

# 新版高中数学精编

第一册 下

(高一用)

陶华慧 编

辽海出版社

2000年·沈阳

# 前言

《新版高中精编》是一套配合高中教学，适应高考的改革、高中统编教材及新编教材的要求编写的教学参考丛书。本丛书有助于老师和学生理解和掌握高中教学大纲所规定的教学内容，帮助学生牢固地掌握基础知识、形成和提高基本技能，达到全国教育工作会议明确提出的培养学生能力的要求。同时，编者力图通过《新版高中精编》一书的使用，使师生对教材中的知识熟练掌握并能灵活运用。对教学效果及应用效果作出及时恰当的评估，使平时的教学及高考的复习更有针对性。因此，本套丛书是作为能力型教学丛书提供给广大师生使用。

《新版高中精编》数学分册，是采取与教材的使用及教学同步的方式，高一、高二二年级是一本教材配一本精编，为适应高三年级复习、解决内容多，综合性强的特殊要求，高三以综合训练的方式，分为上、下两册。

《新版高中精编》数学分册是一套知识科学准确，题目新颖实用的丛书。有利于学生思维的训练、灵活地运用知识，有利于对学生能力的培养。本套书采用了对教材内容分步归纳总结，对单元典型题目进行剖析和说明，在此基础上精选了各类题目。同时，为适应和达到不同层次学生的要求，将各类题目分为 A、B 两组，A 组题目为侧重概念理解、基础知识的巩固训练型题目；B 组题目主要侧重于能力的培养，培养学生的应变能力和综合使用知识的能力，从而提高学生分析问题、解决问题的能力。分层次地对学生测试，具有较高的使用性，教师可以根据不同层次学生的程度，补充教材



习题，达到帮助学生掌握知识，提高能力，适应高考的需要；达到因材施教，提高学生素质，使学生得到发展。

《新版高中精编》数学分册由李国凡主编，高文生、兆淳、陶华慧、李天舟、王恩斌、刘宇、邢长艳、王艳、张雅丽、许斌等人编写。

本书编写由于时间较紧，难免有误，望读者斧正。

编 者

2000 年 7 月

# 目录

|                    |       |
|--------------------|-------|
| 前 言 .....          | (1)   |
| 第四章 三角函数 .....     | (1)   |
| 一 任意角的三角函数 .....   | (1)   |
| 二 两角和与差的三角函数 ..... | (41)  |
| 三 三角函数的图象和性质 ..... | (61)  |
| 综合测试题 .....        | (89)  |
| 第五章 平面向量 .....     | (93)  |
| 一 向量及其运算 .....     | (93)  |
| 二 解斜三角形 .....      | (119) |
| 综合测试题 .....        | (127) |
| 答案与提示 .....        | (131) |

## 第四章

## 三角函数

## 一 任意角的三角函数

## 【知识点归纳】

1. 理解任意角、终边相同的角、象限角等概念.

在确定一个角的大小时, 不仅要看它的始边与终边的位置, 而且要看其始边旋转的方向. 按逆时针方向旋转所得的角为正角, 顺时针方向旋转所得的角为负角, 没有任何旋转的角为角.

在直角坐标系中, 角的顶点与坐标原点重合, 角的始边与  $x$  轴的非负半轴重合. 则有相等的角, 终边一定相同; 但终边相同的角不一定相等, 它们相差  $360^\circ$  的整数倍.

$\alpha$  角以及所有与  $\alpha$  角终边相同的角都可以表示为  $k \cdot 360^\circ + \alpha$  ( $k \in \mathbb{Z}$ ), 用集合表示为  $\{\beta \mid \beta = k \cdot 360^\circ + \alpha, k \in \mathbb{Z}\}$  应注意  $k$  是整数,  $\alpha$  是任意角.

任意一个角惟一地确定一条终边, 但是, 任意一条终边位置却可表示无数个角.

角的终边在第几象限, 就说这个角是第几象限的角.

如果角的终边在坐标轴上, 这个角则不属于任何象限.

注意区分下列角的概念及取值范围:

①锐角——  $\{\alpha \mid 0^\circ < \alpha < 90^\circ\}$

②  $0^\circ \sim 90^\circ$  间的角——  $\{\alpha \mid 0^\circ \leq \alpha < 90^\circ\}$

③第一象限的角——  $\{\alpha \mid k \cdot 360^\circ < \alpha < k \cdot 360^\circ + 90^\circ, k \in \mathbb{Z}\}$

④小于  $90^\circ$  的角——  $\{\alpha \mid \alpha < 90^\circ\}$



2. 弧度制是本单元的难点. 圆心角、弧长与半径之间的关系是  $|\alpha| = \frac{l}{r}$ . 当弧长  $l$  等于半径  $r$  时, 圆弧所对的圆心角叫 1 弧度的角. 用符号表示为  $\text{rad}$ , 读作弧度.

