五年级第一学期

一、怎样计算又快又准确

活动目标 会利用乘法分配律及积不变的性质，灵活的拆数和字母运算,使复杂的小数运算变得简便,提高计算的准确性和速度。

学习数学一个很重要的目的是学会计算，学会数量间的运算。随着现代科学技术的发展,计算器、计算机的发明与普及使计算逐渐趋向于机器化。但是在某些场合,没有计算器又需要进行计算的话,那么人工计算还是必要的,而人工计算能利用运算定律和性质进行一些巧算，则运算可以又准确又快。

1. 利用积不变的性质进行简便运算。

▲ 计算：$1.96\times45.1+0.196\times394+19.6\times1.55$

观察此题,不难发现这是一个多积求和的计算题,如果能用乘法分配律则可以使运算简便，但是没有相同的因数是不能使用乘法分配律的。仔细观察，可发现 1.96,0.196,19.6,都是由 1,9,6 三个数字构成，我们可以用一个因数扩大若干倍，另一个因数缩小相同的倍数积不变的性质，改变 0.196、19.6 使之都变成 1.96,就可以使用乘法分配律了,具体解法如下：

$$\begin{aligned}&1.96\times45.1+0.196\times394+19.6\times1.55\\=&1.96\times45.1+\underset{\text{(扩大10倍)}}{1.96}\times\underset{\text{(缩小10倍)}}{39.4}+\underset{\text{(缩小10倍)}}{1.96}\times\underset{\text{(扩大10倍)}}{15.5}\end{aligned}$$

$=1.96\times(45.1+39.4+15.5)$

$=1.96\times100$

$=196$

▲ **计算：**$9.99\times2.22+3.33\times3.34$

通过审题，可发现 9.99 恰好是 3.33 的 3倍，那在9.99×2.22**中利用积不变的性质，将 9.99 缩小 3 倍，2.22 扩大 3倍使之变成** 3.33×6.66 **，那么此题可以这样计算了：**

$9.99\times2.22+3.33\times3.34$

$=3.33\times6.66+3.33\times3.34$

$=3.33\times(6.66+3.34)$

$=3.33\times10$

$=33.3$

做一做(一)：

用简便方法计算下列各题：

(1) $19.98\times37-199.8\times1.9+1998\times0.82$

(2) $75\times1.25+1.2\times12.5+0.13\times125$

(3) $2.34\times11-117\times0.22$

2. **巧拆数，使运算简便：**

▲ **计算：**$19.99\times19.98-19.97\times19.96$

利用拆数使 $19.99=19.97+0.02$；$19.96=19.98-0.02$**，再用乘法分配律，造成两个相等的积相减，那么这两个乘法就不必计算了。然后再次使用分配律，可以方便的计算出结果。利用合适的拆数，可以使计算更灵活而简便。具体计算如下：**

$19.99\times19.98-19.97\times19.96$

$=(19.97+0.02)\times 19.98-19.97\times(19.98-0.02)$

$=\underset{\sim\sim\sim}{19.97\times 19.98}+19.98\times 0.02-\underset{\sim\sim\sim}{19.97\times 19.98}+19.97\times 0.02$

$=0.02\times(19.98+19.97)$

$=0.02\times 39.95$

$=0.799$

此题还有其他的拆数方法，同学们可以自己尝试。

▲ **计算：**$199.199\times 198-198.198\times 199$

利用 $199.199=199\times 1.001$；$198.198=198\times 1.001$ **，使被减数与减数都变成用相同因数计算的积，显然这两个积是相等的，被减数与减数相等，差自然就是** 0 **了。具体计算如下：**

