直观地得到。

二 命题

四种命题形式与充分条件、必要条件之间的联系如下表：

命题形式		推出关系	充分必要条件
原命题	若 A 则 B	$A \Rightarrow B$	A 是 B 的充分条件
逆命题	若 B 则 A	$B \Rightarrow A$	A 是 B 的必要条件
否命题	若 $\bar{A}$ 则 $\bar{B}$	$\bar{A} \Rightarrow \bar{B}$	A 是 B 的必要条件
逆否命题	若 $\bar{B}$ 则 $\bar{A}$	$\bar{B} \Rightarrow \bar{A}$	A 是 B 的充分条件

原命题与其逆否命题同真同假，即这两个命题等价，逆命题与否命题也是等价命题。

当原命题(或逆否命题)成立时，原命题中的条件为充分的.逆命题(或否命题)成立时，原命题中的条件为必要的.

原命题和逆命题(或逆否命题和否命题)都成立，则原命题中的条件为充要的.

反之，如果 A 是 B 的充要条件，则原命题与其逆命题都成立，进而四种命题都成立.

确定一个命题是真命题，应给出证明；确定一个命题是假命题，只需举出反例.证明某个命题有困难时，可改证其等价命题.

例 10 设 $a, b \in \mathbb{Z}$ ，已知命题:如果 a, b 都是奇数，那么 $a+b$ 是偶数.

- (1)写出该命题的逆命题、否命题及逆否命题；
- (2)判断上述四个命题的真假，并证明你的结论.