

小学数学奥赛经典教程

五年级

上册

一、速算与巧算

知识要点

四则混合运算是数学知识的重要内容之一，正确、迅速、灵活、合理地进行运算，是小学生必须掌握的技能、技巧。

运算定律和运算性质：

1. 加法运算定律

加法交换律 两个数相加，交换两个加数的位置，它们的和不变。即：

$$a + b = b + a$$

加法结合律 三个数相加，先把前面两个数相加，再加第三个数，或者先把后面两个数相加，再和第一个数相加，它们的和不变。即：

$$(a + b) + c = a + (b + c)$$

2. 乘法运算定律

乘法交换律：两个因数相乘，交换因数的位置，它们的积不变。即：

$$a \times b = b \times a$$

乘法结合律 三个数相乘，先把前面两个因数相乘，再乘以第三个数，或者先把后两个数相乘，再与第一个数相乘，它们的积不变。即：

$$(a \times b) \times c = a \times (b \times c)$$

乘法分配律 两个数的和与一个数相乘，可以把两个加数分别与这个数相乘，再把两个积相加。即：

$$a \times (b + c) = ab + ac$$

3. 减法运算性质

一个数减去几个数的和，可以从这个数里依次减去和里的每个加数。即：

$$a - (b + c) = a - b - c$$

4. 除法运算性质

被除数和除数同时扩大或者同时缩小相同的倍数，商不变。

5. 添去括号原则

在有括号的乘、除法混合运算中，如果括号前面是乘号，去掉括号结果不变；如果括号前是除号，去掉括号后，应把原括号内的乘号变为除号，除号变为乘号，结果才不变。即：

$$a \times (b \div c \times d) = a \times b \div c \times d ;$$

$$a \div (b \times c \div d) = a \div b \div c \times d$$

典型例题

例 1 $328 \times 999 + 328$

分析 因为 328 能写成 328×1 的形式，而 1 与 999 正好能凑成 1000，所以我们可以利用乘法分配律进行计算。

$$\begin{aligned} \text{解：} & 328 \times 999 + 328 \\ & = 328 \times 999 + 328 \times 1 \\ & = 328 \times (999 + 1) \\ & = 328 \times 1000 \\ & = 328000 \end{aligned}$$

例 2 $50.2 - 15.78 - 4.22 + 9.8$

分析 题中 50.2 与 9.8 的和正好是 60，减 15.78 再减 4.22 可以根据减法的性质，减去 15.78 与 4.22 的和。

$$\begin{aligned} \text{解：} & 50.2 - 15.78 - 4.22 + 9.8 \\ & = (50.2 + 9.8) - (15.78 + 4.22) \\ & = 60 - 20 \\ & = 40 \end{aligned}$$

例 3 $0.9 + 9.9 + 99.9 + 999.9 + 0.5$

分析 为了计算简便，可以把 0.9、9.9、99.9、999.9 分别换成 1、10、100、1000，因为四个数都加了 0.1，和便要增加 0.4，可以把最后结果减去 0.4 就可以了。

$$\begin{aligned} \text{解法一：} & 0.9 + 9.9 + 99.9 + 999.9 + 0.5 \\ & = 1 + 10 + 100 + 1000 + 0.5 - 0.4 \\ & = 1111 + 0.1 \\ & = 1111.1 \end{aligned}$$

也可以这样思考，把 0.5 分解成 $0.1 + 0.1 + 0.1 + 0.1 + 0.1$ ，然后利用加法交换律和结合律进行计算。

$$\begin{aligned}
 \text{解法二：} & 0.9+9.9+99.9+999.9+0.5 \\
 & =0.9+9.9+99.9+999.9+0.1+0.1+0.1+0.1+0.1 \\
 & =(0.9+0.1)+(9.9+0.1)+(99.9+0.1)+(999.9+0.1)+0.1 \\
 & =1+10+100+1000+0.1 \\
 & =1111.1
 \end{aligned}$$

$$\text{例 4 } 24.8 \times 680 - 17 \times 248 + 2480 \times 4.9$$

分析：根据积的变化规律， 24.8×680 可以写为 248×68 ， 2480×4.9 可以写成 248×49 这样改写后 每个算式中都有相同的因数 248 根据乘法分配律进行简算。

$$\begin{aligned}
 \text{解：} & 24.8 \times 680 - 17 \times 248 + 2480 \times 4.9 \\
 & = 248 \times 68 - 17 \times 248 + 248 \times 49 \\
 & = 248 \times (68 - 17 + 49) \\
 & = 248 \times 100 \\
 & = 24800
 \end{aligned}$$