$199.199\times 198-198.198\times 199$

$=199\times 1.001\times 198-198\times 1.001\times 199$

$=0$

做一做(二)：

(1) $100\times 7.9+184\times 2.1+84\times 2.9$

(2) $2.2\times 2.4+1.6\times 1.7$

(3) $18.9\times 178.178+0.49-17.8\times 189.189$

3. **利用字母代替数，使运算简便。**

▲ **计算：**$(9.84+1.23+2.34)\times(8.36+7.21)-(9.84+8.36+7.21)\times(1.23+2.34)$

认真审题后，会发现前后两个乘法中，每个括号内都有若干个加数是相同的，我们不妨先用字母来代替这些数，看看计算会有什么变化？

假设：$a=8.36+7.21$；$b=1.23+2.34$

原式就变成了： $(9.84+b)\times a-(9.84+a)\times b$

$=9.84\times a+a\times b-9.84\times b-a\times b$

由于 $a\times b$ 相等，原式进一步变成 $=9.84\times(a-b)$

这时再将 a 与 b 分别还原成 $8.36+7.21$ 与 $1.23+2.34$

得 $9.84\times(a-b)$

$=9.84\times[(8.36+7.21)-(1.23+2.34)]$

$=9.84\times(15.57-3.57)$

$=9.84\times12$

$=9.84\times(10+2)$

$=98.4+9.84\times2$

$=118.08$

通过用字母代替数，使运算过程得以简化，使本来一个很复杂的计算变得简单，同时与原计算又是等价的。

▲ $(2+3.15+5.87)\times(3.15+5.87+7.32)-(2+3.15+5.87+7.32)\times(3.15+5.87)$

根据上一题的经验，我们不妨设：$a=2+3.15+5.87$ $b=3.15+5.87$，

原式 $=a\times(b+7.32)-(a+7.32)\times b$

$=a\times b+7.32\times a-a\times b-7.32\times b$

$=7.32\times(a-b)$

$=7.32\times[(2+3.15+5.87)-(3.15+5.87)]$

$=7.32\times[2+3.15+5.87-3.15-5.87]$

$=7.32\times2$

$=14.64$

做一做(三):

(1) $(1.23+2.34+3.45)\times(2.34+3.45+4)-(1.23+2.34+3.45+4)\times(2.34+3.45)$

(2) $(7.88+6.77+5.66)\times(9.31+10.98+10)-(7.88+6.77+5.66+10)\times(9.31+10.98)$

(3) $(3.76+6.37+7.36)\times(6.37+7.36+5)-(3.76+6.37+7.36+5)\times(6.37+7.36)$

二、怎样确定余数

活动目标　知道在除法中，余数的一些规律性变化，会利用这种规律性来解题。

知道几个数的和、差、积除以一个数，所得的余数，一定等于这几个数分别除以这个数，所得的余数的和、差、积除以这个数的余数。知道余数也是可以运算的。

数学课上，老师出了一题选择题：

0.354÷0.13=2.7……（）括号中应填：

（A）3　（B）0.3　（C）0.03　（D）0.003

小李讲"应选择（B）因为 0.354÷0.13 就是 35.4÷13，从竖式看，商是 2.7 时余数是 0.3。"小王讲"不对，如果余数是 0.3，它比除数 0.13 大，这是不可能的，应选（C）0.03。"小张说"小王讲得也不对，如果余数是 0.03，那么 2.7×0.13+0.03=0.381，与原式被除数不同，只有 2.7×0.13+0.003=0.354，因此应选（D）。"老师说"小张讲得有道理，谁还有补充。"小唐补充说"小张从验算来推测余数。而小数除法是利用商不变的性质来计算的，商不变的性质只说明了被除数与除数同时扩大（或缩小）相同倍数时商不变，并没有讲余数不变，小李做的竖式得到的余数是 0.3，这个余数是随着被除数与除数扩大 100 倍，它也扩大了 100 倍，如要恢复到原来的余数则必须把 0.3 缩小 100 倍，就变成原式的余数 0.003。"老师高兴地说"小唐讲得真好。在除法中，有关余数的学问可多呢！"

1. 余数的重复出现。

▲ $\underbrace{55555\cdots\cdots5}_{100个}\div3$,当商是整数时余数是几？

我们在计算商是循环小数的除法时会碰到余数重复出现,那么在做商是整数时,余数会不会重复出现呢?我们对这题不妨先用竖式来除一下：

```
     1 8 5 1
3 ) 5 5 5 5……5
    3
    2 5
    2 4
      1 5
      1 5
          5
          3
          2
```