根据圆心角定理, 对于任何一个圆心角  $\alpha$ , 所对弧长与半径的比是一个仅与角  $\alpha$  的大小有关的常数. 因此, 弧长等于半径的弧所对的圆心角的大小并不随半径长短的变化而变化.

在弧度制中, 弧度数表示弧长与半径的比值, 是一个实数. 于是在角的集合与实数集  $R$  之间建立了一一对应的关系.

角度制与弧度制间的换算:  $180^\circ = \pi \text{ rad}$

### 3. 任意角的三角函数.

角的概念推广以后, 三角函数的概念也随之发展变化, 由原来的锐角三角函数发展到任意角的三角函数. 由原来的直角三角形相应边的比值为函数值, 转变成点的坐标间或坐标与点到原点的距离间的比值为函数值, 锐角为自变量转变为任意角为自变量.

设  $\alpha$  是一个任意角,  $P(x, y)$  是角  $\alpha$  终边上任意一点, 它与原点的距离是  $|PO| = r = \sqrt{x^2 + y^2}$ , 则由  $x$ 、 $y$ 、 $r$  可得到六个比值:  $\frac{y}{r}$ 、 $\frac{x}{r}$ 、 $\frac{y}{x}$ 、 $\frac{x}{y}$ 、 $\frac{r}{x}$ 、 $\frac{r}{y}$ , 它们均为实数, 这些实数的大小与点  $P(x, y)$  在角  $\alpha$  的终边上的位置无关, 而由角  $\alpha$  的终边位置所决定, 即随角  $\alpha$  而变化. 我们把这六个比值统称为角  $\alpha$  的三角函数, 分别记为:  $\sin \alpha = \frac{y}{r}$ 、 $\cos \alpha = \frac{x}{r}$ 、 $\tan \alpha = \frac{y}{x}$ 、 $\cot \alpha = \frac{x}{y}$ 、 $\sec \alpha =$

$$\frac{r}{x}、\csc \alpha = \frac{r}{y}.$$

要准确、熟练地记住一些特殊角的弧度数及相应的三角函数值及正弦、余弦、正切函数在各象限内的符号和定义域.

如:

| 函数 \ 角 | 0° | 30°                  | 45°                  | 60°                  | 90°             | 120°                 | 180°  | 225°                  | 330°                  |
|--------|----|----------------------|----------------------|----------------------|-----------------|----------------------|-------|-----------------------|-----------------------|
|        | 0  | $\frac{\pi}{6}$      | $\frac{\pi}{4}$      | $\frac{\pi}{3}$      | $\frac{\pi}{2}$ | $\frac{2\pi}{3}$     | $\pi$ | $\frac{5}{4}\pi$      | $\frac{11\pi}{6}$     |
| 正弦     | 0  | $\frac{1}{2}$        | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | 1               | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | 0     | $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $-\frac{1}{2}$        |
| 余弦     | 1  | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{1}{2}$        | 0               | $-\frac{1}{2}$       | -1    | $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$  |
| 正切     | 0  | $\frac{\sqrt{3}}{3}$ | 1                    | $\sqrt{3}$           | 不存在             | $-\sqrt{3}$          | 0     | 1                     | $-\frac{\sqrt{3}}{3}$ |

由定义易知：三角函数在各象限内的符号如图 4-1 所示。

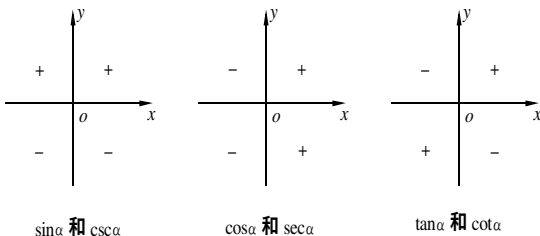


图 4-1

| 三角函数          | 定 义 域                                                                |
|---------------|----------------------------------------------------------------------|
| $\sin \alpha$ | $\mathbf{R}$                                                         |
| $\cos \alpha$ | $\mathbf{R}$                                                         |
| $\tan \alpha$ | $\{\alpha \mid \alpha \neq k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbf{Z}\}$ |

