与整数有关的问题

任何一种东西之所以被认识，是由于它包含着一种数；没有这种数，心灵什么东西也不能思考，什么东西也不能认识。



如果认为对数的认知，仅仅是由于记数和计算的需要，那就错了。原始数论就出自于人类对希望的祈求和对恐惧的回避。

需要全本请访问 www.ertongbook.com

助读指南

- 关于记数法的问答
  数字符号和记数法是构成自然数大家庭的两个要素。
- 关于两位数的研究
  充分地认识两位数是了解数的基础。因为两位数是包括自然数两要素最简单的数。
- 从一个排队问题想到对三位数的一种分类
  认识的过程是发现和整理的过程。分类就是整理的一种方法。
- 约数的个数
  认识一个对象的最好办法是认识与之相关的其他对象。
- 图形填数问题的研究
  追求美是人的本性，数与形的结合蕴含着美。
- 图形填数问题的再研究
  任何问题的研究都不会戛然而止。

关于记数法的问答

先请同学们回答下面两个问题：

(1)四位数 1995 表示什么意思？

(答：四位数 1995 表示 1000 个 1、100 个 9、10 个 9 和 1 个 5 的和。也就是 $1995=1\times1000+9\times100+9\times10+5\times1$。)

(2)如果用字母表示每一位上的数字，例如四位数 $abcd$ 表示什么意思？

(答：$abcd=1000a+100b+10c+d$。)

下面我们通过一些问题来学习如何利用记数法解决问题。

有一个三位数，减去它的各位数字之和，其差还是一个三位数 $\overline{46x}$，求字母 x 表示哪一个数字？

如果设这个三位数为 abc，那么这个三位数可以写成怎样的表达式？

(答：$abc=100a+10b+c$。)

再请同学们想一想，什么叫这个三位数的各位数字之和？应该怎样表示？

(答：这个三位数的各位数字之和为 $a+b+c$。)

回答了以上问题，根据已知条件就可以列出一个含有

a、b、c 和 x 的等式，请大家想一想怎样列？

（答：$100a+10b+c-(a+b+c)=46x$。）

像这样含有多个未知数的等式，叫做不定方程，不定方程的解法有很多，通常都要具体问题具体分析。下面来看应该怎样求 x 的值。先把上面等式变化一种形式：

$$99a+9b=459+(1+x)$$

观察一下，其中的 $99a$、$9b$ 和 459 这三个数有什么共同的特点？

（答：$99a$、$9b$、459 这三个数都是 9 的倍数。）

这时 $1+x$ 应该满足什么条件？

（答：$1+x$ 也必须是 9 的倍数。）

现在你能看出 x 等于几了吗？

（答：由于 x 是从 0 至 9 的一个整数，因此要使 $1+x$ 是 9 的倍数，x 只能是 8。）

这道题到这儿就解完了。我们再来回顾一下，在解决问题的过程中，两次利用了记数法的表达式，一次是将设出的三位数 abc 写为 $100a+10b+c$，另一次是将三位数 $46x$ 表示为 $460+x$。要注意使用记数法的表达式通常都是将字母分离出来。

一个两位数，个位与十位上的数字之和为 8，如果把这个两位数的十位与个位数字对调，得到的新两位数比原两位数大 18。求原两位数。

如果设这个两位数为 ab，那么它可以写为怎样的形式？

（答：可以写为 $\overline{ab}=10a+b$。）

把这个两位数的十位数字与个位数字对调之后所得到

的两位数可以写为怎样的形式？

（答：$ba=10b+a$。）

这个两位数的十位数字与个位数字之和为 8 应该怎样表示？

（答：$a+b=8$。）

现在请同学们想一想这道题可以怎样解答？

如果设这个两位数为 ab，则有下列等式成立：

$$\begin{cases}10b+a-(10a+b)=18\\a+b=8\end{cases}$$

化简可得：

$$\begin{cases}b-a=2\\b+a=8\end{cases}$$

根据和差问题的求解公式得：

$$\begin{aligned}b&=(2+8)\div 2\\&=5\\a&=(8-2)\div 2\\&=3\end{aligned}$$

答：原两位数为 35。

一个三位数的各位数字之和是 20，其中十位数字比个位数字大 1，如果把这个三位数的个位数字与百位数字对调位置，则得到一个新的三位数，这个新三位数比原三位数大 198。求原来的三位数是多少？