显然,相同的余数又重复出现了。不难发现,每3个5组成的数，被3除正好整除,每次除得的余数分别是2、1、0 这样可以把100个5组成的数以3个5为一节,可划分成$100\div3=33\cdots\cdots1$,即33节还多1个5,而$5\div3=1\cdots\cdots2$。$\therefore\underbrace{555\cdots\cdots5}_{100个}\div3$当商是整数时余数为2。由此可见,当商是整数，余数有时也会呈规律性的重复出现。你不妨试试看。

做一做(一)：

当商是整数时，余数各是几？

(1) $\underbrace{6666\cdots\cdots6}_{50个}\div4$

(2) $\underbrace{777\cdots\cdots7}_{60个}\div5$

(3) $\underbrace{8888\cdots\cdots8}_{80个}\div7$

▲ 由1992个7组成的多位数被74除,余数是几？

根据竖式：

除去第一个7,以后每3个7组成的数除以74,余数又重复出现依次是3、37、7。把1992个7先去掉首位7然后分成3

$$
\begin{array}{r}
1051 \\
74\overline{)77777\cdots\cdots7} \\
\underline{74} \\
377 \\
\underline{370} \\
77 \\
\underline{74} \\
3
\end{array}
$$

位一组，可分 $(1992-1)\div3=663\cdots\cdots2$，余下了 2 个 7，余数显然是 37。

本题的解题思路基本上与上一题相同。但要注意两点：(1) 当首位(甚至前几位)不够除时，在找出余数重复出现规律后把被除数进行划分时，应把首位(或前几位)去掉，否则将产生错误。(2) 当商是零时，也应看清余数是几，不能看错。如这一题的第二次除得的余数是 37，其中十位上的 3 就是第一次除得的余数，二者要分清。掌握了这两点，不妨试试看做下面几题。

做一做(二)：

(1) $\underbrace{4444\cdots\cdots4}_{100个}\div74$ 的余数是几？

(2) $\underbrace{1111\cdots\cdots1}_{1000个}\div7$ 的余数是几？

2. 余数还有什么规律性的变化？

▲ 194 除以 3，余数是 2；262 除以 3 余数是 1，那么 262 与 194 的和、差或积除以 3，余数又各是几呢？

$262+194=456$，而 $456\div3=152\cdots\cdots0$，余数为 0。如果把 $262\div3$ 的余数和 $194\div3$ 的余数相加，恰等于 3，且 $3\div3$ 余数为 0。这是不是一种巧合呢？再看 $262-194=68$，$68\div3=22\cdots\cdots2$，而 $262\div3$ 余数是 1 不够减 $194\div3$ 的余数 2，不妨从 $262\div3$ 的商中退下 1，使余数变为 $3+1=4$，用 $4-2=2$，恰也是 $(262-194)\div3$ 的余数。再从 $262\times194=50828$，$50828\div3=16942\cdots\cdots2$ 显然 262 与 194 分别除以 3 以后余数 1 与余数 2 相乘后的积被 3 除余数还是 2，与 $262\times194\div3$

的余数相同。当然,我们还可以举出很多的例子来说明这个道理。

这样我们就可以找出一个很有用的规律：

两个数(甚至几个数)如果分别除以同一个数得到两个余数(或几个余数),则这两个数的和、差、积除以原来的除数所得的余数,与两个余数的和、差、积除以原来的除数所得的余数是相等的。下面我们将应用这个原理来解一些数学题。

▲ 有一列数，前两个数是 3 与 4,从第 3 个数开始每一个数都是前两个数的和，这一列数中第 1992 个数除以 4,余数是几？

如果我们想先按这列数组成的规律来找出第 1992 个数将是很困难的，且不现实，当然也就更谈不上用第 1992 个数去除以 4 来找余数是几了。我们不妨找一找这一列数中每一个数除以 4 后的余数能不能形成一列有规律的数。

这一列数的前几个数不难找出 3,4,7,11,18,29……。又因 $3\div4=0\cdots\cdots3$, $4\div4=1\cdots\cdots0$,而第 3 个数 $7=3+4$, $\therefore$ $7\div4$ 的余数为 $(3+0)\div4=0\cdots\cdots3$,同理 $11=4+7$,而 $11\div4$ 的余数也可以用 $4\div4$ 的余数与 $7\div4$ 的余数相加为 $0+3=3$ 这样，很容易可对应列出这一列数除以 4 后的余数：3,0,3,3,2,1,3,0,3,3……，显然余数这一列数也是有规律的,每六个数为一周期。用 $1992\div6=332$。第 1992 个余数是 332 个周期最后一个数,显然是 1。问题不是解决了吗？