三角函数的一种几何表示：

如果说把角置入直角坐标系，使数形结合有了可能的话，那么，利用单位圆，定义了有向线段，做出了正弦线、余弦线、正切线等则为数形结合奠定了坚实的基础。不仅如此，它为我们进一



步研究三角函数值的大小比较、求三角函数自变量取值范围等问题提供了最好的几何直观性，使解题方法多样化且简捷。

#### 4. 同角三角函数的基本关系式。

由三角函数的定义直接推出的同角三角函数的基本关系

$$\begin{aligned}\sin^2\alpha + \cos^2\alpha &= 1 \\ \tan\alpha &= \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\end{aligned}$$

不仅要熟记，还要掌握它们的变形，如  $\tan\alpha =$

$\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$  可变形为  $\sin\alpha = \tan\alpha \cdot \cos\alpha$ 、 $\cos\alpha = \frac{\sin\alpha}{\tan\alpha}$ ，这将有利于灵活运用。

对于  $\cos\alpha = \pm\sqrt{1-\sin^2\alpha}$ ，“ $\pm$ ”号的选取要由  $\alpha$  所在象限来确定，当  $\alpha$  在第一或第四象限时，取“ $+$ ”，当  $\alpha$  在第二或第三象限时，取“ $-$ ”。对于其它形式的公式就不必考虑符号问题，如  $\alpha$  是第二象限角， $\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$  而不能认为  $\tan\alpha = -\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ ，因为  $\alpha$  是第二象限角， $\sin\alpha$  为正值， $\cos\alpha$  为负值，所以  $\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$  自然为负值，勿需再加“ $-$ ”。

利用同角三角函数关系式可解决如下问题：

①已知某角的一个三角函数值，求该角的一个或几个其它三角函数值。若给出的某角的一个三角函数值是用字母表示的、解题的关键是利用平方关系。在应用平方关系时，常用到平方根、算术平方根和绝对值等概念，要注意灵活掌握这类问题的处理方法，并会进行正确的分类和讨论。

②化简三角函数式。其最终结果应是项数尽可能的少，次数尽可能的低，分母不含有根式，能求值的求值，含有绝对值的要讨论。

③证明三角恒等式。

④解三角方程。

在化简或证明时要注意“1”的运用。



## 5. 正弦、余弦的诱导公式.

课本共给出五组同名三角函数的公式, 利用这五组诱导公式可以把任意角的三角函数化为锐角三角函数, 其一般步骤是:

任意负角的三角函数  $\xrightarrow{-\alpha}$  相应正角的三角函数  $\xrightarrow{k \cdot 360^\circ + \alpha \ (k \in \mathbb{Z})}$   
 $0^\circ \sim 360^\circ$  角的三角函数  $\xrightarrow{180^\circ \pm \alpha \text{ 或 } 360^\circ - \alpha}$  锐角三角函数  $\xrightarrow{\text{查表}}$  三角函数值.

这五组公式分别为:

## 公式一

$$\begin{aligned}\sin(\alpha + k \cdot 360^\circ) &= \sin \alpha \\ \cos(\alpha + k \cdot 360^\circ) &= \cos \alpha \\ \tan(\alpha + k \cdot 360^\circ) &= \tan \alpha \\ \text{其中 } k &\in \mathbb{Z}\end{aligned}$$

## 公式二

$$\begin{aligned}\sin(180^\circ + \alpha) &= -\sin \alpha \\ \cos(180^\circ + \alpha) &= -\cos \alpha\end{aligned}$$

## 公式三

$$\begin{aligned}\sin(-\alpha) &= -\sin \alpha \\ \cos(-\alpha) &= \cos \alpha\end{aligned}$$

## 公式四

$$\begin{aligned}\sin(180^\circ - \alpha) &= \sin \alpha \\ \cos(180^\circ - \alpha) &= -\cos \alpha\end{aligned}$$

## 公式五

$$\begin{aligned}\sin(360^\circ - \alpha) &= -\sin \alpha \\ \cos(360^\circ - \alpha) &= \cos \alpha\end{aligned}$$

诱导公式具有变号、变角的功能, 在解三角的有关问题, 如化简、求值、证明等常使用.