与前面一样，设原三位数为 abc，则有：

$$\overline{abc}=100a+10b+c$$

需要全本请访问 www.ertongbook.com

用与前面类似的方法就可以解出 a,b,c。

设原三位数为 abc，则有：

$$100c+10b+a-(100a+10b+c)=198$$

也就是：$99c-99a=198$

约去 99 得：$c-a=2$

同时还有：$a+b+c=20$

$$b-c=1$$

由这三个等式可以得到：

$$a+(a+3)+(a+2)=20$$

$$3a+5=20$$

$$a=5$$

$$c=7$$

$$b=8$$

所以，原三位数为 587.

有一个人是在某年 1 月 1 日出生的，他在 1997 年的年龄恰好是他出生年份数的各位数字之和。求：这个人在 1997 年时的年龄是多少岁。

先请同学们想一想，要想求出这个人在 1997 年的年龄，关键是求出哪一个数量？

（答：关键是求出这个人的出生年份数。）

如果设这个人的出生年份数为 $1abc$，根据已知条件我们可以列出怎样的等式？

（答：$1997-(1000+100a+10b+c)=1+a+b+c$。）

下面，请同学们自己解答。以下的解答供参考。

设这个人的出生年份数为 $1abc$，则有：

$$1997-(1000+100a+10b+c)=1+a+b+c$$

化简可得：$101a+11b+2c=996$

试验这个不定方程的解发现 $a=9$，这时：

$$11b+2c=996-909$$

即 $11b+2c=87$

再对 b 进行试验，发现 $b=7$，这时：

$$2c=87-77$$

$$2c=10$$

$$c=5$$

因此，这个人的出生年份数为 1975 年，从而，他在 1997 年的年龄为：

$$1997-1975=22\ (岁)$$

所以，这个人 1997 年时的年龄为 22 岁

这道题所用的方法是数学中常用的，当我们所研究的对象有多种可能性，一时不能确定它的答案时，就可以一一进行试验。例如在前面求 a 的值时，a 可能是 0 至 9 的整数之一，通过试验发现 a 的取值只能是 9。这种方法看起来有点儿“笨”，可是它在日常生活和科学研究中，经常用到

练 习

1. 一个两位数，各位数字之和的 5 倍比原数大 4，求这个两位数

2. 有一个两位数，如果把数字 1 加在它的前面，可以得到一个三位数，加在它的后面也得到一个三位数，这两个三位数之差为 414。求：原来的两位数是多少？

3. 一个三位数的各位数字之和是 12，其中百位数字与个位数字

之和等于十位数字。如果把这个三位数的个位数字放到百位数字之前，得到一个新的三位数，已知新的三位数比原三位数大 351。求：原来的三位数是多少。

4. 有一个两位数，如果把数字 3 加在它的前面可以得到一个三位数，加在它的后面也可以得到一个三位数，在它的前后各加一个 3. 可以得到一个四位数，这两个三位数和一个四位数之和等于 3600。求原两位数

5. 某人在 2000 年的年龄恰好是他出生年份数的各位数字之和，求这个人 2000 年时的年龄。（假定这个人是在 1 月 1 日出生的）



关于两位数的研究

人类思维的创造性体现在对“未知”的探索，而这种探索的开端就是“提问题”，有了问题，探索就有了目标。在此，我们提出一个口号：想知道什么就问什么。为了说明这种想法，让我们从“关于两位数，我想知道什么”开始，尽可能多地提出与两位数有关的问题。比如我们可以提出如下问题：