做一做(三)：

(1) 甲数除以 9,余数是 7 乙数被 9 除余数是 6;9 除丙数余数是 5,那么(甲 + 乙 + 丙)$\div9$ 还有余数吗？

(2) 一个数被 19 除余数是 4,那么将被除数扩大 11 倍，除数不变,余数是几？

(3) $(261330\times15)\div13=(A)\cdots\cdots($ $)$，A 是整数，余数是几？

(4) 有一列数 1、2、3、5、8、13、21，……这列数中第 1001 个数除以 3，余数是几？

三、换一个角度思考问题

活动目标　会用逆向思维的倒推法来思考问题。会从不同的角度来思考问题，开拓思维，使思维具有更大的灵活性。

学校要举行一次全校学生乒乓球单打比赛，比赛采用淘汰制，共有248名同学参加。体育老师请小王算一下从比赛开始到决出冠军，一共要进行多少场比赛？小王画啊，写啊，算啊，老半天还没有结果。旁边小军听了体育老师的介绍后，低头思索一下对老师讲一共要进行247场比赛，小王很惊奇地问小军："你怎么这样快就算出来了？"小军说："很简单，我不从比赛开始算起，我想每打一场比赛就淘汰一人，而冠军只有1人，这样248人中必定要淘汰247人，当然必须打247场比赛。"体育老师编制好比赛顺序后计算一下，果然要打247场比赛。

像小军那样换一个角度来思考问题的方法，对提高我们的思维能力、解决问题的速度具有很大的帮助。可以开阔我们思路，使思维的灵活性大大提高。

1. 从后面开始推算。

▲　水果店第一天卖出店里的西瓜一半又半只，第二天卖出剩下的西瓜的一半又半只，以后几天都是卖出前一天剩下的一半又半只，到第七天正好卖完。水果店原来有多少只西瓜？（注意：西瓜都必须整只卖出。）

我们不妨从第七天开始向前推算。因为西瓜不能半只卖出，因此第七天卖出的西瓜应是1只，这也是第六天卖出后剩

下的西瓜。然后就可推算出前一天卖剩的西瓜应是（卖出的西瓜＋0.5 只西瓜）×2。所以第五天卖剩的西瓜应是(1＋0.5)×2＝3(只)。第四天卖剩的西瓜应是：(3＋0.5)×2＝7(只)，依次类推，第三天卖剩的西瓜是：(7＋0.5)×2＝15 只；第二天卖剩的西瓜是(15＋0.5)×2＝31(只)，第一天卖剩的西瓜是(31＋0.5)×2＝63(只)，原有的西瓜就是(63＋0.5)×2＝127（只）。从后面开始推算可以把一些原来无法思考的问题变得可以有条理有步骤的思考。

做一做(一)：

(1）一个卖鸡蛋的老婆婆第一天卖出她所有的鸡蛋的一半加半只，第二天又卖出剩下的鸡蛋的一半加半只，第三天又卖出剩下的鸡蛋的一半加半只，这时还剩下 11 只鸡蛋，老婆婆原先有多少只鸡蛋？

(2）一筐苹果，甲取了一半又一个，乙取余下的一半又一个，丙取再余下的一半又一个，这筐苹果还剩一个，这筐苹果原有几个？

▲ 有砖 26 块，兄弟二人争着去挑，弟弟抢先摆好砖时，哥哥看弟弟挑得太多，抢下一半，弟弟不服又从哥哥那儿抢回一半，哥哥不肯，最后弟弟给哥哥 5 块，这时哥哥比弟弟多挑 2 块。弟弟最初准备挑几块？