诱导公式  $k \cdot 360^\circ + \alpha \ (k \in \mathbb{Z})$ ,  $-\alpha$ ,  $180^\circ \pm \alpha$ ,  $360^\circ - \alpha$  的三角函数值等于  $\alpha$  的同名三角函数值, 前面加上把  $\alpha$  看做锐角时原函数值的符号, 可简记为“函数名不变, 符号看象限”. 值得注意的是  $\alpha$  可以是任意角, 只不过为了方便视为锐角.

## 【典型题解析】

例 1 在  $-720^\circ \sim 720^\circ$  之间, 写出与  $30^\circ$  角终边相同的角的集合  $A$ .



**分析** 由终边相同的角的集合形式确定整数  $k$  的取值情况后，代入原式求出具体值，再用集合形式表示.

**解** 与  $30^\circ$  角终边相同的角的集合为  $\{\alpha \mid \alpha = k \cdot 360^\circ + 30^\circ, k \in \mathbb{Z}\}$

令  $-720^\circ < k \cdot 360^\circ + 30^\circ < 720^\circ$ ，得  $k = -2, -1, 0, 1$

代入  $\alpha = k \cdot 360^\circ + 30^\circ$  得相应的  $\alpha$  分别为  $-690^\circ, -330^\circ, 30^\circ, 390^\circ$ ，从而  $A = \{-690^\circ, -330^\circ, 30^\circ, 390^\circ\}$

**例 2** 把  $1380^\circ$ 、 $-3090^\circ$  写成  $k \cdot 360^\circ + \alpha$  ( $0^\circ \leq \alpha < 360^\circ, k \in \mathbb{Z}$ ) 的形式.

**分析** 用所给角除以  $360^\circ$ ，将余数作为  $\alpha$ . 若所给角为负值，为保证余数为正角（因题设限定  $0^\circ \leq \alpha < 360^\circ$ ），试商时应使得到的负角的绝对值大于已知负角的绝对值.

**解**  $\because 1380^\circ \div 360^\circ = 3$  余  $300^\circ$

$$\therefore 1380^\circ = 3 \times 360^\circ + 300^\circ$$

$$\because -3090^\circ \div 360^\circ = -9 \text{ 余 } 150^\circ$$

$$\therefore -3090^\circ = -9 \times 360^\circ + 150^\circ$$

**例 3** 已知  $\alpha$  是第三象限的角，试确定①  $\frac{\alpha}{2}$ ，②  $2\alpha$  所在的象限.

**分析** 写出  $\alpha, \frac{\alpha}{2}, 2\alpha$  的一般表达式，再对  $k$  进行讨论.

**解** ①  $\because \alpha$  是第三象限的角

$$\therefore k \cdot 360^\circ + 180^\circ < \alpha < k \cdot 360^\circ + 270^\circ \quad (k \in \mathbb{Z})$$

$$\therefore k \cdot 180^\circ + 90^\circ < \frac{\alpha}{2} < k \cdot 180^\circ + 135^\circ \quad (k \in \mathbb{Z})$$

当  $k$  为偶数时，设  $k = 2n, n \in \mathbb{Z}$  则有

$$n \cdot 360^\circ + 90^\circ < \frac{\alpha}{2} < n \cdot 360^\circ + 135^\circ \quad (n \in \mathbb{Z})$$

$\therefore \frac{\alpha}{2}$  是第二象限的角

当  $k$  为奇数时，设  $k = 2n + 1, n \in \mathbb{Z}$ ，则有

$$n \cdot 360^\circ + 270^\circ < \frac{\alpha}{2} < n \cdot 360^\circ + 315^\circ \quad (n \in \mathbb{Z})$$

$\therefore \frac{\alpha}{2}$  是第四象限的角

$\therefore$  当  $\alpha$  是第三象限的角时,  $\frac{\alpha}{2}$  是第二象限或第四象限的角

$$② 2k \cdot 360^\circ + 360^\circ < 2\alpha < 2k \cdot 360^\circ + 540^\circ, k \in \mathbb{Z}$$

$$(2k+1) \cdot 360^\circ < 2\alpha < (2k+1) \cdot 360^\circ + 180^\circ, k \in \mathbb{Z}$$

$\therefore$  当  $\alpha$  是第三象限角时,  $2\alpha$  是第一象限或第二象限的角或其终边在  $y$  轴的正半轴上

**例 4** 把下列各角化成  $2k\pi + \alpha$  ( $0 \leq \alpha < 2\pi$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ ) 的形式, 并指出它们是第几象限角.

$$(1) -1500^\circ \quad (2) -4 \quad (3) 2000\pi$$

**解** (1)  $-1500^\circ = -1500^\circ \times \frac{\pi}{180^\circ} = -\frac{25}{3}\pi = -10\pi + \frac{5}{3}\pi$  为第四象限角.