1. 一共有多少个两位数？所有两位数的和是多少？
2. 两位数中有多少个奇数？它们的和是多少？
3. 两位数中有多少个偶数？它们的和是多少？
4. 两位数中有多少个完全平方数？它们的和是多少？
5. 两位数中有多少个质数？它们的和是多少？
6. 哪些两位数不能表示为连续自然数之和的形式？能表示为连续自然数之和的两位数，应该怎样表示？
7. 约数个数最多的两位数有多少个约数？并求出这些两位数。
8. 两位数的约数个数一共有多少种可能性？把约数个数相同的两位数算作一组，哪一组中的两位数最多？
9. 两位数中十位数字大于个位数字的有多少个？小于个位数字的有多少个？等于个位数字的有多少个？
10. 两位数中从 0 至 9 的每个数字分别出现了多少次？

一气儿提出了 10 个问题，同学们一定还能提出更多更好的问题，那就尽管提吧，别忘了，想知道什么，就问什

需要全本请访问 www.ertongbook.com

么。问题提出来了，还要想方设法去解决它。 上面的问题你都能解决吗，抽时间试试吧。

下面还要提出一个复杂一些的问题。

用一个两位数做分母，用同一个两位数的两位数字之和做分子，可以得到90个分数，对这90个分数我们可以提出如下问题：

(1)求出这些分数的最大者和最小者。

(2)这些分数约分后一共可以形成多少个不同的分数值。

(3)这些分数有多少个大于0.5？有多少个小于0.5？

(4)这些分数约分后有多少个是单位分数？

为了研究的方便，我们用字母 a 表示两位数的十位数字，用字母 b 表示个位数字，这个两位数就是 $10a+b$，题目中所说的分数可以写为：

$$\frac{a+b}{10a+b}$$

为了对这个式子进行简化，我们可以研究它的倒数：

$$\frac{10a+b}{a+b}$$

对这个式子变形如下：

$$\frac{10a+b}{a+b}=1+\frac{9a}{a+b}=\frac{9}{1+\frac{b}{a}}$$

由此可见，分数 $\frac{10a+b}{a+b}$ 的值由 $\frac{b}{a}$ 确定。现在我们就可以逐个解决上面四个问题了.

(1)为了使原分数 $\frac{a+b}{10a+b}$ 最小，就要求它的倒数 $\frac{10a+b}{a+b}$ 最大，也就是 $\frac{b}{a}$ 最小，所以 $b=0$ 对应的原两位数分别是：10，20，30，40，50，60，70，80，90

为了使原分数 $\frac{a+b}{10a+b}$ 最大，就要求它的倒数 $\frac{10a+b}{a+b}$ 最小，也就是 $\frac{b}{a}$ 最大。所以 $b=9$，$a=1$，对应的原两位数是 19。

(2)要想求出原分数约分后共有多少种不同的值，只要研究 $\frac{b}{a}$ 约分后共有多少种不同的值。需要注意的是 a 可以取从 1 至 9 的 9 个数字，b 可以取从 0 至 9 的 10 个数字。我们分四种情况讨论：

①$b=0$，这时 $\frac{b}{a}=0$，原分数值为 $\frac{1}{10}$；

②$a=b$，这时 $\frac{b}{a}=1$，原分数值为 $\frac{2}{11}$；

③$a>b$，这时 $\frac{b}{a}$ 约分后不同的取值可以等于：

$\frac{1}{2}$，$\frac{1}{3}$，$\frac{2}{3}$，$\frac{1}{4}$，$\frac{3}{4}$，$\frac{1}{5}$，$\frac{2}{5}$，$\frac{3}{5}$，$\frac{4}{5}$，$\frac{1}{6}$，$\frac{5}{6}$，$\frac{1}{7}$，$\frac{2}{7}$，$\frac{3}{7}$，$\frac{4}{7}$，$\frac{5}{7}$，$\frac{6}{7}$，$\frac{1}{8}$，$\frac{3}{8}$，$\frac{5}{8}$，$\frac{7}{8}$，$\frac{1}{9}$，$\frac{2}{9}$，$\frac{4}{9}$，$\frac{5}{9}$，$\frac{7}{9}$，$\frac{8}{9}$。