$$\text{例 5 } 246 \times (6.24 \div 69.3) \div (3.12 \div 23.1)$$

分析 这道题如果按照运算顺序计算很麻烦 而且除不尽 但是我们可以利用去括号和添括号的原则 将算式变型后 算出结果。

$$\begin{aligned}
 \text{解：} & 246 \times (6.24 \div 69.3) \div (3.12 \div 23.1) \\
 & = 246 \times 6.24 \div 69.3 \div 3.12 \times 23.1 \\
 & = 246 \times (6.24 \div 3.12) \div (69.3 \div 23.1) \\
 & = 246 \times 2 \div 3 \\
 & = 164
 \end{aligned}$$

我真棒

- $4.32 \times 81 - 0.32 \times 81$
- $27.16 - (5.8 - 2.84) - 4.2$
- $9.8 + 99.8 + 999.8 + 9999.8 + 10$
- $4.2 \div (2.1 \div 1.5)$
- $48.3 \times 17.93 - 8.93 \times 48.3 + 48.3$
- $6.25 \times 0.16 + 264 \times 0.0625 + 5.2 \times 6.25 + 0.625 \times 20$
- $2.5 \times 7.2 \div (0.9 \div 4)$
- $3.04 \times 31.2 \div 1.98 \div 31.2 \times 1.98 \div 3.04$

基础训练

- $12.56 + 3.48 + 7.44 + 6.25$

2. $72.3 - 11.57 - 18.43 + 7.7$
3. $26.13 - (7.3 - 3.87) - 2.7$
4. $64 \times 0.5 \times 0.25 \times 0.125$
5. $5.4 \div (1.8 \div 1.3)$
6. $10.5 \times (1.6 \div 1.5)$
7. $1.23 \times 45.6 \times 0.789 \div 4.56 \div 7.89 \div 0.123$
8. $16 - 1.8 \div 1.08 - 1.008 - 1.0008 - 1.00008$
9. $8 + 16 + 24 + 32 + 40 + \cdots + 280 + 288$
10. $2.48 \times 0.2 + (1 - 0.8) + 1.52 \times 0.2$

能力提高

1. $210 \div 0.9 + 220 \div 0.9 + 230 \div 0.9 + 240 \div 0.9$
2. $0.6 + 11 \times 0.6 + 111 \times 0.6 + 1111 \times 0.6$
3. $0.9999 \times 0.08 + 0.1111 \times 0.28$
4. $12.21 \times 14 \div 3.7 \div 3.5$
5. $1997 \times 19961996 - 1996 \times 19971997$
6. $9.75 + 99.75 + 999.75 + 9999.75 + 1$
7. $9999 \times 2222 + 3333 \times 3334$
8. $\underbrace{0.625 \times 0.625 \times 0.625 \times \cdots \times 0.625}_{10 \text{ 个 } 0.625} \times \underbrace{8 \times 8 \times 8 \times 8 \times \cdots \times 8}_{11 \text{ 个 } 8} \times \underbrace{2 \times 2 \times 2 \times 2 \times \cdots \times 2}_{12 \text{ 个 } 2}$
9. $0.268 \times (48.2 + 20.7 + 51.8 + 4.3) \times 8.88 \div 268$

二、巧数图形

知识要点

1. 日常生活和生产实践中,经常要统计测定事物的多少,这就是计数问题。数一数形体的个数,要求不重复、不遗漏、有条理、有次序地数。计数常用的方法有逐个计数法、分类计数法、直接计数法和间接计数法等。

2. 本讲所包含的主要有线段、角、三角形、长方形、正方形的计数方法。

3. 规律

线段 如果一条线段有几条基本线段,那么线段的总条数为 $n + (n-1) + (n-2) + \dots + 3 + 2 + 1$ 可根据等差数列的求和式简单记作: $(n+1)n \div 2$ 。

角 数角的方法与数线段的方法相同,先找出基本角的个数。

长方形:分别数出长边和宽边的线段的条数,然后把长边和宽边的线段的条数相乘,就得到长方形的个数。

正方形 如果长方形中长被分为 m 等份,宽被分为 n 等份(长和宽上的分份都相等)这个长方形中正方形的总数为 $m \times n + (n-1)(m-1) + (m-2)(n-2) + \dots + (m-n+1) \times 1 (m > n)$ 。

典型例题

例 1 下图中有多少线段?