砖一共有 26 块，最后哥哥比弟弟多挑 2 块，可知弟弟最后挑的砖是：(26－2)÷2＝12 块。显然哥哥挑 26－12＝14（块）。然后我们可以从后面向前推算：在弟弟没给哥哥 5 块砖前挑 12＋5＝17(块)，哥哥挑 14－5＝9(块)。哥哥在没给弟弟抢去一半时他挑 9×2＝18(块)，这时弟弟挑 17－9＝8（块）。由此可知，最初弟弟没给哥哥抢去一半时应挑 8×2＝16（块）。

我们可根据题意从弟弟最初挑 16 块砖来一步步验证是否正确。你会吗？

做一做(二)：

(1) 小红与小明分 24 粒糖，分好后小明发现自己分得太多了,他就拿出与小红同样多的糖给小红,这时小红又觉得自己太多了,她拿出与小明剩下的同样多的糖还给小明,这时小红与小明的糖同样多了。你知道开始小红与小明各分得几颗糖？

(2) 某仓库运出 4 批原料,第一批运出占总数一半,第二批占余下的一半,以后每一批都是前一批剩下的一半,第四批运出后,剩下全部分给甲、乙、丙三个工厂,甲厂得 24 吨,乙厂是甲厂的一半,丙厂分到 4 吨,求仓库原有几吨原料？

2. 换一个角度思考问题。

▲ 有一条铁路线，包括起点和终点站共有十一个车站。往返的火车在每一个车站都停靠。往返的车票是不相同的。那么十一个车站一共要准备多少种车票？

我们如从起点站考虑起，则需准备前方十个车站的十种车票。第二个站,则不仅要准备赴前方几个车站的车票,还要准备返回起点站的车票，这样也要准备车票 10种。如此推算出一个个车站所需的车票,再求出总和。但是这样的思考过程很复杂,我们不妨换一个角度思考一下,每一个车站除了自己本车站外,都要准备好开往其他十个车站的车票,没有一个车站例外。这样总的车票种类就是 10×11＝110(种),这不是很简单吗！

做一做(一)：

(1) 有 6 个队参加乒乓球比赛，比赛规则是每一次比赛都要决出胜负，没有平局,6 个队之间采用循环赛，即每两个

队都要比赛一次，然后根据胜得 2 分，负得 0 分的积分多少来决出第一名，问比赛一共要进行多少场？

(2)你能用三个 2 写出一个所能表示的最大的数吗？当然它不会是 222。

▲ 有一种细胞，繁殖速度很快，每分钟繁殖的个数是原来的 1 倍，有这样的细胞 3 个经过 20 分钟后，就达到 3145728 只，问在第 18 分钟后有细胞几个？

如果这样想：开始：3 只；1 分钟后：6 只；2 分钟后 12 只；3 分钟后：24 只……要算到第 18 分钟后是几只将是很繁琐的。我们也不妨换一个角度从后面开始推算。这样想，第 20 分钟后是 3145728 只，那么 19 分钟后应是(3145728÷2)只，18 分钟后应是 3145728÷2÷2，很快可算出应是 786432 只 。

做一做(二)：

(1) 一个钟每天慢十分钟，多少天后分针将指到一个正确的位置？

(2)一种微生物，每小时可增加 1倍的数量。现有一批这样的微生物，10 小时就增长到 100 万个。那么增长到 25 万个时需几小时？

四、循环小数与周期变化

活动目标　了解许多事物的变化都有周期性，掌握事物变化的周期，并能适当运用变化周期解决不少问题。懂得循环小数就是小数部分某一位或某几位上的数字呈周期性变化的小数。会用循环小数小数部分各数位数字变化的周期性，确定任意小数部分某数位上的数字并能计算任意若干位小数数字之和。

大家知道，一个数的小数部分，如果从某一位开始，有一个或几个数字依次不断地重复出现，这个数就叫做循环小数。就是说，循环小数的小数部分从某一位起，它的数字产生周期性的变化。在我们周围许多事物的变化都是有周期性的，在这一章里我们将专门研究周期变化的问题。

1. 周期性变化的事物。

▲　如果时针现在表示的时间是 18 点整，那么分针旋转 1991圈以后是几点钟？

分针在钟面上旋转一圈，时间过去了 1 小时，24 小时是一天，现在 1991÷24＝82……23，余数是 23，离 24 小时相差 1小时，说明这时候的时间是 17 点整。