一共有 27 个。

④ $a<b$ 这的 $\frac{b}{a}$ 约分后小同的分数值是上面每一个分数值的倒数，所以也是 27 个。

综合以上四种情况，本题答案为：

$1+1+27+27=56$（个）

（3）我们从研究原分数值 $\frac{a+b}{9a+b}$ 大于 0.5 入手，实际上就是它的倒数 $\frac{9a+b}{a+b}$ 小于 2，也就是 $\frac{9a}{a+b}=\frac{9}{1+\frac{b}{a}}$ 必须小于 1。为此，只有 $a=1$，$b=9$，因此使得原分数大于 0.5 的分数值只有 $\frac{10}{19}$，对应的两位数只有 19。

我们同样可以分析出使得原分数等于 0.5 的两位数只有 18，因此使得原分数小于 0.5 的不同分数值一共有：

$56-2=54$（个）

对应的两位数个数为：$90-2=88$（个）

（4）要使得原分数约分后是单位分数，实际上就是要求 $\frac{9a}{a+b}=\frac{9}{1+\frac{b}{a}}$ 是整数。这时可以有两个思路分析：

①从前面已经获得的结论可以知道，所有分数都不小于 $\frac{1}{10}$，所有约分后成为单位分数的分数都不大于 $\frac{1}{2}$，因此就可以在从 $\frac{1}{10}$ 到 $\frac{1}{2}$ 的 9 个单位分数的基础上，分子与分母扩大相同的倍数，进而找到满足条件的 23 个分数。

②从上面的式子可以知道，$9a$ 是 $a+b$ 的倍数，然后分成 b 等于 0 和 b 不等于 0 两种情况讨论，也可以得出结论。

上面两种思路的具体分析过程留给同学们自己完成。

上面四个问题的解决依赖于对原分数表达式的转化。“转化”也许是解决问题最重要的方法之一。

这个问题解决了，我们还应该思考，在这个问题的启发下，还可以提出哪些类似的问题或者推广的问题？比如：

1)将前面关十两位数的问题推广到三位数应该怎样叙述？在三位数的情况下每个问题应该怎样解决？

2)用每个两位数做分母，用同一个两位数的两个数字之积做分子，形成 90 个分数，对这 90 个分数可以提出哪些问题，每个问题怎样解决？

有些问题提出来后，可能暂时解决不了或没有时间解决，这没有关系，先把它记在笔记本上，留待以后慢慢思考。



从一个排队问题想到对三位数的一种分类

有三名同学，身高互不相同，站成一排时可以有各种各样的站法：从高到低、从低到高、中间比两边高、中间比两边低。受此启发，我们可以按各位数字的大小将全体三位数进行分类。从而产生了如下五个问题。