(2)  $-4 = -2\pi + (2\pi - 4)$  为第二象限角.

(3)  $2000\pi = 1000 \cdot 2\pi$  终边在  $x$  轴的正半轴上, 它不属于任何象限.

**注** 学完角度制和弧度制后, 在解题时要由题设条件选择相应的角的度量单位, 同一问题中单位制度要统一. 如  $-1500^\circ = -10\pi + 300^\circ$  这种写法就是错误的; 若写成  $-1500^\circ = -1800^\circ + 300^\circ$  在这道题中也同样是错误的, 因它与题设条件化成  $2k\pi + \alpha$  ( $0 \leq \alpha < 2\pi$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ ) 的形式不符, 即不是弧度制.

**例 5** 在半径为  $R$  的圆上有两个动点  $M$ 、 $N$ , 同时从点  $A(R, 0)$  处出发, 沿圆周转动, 动点  $M$  按逆时针方向每秒转  $\frac{\pi}{3}$ , 动点  $N$  按顺时针方向每秒转  $\frac{\pi}{6}$ , 试求它们出发后第五次相遇时的位置及各自走过的弧长.

**分析** 如图 4-2,  $M$ 、 $N$  两点每相遇一次时, 它们走过的弧长的和恰好是一个圆周的长. 因此, 当它们第五次相遇时共走过的



弧长为  $10\pi R$ .

**解** 设  $M$ 、 $N$  两点走过的弧长分别为  $l_1$ 、 $l_2$ ，从出发到第五次相遇用了  $t$  秒钟的时间.

$$\text{则 } l_1 = \frac{\pi}{3} tR$$

$$l_2 = |-\frac{\pi}{6}| tR = \frac{\pi}{6} tR$$

$$\therefore l_1 + l_2 = \frac{\pi}{3} tR + \frac{\pi}{6} tR = 10\pi R$$

$$\therefore t = \frac{10\pi R}{\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{6}\right) R} = 20 \text{ (秒)}$$

$$\therefore l_1 = \frac{20}{3} \pi R, l_2 = \frac{10}{3} \pi R$$

于是， $M$  点转过的角度为  $\frac{20}{3} \pi = 6\pi + \frac{2}{3} \pi$ .

因此， $M$ 、 $N$  两点第五次相遇在第二象限的  $B$  点处. 这时，

$M$ 、 $N$  两点各自走过的弧长分别为  $\frac{20}{3} \pi R$  和  $\frac{10}{3} \pi R$ .

**例 6** 求  $225^\circ$  角的四个三角函数值.

**解** 如图 4-3，在  $225^\circ$  角的终边上取一点  $P(x, y)$ ，设  $OP = r$ ，作  $PM \perp x$  轴于点  $M$ .

显然  $\angle POM = 45^\circ$ ，于是可得

$$x = -\frac{\sqrt{2}}{2} r, y = -\frac{\sqrt{2}}{2} r$$

$$\text{因此 } \sin 225^\circ = \frac{y}{r} = -\frac{\sqrt{2}}{2}, \cos 225^\circ = \frac{x}{r}$$

$$= -\frac{\sqrt{2}}{2}, \tan 225^\circ = \frac{y}{x} = 1, \cot 225^\circ = \frac{x}{y} = 1$$

**注** 对于确定的角  $\alpha$ ，三角函数值的大小只与  $\alpha$  角的终边所在象限的位置有关，而与点  $P$  在其终边上的位置无关. 因而在  $225^\circ$

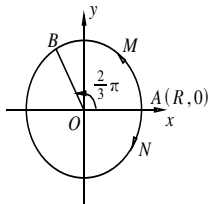


图 4-2

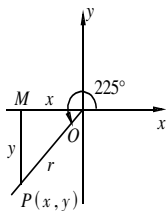


图 4-3

角的终边上取点  $P(-1, -1)$ , 计算出的结果是一样的.

另解  $\because 225^\circ = 180^\circ + 45^\circ$

$$\therefore \sin 225^\circ = \sin(180^\circ + 45^\circ) = -\sin 45^\circ = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

同理  $\cos 225^\circ = -\frac{\sqrt{2}}{2} \quad \tan 225^\circ = 1 \quad \cot 225^\circ = 1$

例 7 已知  $\sin \alpha = -\frac{4}{5}$ , 求  $\alpha$  的其它三角函数值.