▲　有红、白、黑球共 1992 只，按先红球 5 只，再白球 4 只，再黑球 2 只，依次重复排列如下：

⊘⊘⊘⊘⊘○○○○●●⊘⊘⊘⊘⊘○○○○●●⊘⊘⊘⊘……

问 1992 只球中红球共多少只？

这些球是按 5 红 4 白 2黑的次序依次重复出现，因此变

化的周期是 $5+4+2=11$。现在 $1992\div11=181\cdots\cdots1$,所以在 1992 只球中红球共有 $5\times181+1=906$(只)。

▲ 下表中,上、下两个对应的字和字母配成一组,例如第一组是(我,A),第四组是(数,D),……

我	们	爱	数	学	我	们	爱	数	学	我	们	爱	数	学	我	们	爱	数	……
A	B	C	D	E	F	G	A	B	C	D	E	F	G	A	B	C	D	E	……

(1) 第 66 组是(____,____)

(2) 如果(学,A)代表 1992 年,那么代表 2000 年的应是(____,____)

第(1)题:表中上一行的汉字是 5 个字作为一个变化周期,$66\div5=13\cdots\cdots1$,所以第 66 组的第一个字是"我"。下一行的字母是 7 个字母作为一个变化周期,$66\div7=9\cdots\cdots3$,所以第 66 组的第三个字母是"C"。因此第 66 组是(我,C)。

第(2)题:连 1992 年在内,到 2000 年前后共 $2000-1992+1=9$(年)。由于 $9\div5=1\cdots\cdots4$,所以第一个字是"爱";又由于 $9\div7=1\cdots\cdots2$,所以第二个字母是"B"。因此代表 2000 年的应该是(爱,B)。

做一做:

(1) 如果某年二月份有 5 个星期六,那么下一年的元旦是星期几?

(2)下图中⊗表示红球,○表示白球,●表示蓝球。第 1992个球是什么颜色?第 1992 个球之前共有多少个红球?

⊗⊗⊗⊗○○○○○○●●●⊗⊗⊗⊗○○○○○○●●●⊗……

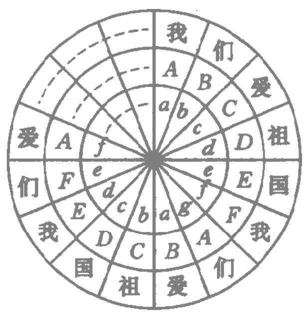
(3)下表中,每列上下两个字和字母组成一组。例如,第一组是(我,A),第九组是(科,B),……

我	们	爱	科	学	我	们	爱	科	学	我	们	爱	科	学	我	们	爱	科	学	我	们	爱
A	B	C	D	E	F	G	A	B	C	D	E	F	G	A	B	C	D	E	F	G	A	B

①写出第 78 组；②如果(科，G)代表 1992 年，2000 年应是怎样的组？

(4)如下图，每个小扇形中三个字和字母组成一组，例如第一组是（我，A，a），第八组是(爱，B，a)。① 写出第 65 组；②如果（爱，D，g）代表 1992 年，那么 2000 年应是怎样的组？

2. 循环小数的周期性变化。



▲ 已知 $3 \div 7 = 0.428571428571\cdots\cdots$

（1）第 1992 位小数是几？(2) 如果数到某一位小数时，这位小数前的小数数字之和是 492，这一位小数是第几位小数？

(1)这是一个纯循环小数，循环节六位，就是这个循环小数的变化周期是 6。$1992 \div 6 = 332$，正好整除，所以第 1992 位小数的数字应是循环节的第六个数字，就是 1。

（2）先计算循环节六个数字的和 $4+2+8+5+7+1=27$，然后 $492 \div 27 = 18\cdots\cdots6$，说明 492 比循环节六个数字和的 18 倍再多 6，而 6 恰是循环节前两个数字 4 与 2 的和，因此 492 是循环小数 $6\times18+2=110$(位)上数字的和。所求的这一位小数应是 $110+1=111$(位)小数。列成综合算式为：

循环节第一位第二位

$$492\div(4+2+8+5+7+1)=18\cdots\cdots6,\ 4+2=6,$$