解法一 第一种数法 可以一个点为起点,数出以这个点为端点的线段有哪些。

(1) 以 A 点为左端点的线段有: AB、AC、AD、AE、AF 共五条。

(2) 以 B 点为左端点的线段有: BC、BD、BE、BF 共四条。

(3) 以 C 点为左端点的线段有: CD、CE、CF 共三条。

(4) 以 D 点为左端点的线段有: DE、DF 共两条。

(5) 以 E 点为左端点的线段有: EF 共一条。

图中共有线段 $5+4+3+2+1=15$ (条)

解法二 把 AB、BC、CD、DE、EF 称为基本线段。

(1) 由一段基本线段组成的有 AB、BC、CD、DE、EF 共五条。

(2) 由两条基本线段组成的有 AC、BD、CE、EF 共四条。

(3) 由三条基本线段组成的有 AD、BE、CF 共三条。

(4) 由四条基本线段组成的有 AF、BF 共两条。

(5) 由五条基本线段组成的有 AF 共一条。

共有 $5+4+3+2+1=15$ (条)

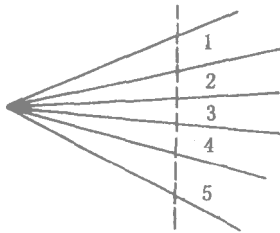
以上两种解法的列式一样，各式数字所表示的意思是什么？请你回答。

总结规律：

(1) 先要知道直线上有多少个点，如果有 6 个点就有 5 条基本线段，有 10 个点就有 $(10-1)=9$ 条基本线段，有几个点就有 $(n-1)$ 条基本线段。

(2) 有 n 条基本线段就有 $1+2+3+\dots+(n-1)+n$ 条线段，根据等差数列的求和公式记作 $(n+1)n\div 2$ ，这种方法叫做端点数法。

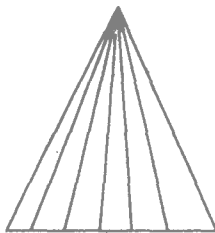
例 2 数出下列图中角的个数



分析：数角的个数与数线段的方法相同，先数出有多少个基本角，本题有 5 个基本角，所以角的个数解法如下：

$$\begin{aligned} \text{解：} & 5+4+3+2+1 \\ & = (5+1)\times 5\div 2 \\ & = 15(\text{个}) \end{aligned}$$

例 3 数出下图中三角形的个数。



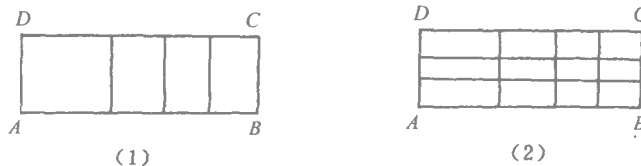
解法一 与数角的方法相同，先数出有多少个基本三角形，然后求三角形的总个数。

解： $6+5+4+3+2+1=(6+1)\times 6\div 2=21$ (个)

解法二：这些三角形有共同的顶点，底边上的线段总数就是三角形的总数。

解： $6+5+4+3+2+1=(6+1)\times 6\div 2=21$ (个)

例 4 数出图中长方形的个数。



分析：(1)AB为长，它上面的线段共有 $4+3+2+1=10$ (条)，AD为宽，所以这个图中长方形的个数是 $10\times 1=10$ (个)

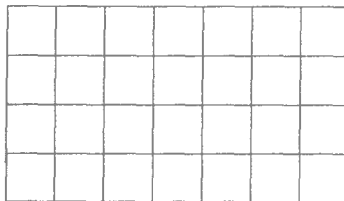
解： $(4+3+2+1)\times 1=10$ (个)

(2)长 AB 上的线段条数 $4+3+2+1=10$ (条)；

宽 AD 上的线段条数 $3+2+1=6$ (条)

所以这个图中长方形的个数是 $10\times 6=60$ (个)

例 5 图中正方形的个数是多少？



分析：这种图形的个数可以用分类的方法数，即依次数出边长为 1 个长度单位，2 个长度单位，3 个长度单位...的正方形个数，然后再把个数相加。

解：(1)边长为 1 个长度单位的正方形的个数是 $7\times 4=28$ (个)

(2)边长为 2 个长度单位的正方形的个数是 $6\times 3=18$ (个)

(3)边长为 3 个长度单位的正方形的个数是 $5\times 2=10$ (个)

(4)边长为 4 个长度单位的正方形的个数是 $4\times 1=4$ (个)