1. 各位数字互不相同的三位数一共有多少个？

2. 百位数字大于十位数字，同时十位数字大于个位数字的三位数共有多少个？

3. 百位数字小于十位数字，同时十位数字小于个位数字的三位数共有多少个？

4. 十位数字同时小于百位数字和个位数字的三位数共有多少个？

5. 十位数字同时大于百位数字和个位数字的三位数共有多少个？

显然问题 1 的答案应该是后面四个问题答案的总和。下面我们就来逐个解决上面的问题。

问题 1 的解答

不满足各位数字互不相同的三位数可以有如下四类：

1. 十位数字与个位数字相同但与百位数字不同。

2. 十位数字与百位数字相同但与个位数字不同。

3. 百位数字与个位数字相同但与十位数字不同。

4. 百位、十位、个位数字都相同。

其中前三类的每一类中三位数的个数都是 81 个，第四类中三位数的个数为 9 个所以不满足各位数字互不相同的三位数一共有：

$$81\times3+9=252\text{（个）}$$

又由于一共有 900 个三位数，所以三位数中各位数字互不相同的一共有：

$$900-252=648\text{（个）}$$

其实问题 1 还可以利用“乘法原理”来解决，由于三个数位上的数字取值依次分别为 9、9、8 种，所以利用乘法原理得到问题 1 的答案为：

$$9\times9\times8=648\text{（个）}$$

问题 2 的解答

如果百位数字取 9，十位数字依次可以取 8、7、6、5、4、3、2、1。2当十位数字取 8 时，个位数字可以取 0～7 共 8 个值；当十位数字取 7 时，个位数字可以取 0～6共 7 个值当十位数字取 6 时，个位数字可以取 0～5 共 6个值；依次类推，不难发现百位数字等于 9 时，百位数字大于十位数字的同时十位数字大于个位数字的三位数共有：

$$8+7+6+5+4+3+2+1$$
$$=36\text{（个）}$$

同样方法可以求出当百位数字等于 8 时，百位数字大于十位数字，同时十位数字大于个位数字的三位数共有：

$$7+6+5+4+3+2+1$$
$$=28\text{（个）}$$

继续同样的过程，很快可以得到问题 2 的答案为：

$$36+28+21+15+10+6+3+1$$
$$=120(个)$$

问题 2 还有一种简捷的解法，利用乘法原理知道三个互不相同的数字排一排，一共有（$10\times9\times8=$）720 种排法，而固定三个数字时可以有 6 种排法，比如固定 0、1、2 三个数字，6 种排法分别为：012,021,102,120,201,210 。这六种排法中只有一种排法符合问题 2 的条件，即百位数字大于十位数字的同时十位数字大于个位数字，因此问题 2 的答案就是：

$$720\div6=120$$（个）

问题 3 的解答

本题与问题 2 的区别在于百位数字不允许为 0,仿照问题 2 的第一种解法不难求出本题答案为：

$$(7+6+5+4+3+2+1)+(6+5+4+3+2+1)+(5+4+3+2+1)+(4+3+2+1)+(3+2+1)+(2+1)+1$$
$$=84(个)$$

还可以仿照问题 2 的第二种解法，因为这时用不到数字 0,所以仅用非 0 数字能够形成的各位数字互不相同的三位数总数为（$9\times8\times7=$）504（个）。而固定三个数字形成的三位数共有 6 个,这 6 个三位数中符合百位数字小于十位数字同时十位数字小于个位数字的只有 1 个，所以问题 3 的答案为：

$$504\div6=84$$（个）

问题 4 的解答

由于要求十位数字最小并且各位数字互不相同，所以十位数字只能取 0～7 共 8 个数字。当十位数字取 0 时，百位与

个位依次可以取 9 个和 8 个数字，因此满足要求的三位数的个数为(9×8＝)72 个；当十位数字取 1 时，百位与个位依次可以取 8 个和 7 个数字，因此满足要求的三位数的个数为（8×7＝)72 个；继续同样的过程就可以得到问题 4 的答案为：

9×8＋8×7＋7×6＋6×5＋5×4＋4×3＋3×2＋2×1

＝240（个）

本题也可以仿照问题 2 的第二种解法来解决，因为用三个互不相同的数字排一排共有 720 种，而固定三个数字的 6 种排法中，有 2 种排法符合本题条件，比如对 0、1、2 三个数字来说，6 种排法分别为：012，021，102，120，201，210，其中只有 102 和 201 符合本题条件。因此本题答案为：

720÷6×2＝240（个）

问题 5 的解答

这时要求十位数字最大并且各位数字互不相同，所以十位数字只能取 2～9 这 8 个数字。由于百位数字不能取数字 0，所以不难分析出本题的答案为：

8×8＋7×7＋6×6＋5×5＋4×4＋3×3＋2×2＋1×1

＝204（个）

本题如果仿照问题 2 的第二种解法，可能要遇到麻烦，原因是百位数字不允许为 0，而个位数字可以是 0，读者可以自行思考是否有办法解决这个问题。

现在我们已经把 5 个问题全部解决了，也就完成了将全体三位数按数字大小的一种分类。下面的表格使得这种分类一目了然。

需要全本请访问 www.ertongbook.com