分析 角  $\alpha$  的正弦函数值已给出, 可确定出角  $\alpha$  所在的象限, 其它三角函数值的符号也随之确定. 因此, 只需根据任意角的三角函数的定义, 求出  $x$ 、 $y$ 、 $r$  中的另一个量即可. 也可用同角三角函数间的关系求.

解  $x = \pm \sqrt{r^2 - y^2} = \pm \sqrt{9} = \pm 3$ .

$\because \sin \alpha = -\frac{4}{5} < 0 \quad \therefore \alpha$  为第三或第四象限角

当  $\alpha$  是第三象限角时

$$\cos \alpha = -\frac{3}{5}, \tan \alpha = \frac{4}{3}, \cot \alpha = \frac{3}{4}, \sec \alpha = -\frac{5}{3}, \csc \alpha = -\frac{5}{4}$$

当  $\alpha$  是第四象限角时

$$\cos \alpha = \frac{3}{5}, \tan \alpha = -\frac{4}{3}, \cot \alpha = -\frac{3}{4}, \sec \alpha = \frac{5}{3}, \csc \alpha = -\frac{5}{4}$$

另解  $\because \sin \alpha = -\frac{4}{5} < 0, \therefore$  角  $\alpha$  在第三或第四象限

$$\begin{aligned} \text{若角 } \alpha \text{ 在第三象限, 则 } \cos \alpha &= -\sqrt{1 - \sin^2 \alpha} = -\sqrt{1 - \left(-\frac{4}{5}\right)^2} \\ &= -\frac{3}{5} \end{aligned}$$

$$\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{4}{3} \quad \cot \alpha = \frac{1}{\tan \alpha} = \frac{3}{4}$$

$$\sec \alpha = \frac{1}{\cos \alpha} = -\frac{5}{3}, \csc \alpha = \frac{1}{\sin \alpha} = -\frac{5}{4}$$

若角  $\alpha$  在第四象限, 则  $\cos \alpha = \sqrt{1 - \sin^2 \alpha} = \frac{3}{5}$



$$\tan \alpha = -\frac{4}{3}, \cot \alpha = -\frac{3}{4}, \sec \alpha = \frac{5}{3}, \csc \alpha = -\frac{5}{4}$$

**注** 无论用到哪种方法,都用到“勾股数”.如能将下列几组常用的“勾股数”记住,会使解题速度提高许多.即:3, 4, 5; 5, 12, 13; 8, 15, 17; 7, 24, 25; 9, 40, 41 等.

**例 8** 已知角  $\alpha$  的终边经过点  $P(-4a, 3a)$  ( $a \neq 0$ ) 求  $\sin \alpha$ 、 $\cos \alpha$ 、 $\tan \alpha$  的值.

**分析** 根据任意角三角函数定义,应先求出点  $P$  到原点的距离,即  $r = |OP|$ . 由于题设含有参数  $a$ ,要注意对  $a$  进行讨论.

$$\text{解 } r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(-4a)^2 + (3a)^2} = 5|a|$$

$$\because a \neq 0$$

$\therefore$  当  $a > 0$  时,则  $r = 5a$ , 角  $\alpha$  在第二象限

$$\sin \alpha = \frac{y}{r} = \frac{3a}{5a} = \frac{3}{5} \quad \cos \alpha = \frac{x}{r} = \frac{-4a}{5a} = -\frac{4}{5}$$

$$\tan \alpha = \frac{y}{x} = \frac{3a}{-4a} = -\frac{3}{4}$$

当  $a < 0$  时,则  $r = -5a$ , 角  $\alpha$  在第四象限

$$\sin \alpha = -\frac{3}{5}, \cos \alpha = \frac{4}{5}, \tan \alpha = -\frac{3}{4}$$

**例 9** 已知  $\sin \alpha = m$  ( $|m| \leq 1$ ), 求  $\tan \alpha$  的值.

**分析** 由于  $\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$ , 于是要保证  $\cos \alpha \neq 0$ , 而  $\cos \alpha = \pm \sqrt{1 - \sin^2 \alpha}$ , “ $\pm$ ”号的选取要由  $\alpha$  所在象限来确定.