所以共有正方形 $28+18+10+4=60$ (个)

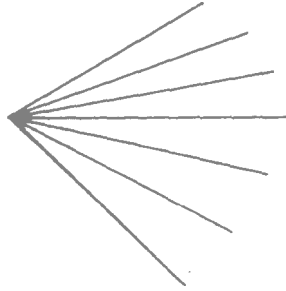
总结：在一般情况下，如长分 m 等份，宽分 n 等份，那么正方形的总数为 $m\times n+(m-1)(n-1)+(m-2)(n-2)+\dots+(m-n+1)\times 1$ 。

我真棒

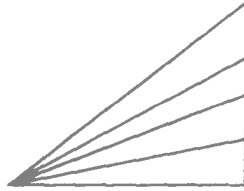
1. 下图有几条线段？



2. 图中有几个角？



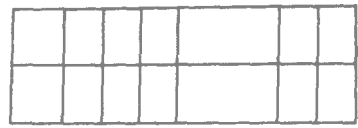
3. 数一数 图中有多少个三角形？



4. 数一数 图中有多少个长方形？

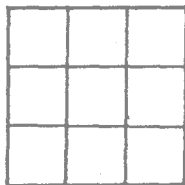


(1)



(2)

5. 下图有多少个正方形？



(1)



(2)

基础训练

1. 数出下列每条线上的线段的总条数。

(1)



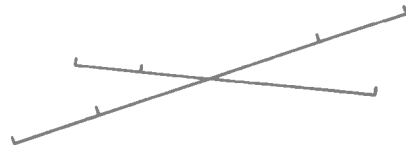
(2)



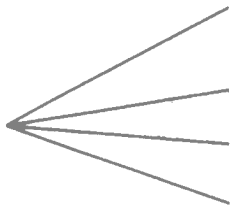
(3)



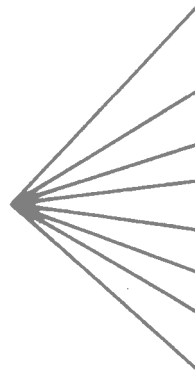
2. 下图共有多少条线段。



3. 数出下列各图中角的个数。

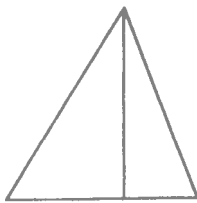


(1)

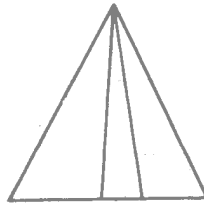


(2)

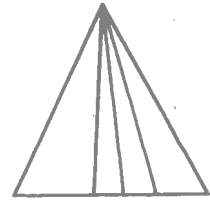
4. 图中各有多少个三角形？



(1)

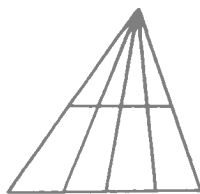


(2)

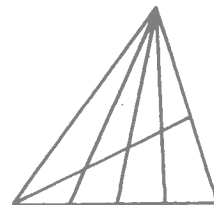


(3)

5. 数一数 三角形有多少个？



(1)



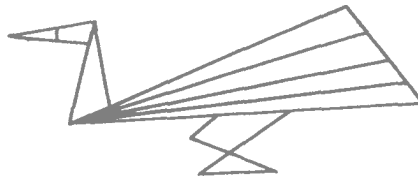
(2)