**解** 当  $m = 0$  时,  $\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = 0$

当  $m = \pm 1$  时,  $\cos \alpha = 0$ ,  $\alpha$  角的终边在  $y$  轴上,  $\tan \alpha$  无意义.

当  $|m| < 1$  且  $m \neq 0$  时

若  $\alpha$  在第一或第四象限,  $\cos \alpha > 0$

$$\therefore \cos \alpha = \sqrt{1 - m^2}$$

$$\text{则 } \tan \alpha = \frac{m}{\sqrt{1-m^2}} = \frac{m\sqrt{1-m^2}}{1-m^2}$$

若  $\alpha$  在第二或第三象限,  $\cos \alpha < 0$

$$\therefore \cos \alpha = -\sqrt{1-m^2}$$

$$\text{则 } \tan \alpha = \frac{-m\sqrt{1-m^2}}{1-m^2} = \frac{m\sqrt{1-m^2}}{m^2-1}$$

注 (1) 在对角的范围进行讨论时, 不可遗漏其终边在坐标轴上的情况. 由于角的终边在坐标轴上时, 就本题而言,  $\sin \alpha = 0$  或  $\sin \alpha = \pm 1$ , 即  $m = 0$ ,  $m = \pm 1$ . 于是角的终边的特殊位置的讨论, 就可通过特殊三角函数值来进行.

(2) 在利用平方和关系进行开方运算求三角函数值时, 只要以用根式来表示的三角函数的符号作为分类的标准即可. 如本题中用  $\cos \alpha$  的符号, 而不按  $\sin \alpha$  的符号来分类. 原因见前面知识点归纳, 并慢慢体会.

例 10 化简 (1)  $\sqrt{\sec^2 x - 2\tan x} \left(0 \leq x < \frac{\pi}{2}\right)$  (2)  $\sin^2 \alpha \cdot \tan \alpha$   
 $+ \cos^2 \alpha \cdot \cot \alpha + 2\sin \alpha \cdot \cos \alpha$  (3)  $\frac{1 - \cos^4 \alpha - \sin^4 \alpha}{1 - \cos^6 \alpha - \sin^6 \alpha}$

分析 (1) 将被开方式配成完全平方式, 脱去根号, 进而化简.

(2) 尽可能的化为同类函数再化简, 较常用的是化弦法.

(3) 顺用平方公式“降幂”化简, 或逆用平方公式“升幂”减项(合并或约分)化简.

$$\begin{aligned} \text{解 (1) 原式} &= \sqrt{\tan^2 x + 1 - 2\tan x} \\ &= \sqrt{(\tan x - 1)^2} = |\tan x - 1| \end{aligned}$$

$$\because 0 \leq x < \frac{\pi}{2} \quad \therefore \text{当 } x = 0 \text{ 时, } \tan x = 0$$

$$\text{当 } 0 < x < \frac{\pi}{4} \text{ 时, } 0 < \tan x < 1$$



当  $x = \frac{\pi}{4}$  时,  $\tan x = 1$

当  $\frac{\pi}{4} < x < \frac{\pi}{2}$  时,  $\tan x > 1$

$$\therefore \text{原式} = \begin{cases} 1 & (x = 0) \\ 1 - \tan x & (0 < x < \frac{\pi}{4}) \\ 0 & (x = \frac{\pi}{4}) \\ \tan x - 1 & (\frac{\pi}{4} < x < \frac{\pi}{2}) \end{cases}$$

注  $\sec^2 x = \left(\frac{r}{x}\right)^2 = \frac{x^2 + y^2}{x^2} = 1 + \frac{y^2}{x^2} = 1 + \tan^2 x$

$$\begin{aligned} (2) \text{ 解法一 原式} &= \sin^2 \alpha \cdot \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} + \cos^2 \alpha \cdot \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} + 2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha \\ &= \frac{\sin^4 \alpha + \cos^4 \alpha + 2 \sin^2 \alpha \cdot \cos^2 \alpha}{\sin \alpha \cdot \cos \alpha} \\ &= \frac{(\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha)^2}{\sin \alpha \cdot \cos \alpha} = \sec \alpha \cdot \csc \alpha \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{解法二 原式} &= (\sin^2 \alpha \cdot \tan \alpha + \sin \alpha \cdot \cos \alpha) + (\cos^2 \alpha \cdot \cot \alpha + \sin \alpha \cdot \cos \alpha) \\ &= (\sin^2 \alpha \cdot \tan \alpha + \cos^2 \alpha \cdot \tan \alpha) + (\cos^2 \alpha \cdot \cot \alpha + \sin^2 \alpha \cdot \cot \alpha) \\ &= \tan \alpha (\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha) + \cot \alpha (\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha) \\ &= \tan \alpha + \cot \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} + \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} \\ &= \frac{\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha}{\sin \alpha \cdot \cos \alpha} = \frac{1}{\sin \alpha \cdot \cos \alpha} = \sec \alpha \cdot \csc \alpha \end{aligned}$$