6. 数出下图中长方形的个数。

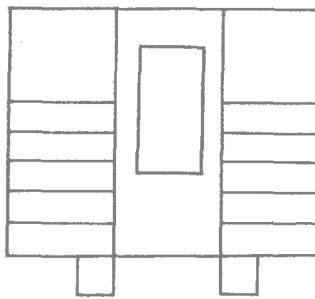


如果横着再添一笔 共有多少个长方形？

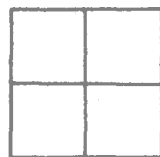
7. 图中共有多少个三角形？



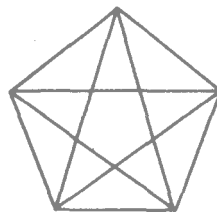
8. 数一数 小明家的衣柜上有多少长方形？



9. 下图中共有多少个正方形？

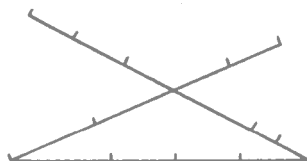


10. 下图中含有几个三角形？

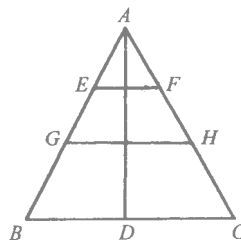


能力提高

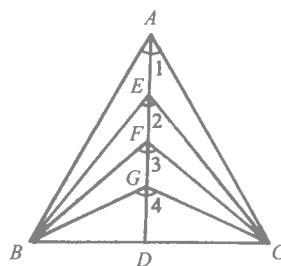
1. 下面图中共有多少条线段？



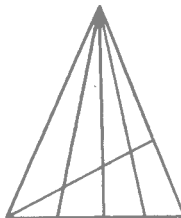
2. 数一数，图中有多少条线段？



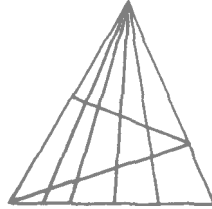
3. 数一数，图中有多少个三角形？



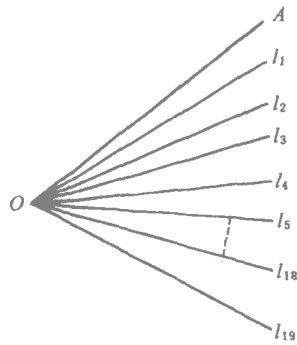
4. 数出图中三角形的个数。



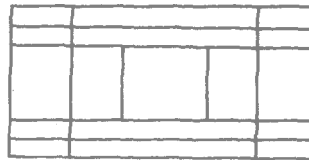
5. 数出图中三角形的个数。



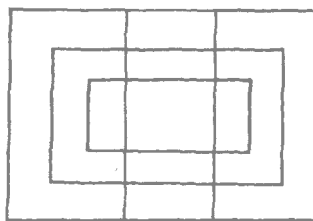
6. 图中有多少个角？



7. 下图中共有几个长方形？



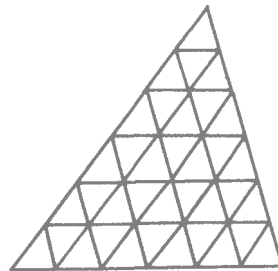
8. 数出图中长方形的个数。



9. 下图中共有几个长方形，五角星放在几个长方形内？



10. 下图中共有多少个三角形？



最后公布结果时，发现他们的预测都只对了一半，请你说出这次竞赛中甲乙丙丁四人的名次。

分析：假设甲说的“丙第一”是正确的，后半句是错的。就可以推出乙的前半句是错的，则后半句必然正确。又可以推出丙的前半句是错的，则后半句必然正确，也就是丙是第三。这又与甲说的“丙第一”产生矛盾，所以假设错误。因此甲说的前半句是错误，后半句正确。即甲第三。由此所以推出丙的前半句是对的，后半句是错的。即丁第二。由此所以推出乙的前半句是对的，后半句是错的。即乙第一。

所以这次比赛中，第一名是乙，第二名是丁，第三名是甲，第四名是丙。

例 4 王英、张林、刘红三人参加全国小学生作文竞赛，他们分别是来自大连、北京、上海的选手，并分别获得一、二、三等奖。现在知道：

- (1) 王英不是大连的选手；
- (2) 张林不是北京的选手；
- (3) 大连的选手不是一等奖；
- (4) 北京的选手得二等奖；
- (5) 张林不是三等奖。

根据上述情况，刘红是（ ）的选手，他得的是（ ）等奖。

分析 为了便于分析，我们画表帮助思考。

	大 连	北 京	上 海
王 英	×	2	
张 林		×	1
刘 红	3		

根据条件 1)(2) 在相应的格中打上“×”。

由条件 4 得出，如果刘红是北京的选手，他得二等奖，那由条件 (3) 可知，大连选手不是一等奖，只能是三等奖。又因为王英不是大连选手，只有张林得三等奖。这与条件 (5) 矛盾。所以刘红不是北京选手，北京选手应该是王英，他得二等奖。这样大连的选手只能是刘红，他得三等奖。

例 5 A、B、C、D、E 共五人参加一次满分为 10 分的考试，每人得分都是整数。

A 说：“我得了 4 分。”

B 说：“5 人中我得分最高。”

C 说：“我的得分是 A 与 D 的平均分。”

D 说：“我的得分是 5 个人的平均分。”

E 说：“我的得分比 C 多 2 分，是第二名。”

问：B 得了多少分？

分析 D 的得分不能比 A 得分少，也不能与 A 得分一样。否则 D 成为 5 人中得分最