注 解法二用到了  $\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$  的变形.  $\sin \alpha = \cos \alpha \cdot \tan \alpha$ , 且逆用

到解题过程中, 还有一处用了同样的方法. 这也正是在解法二没有解法一思路更自然的前提下介绍给大家的原因. 另外, 有的读者可能做到  $\tan \alpha + \cot \alpha$  就认为是最简式了. 其实不然, 通常情况下最后结果大



多为单项式.

$$\begin{aligned}
 \text{(3) 解法一 原式} &= \frac{1 - (\cos^4 \alpha + \sin^4 \alpha)}{1 - (\cos^6 \alpha + \sin^6 \alpha)} \\
 &= \frac{1 - [(\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha)^2 - 2\sin^2 \alpha \cdot \cos^2 \alpha]}{1 - (\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha)(\cos^4 \alpha - \cos^2 \alpha \sin^2 \alpha + \sin^4 \alpha)} \\
 &= \frac{1 - 1 + 2\sin^2 \alpha \cos^2 \alpha}{1 - [(\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha)^2 - 3\cos^2 \alpha \cdot \sin^2 \alpha]} \\
 &= \frac{2\sin^2 \alpha \cdot \cos^2 \alpha}{3\cos^2 \alpha \cdot \sin^2 \alpha} = \frac{2}{3}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{解法二 原式} &= \frac{(1 - \cos^2 \alpha)(1 + \cos^2 \alpha) - \sin^4 \alpha}{(1 - \cos^2 \alpha)(1 + \cos^2 \alpha + \cos^4 \alpha) - \sin^6 \alpha} \\
 &= \frac{\sin^2 \alpha (1 + \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha)}{\sin^2 \alpha (1 + \cos^2 \alpha + \cos^4 \alpha - \sin^4 \alpha)} \\
 &= \frac{2\cos^2 \alpha}{1 + \cos^2 \alpha + (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha)(\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha)} \\
 &= \frac{2\cos^2 \alpha}{1 + \cos^2 \alpha + \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha} = \frac{2\cos^2 \alpha}{3\cos^2 \alpha} = \frac{2}{3}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{解法三 原式} &= \frac{(\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha)^2 - \cos^4 \alpha - \sin^4 \alpha}{(\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha)^3 - \cos^6 \alpha - \sin^6 \alpha} \\
 &= \frac{2\cos^2 \alpha \cdot \sin^2 \alpha}{3\cos^4 \alpha \cdot \sin^2 \alpha + 3\cos^2 \alpha \cdot \sin^4 \alpha} \\
 &= \frac{2\cos^2 \alpha \cdot \sin^2 \alpha}{3\cos^2 \alpha \cdot \sin^2 \alpha (\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha)} = \frac{2}{3}
 \end{aligned}$$

注 解法三巧妙地将 1 用  $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha$  代替, 形式上看是化“繁”了, 因它既增了项, 又升了幂, 但一经合并同类项后, 化简的效果则十分显著. 这既可称之为公式  $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$  的逆用, 也可称之为“1”的三角代换. 这种方法在三角函数式的化简和等式的证明中有着广泛的应用, 要学会灵活运用.

$$\begin{aligned}
 \text{例 11 求证} \quad (1) \tan \alpha \cdot \frac{1 - \sin \alpha}{1 + \cos \alpha} &= \cot \alpha \cdot \frac{1 - \cos \alpha}{1 + \sin \alpha} \quad (2) \frac{1 + \csc \alpha + \cot \alpha}{1 + \csc \alpha - \cot \alpha} \\
 &= \csc \alpha + \cot \alpha \quad (3) \frac{\cos \alpha}{1 + \sin \alpha} - \frac{\sin \alpha}{1 + \cos \alpha} = \frac{2(\cos \alpha - \sin \alpha)}{1 + \sin \alpha + \cos \alpha}
 \end{aligned}$$

分析 证明三角恒等式的原则是由繁到简, 常用的方法有: ①