小学数学竞赛解题指导

编写　高冠荣

陕西师范大学出版社

目录

第一章　方法归纳与范例 ……………………………………
第二章　最新题型解读 ……………………………………
第三章　速算与巧算 ……………………………………
第四章　数列与数阵 ……………………………………
第五章　数字问题 ……………………………………
第六章　整数问题 ……………………………………
第七章　平面图形 ……………………………………
第八章　立体图形 ……………………………………
第九章　图形的切与拼 ……………………………………
第十章　行程问题 ……………………………………
第十一章　工程问题 ……………………………………
第十二章　分数应用题 ……………………………………
第十三章　典型应用题 ……………………………………
第十四章　列方程解应用题 ……………………………………
第十五章　数论问题 ……………………………………
第十六章　最优与对策 ……………………………………

第十七章　推理问题 ……………………………………………
第十八章　计数问题 ……………………………………………
竞赛模拟题一 ……………………………………………………
竞赛模拟题二 ……………………………………………………
参考答案与提示 …………………………………………………

第一章 方法归纳与范例

1 对应法

对应关系是一种普遍现象,每个对应都是按照一定的规律进行的。日常生活是这样,数学知识也不例外。有些数学题,若按常规方法求解比较困难,这时,我们可以把问题进行适当对应来达到化难为易的目的,这种思维方法被称为对应法。解题时找准数量之间的对应关系,就能实现由未知向已知的转化。

范例 1 甲乙两人同时从东村出发往西村走。当乙走到全程的$\frac{2}{3}$处时,甲离西村还有 5 千米;当乙走到全程的$\frac{4}{5}$处时,甲正好走到西村。求东、西两村的距离。

【过程探究】 由“当乙走到全程的$\frac{4}{5}$处时,甲正好走到西村”可看出:在相同的时间里,乙走的路程是甲走的$\frac{4}{5}$,所以甲走完最后 5 千米的时间里,乙走了:$5\times\frac{4}{5}=4$(千米),这 4 千米所对应的分率是$\left(\frac{4}{5}-\frac{2}{3}\right)$。

$$5\times\frac{4}{5}\div\left(\frac{4}{5}-\frac{2}{3}\right)=30(\text{千米})$$

【答案】 东西两村的距离为 30 千米。

【解题秘诀】 在解行程应用题时,要找准速度、时间和距离之间的对应关系,然后再按照公式“速度×时间=距离”、“速度和×相遇所需时间=原来相隔距离”、“速度差×追及所需时间=追及距离”来计算。

2 转化法

运用转化的方法,转化法可以化难为易,化繁为简,化生为熟,是解决

数学问题的好方法。

范例 2 甲、乙、丙、丁四辆汽车共同运一批货物，甲车运的占其他三辆车运的总数的$\frac{2}{13}$，乙车运的占其他三辆车运货总数的$\frac{1}{4}$，丙车运的占其他三辆车运货总数的$\frac{4}{11}$。已知丁车运了 6 吨，甲、乙、丙各运了多少吨货物？

【探究过程】 题中所有的分率比标准不一样，也就是单位“1”都不同，如果把分率转化为单位“1”相同的分率，解答就容易了。

把四辆车运货总数看成单位“1”，然后把其他分率都转化为四辆车运货的总数。

甲车运货占总数：$\frac{2}{13}\div\left(1+\frac{2}{13}\right)=\frac{2}{15}$

乙车运货占总数：$\frac{1}{4}\div\left(1+\frac{1}{4}\right)=\frac{1}{5}$

丙车运货占总数：$\frac{4}{11}\div\left(1+\frac{4}{11}\right)=\frac{4}{15}$

这四辆车的运货总吨数为：$6\div\left(1-\frac{2}{15}-\frac{1}{5}-\frac{4}{15}\right)=15$（吨）

甲车运货总吨数：$15\times\frac{2}{15}=2$（吨）

乙车运货总吨数：$15\times\frac{1}{5}=3$（吨）

丙车运货总吨数：$15\times\frac{4}{15}=4$（吨）

【答案】 甲、乙、丙车分别运 2 吨、3 吨、4 吨。

【解题秘诀】 将分率不同转化为分率相同是解决分数应用题的关键。

3 列举法

解决问题时，为了解题的方便，把问题分为不重复、不遗漏的有限情况，一一列举出来加以分析、解决，最终达到解决整个问题的目的。这种分析、解决问题的方法叫做列举法。列举法也叫枚举法或穷举法。

范例 3 在 1—1999 这 1999 个数中，有多少个数与 4567 相加时，（至

少有一个数位上）发生进位。

【过程探究】 将 0—1999 这 2000 个数都看成 4 位数（不足 4 位的在前面补 0）。如果与 4567 相加，不发生进位，个位数字只有 0、1、2 这 3 种；十位数字只有 0、1、2、3 这 4 种；百位数字只有 0、1、2、3、4 这 5 种；千位数字只有 0、1 这 2 种，这样可以用乘法原理先算出与 4567 相加时不发生进位的个数，从而得解。

与 4567 相加时不发生进位的有：$3\times4\times5\times2=120$（种）

从而 1—1999 中，与 4567 相加时发生进位的有：$2000-120=1880$（个）

【解答】 有 1880 个数与 4567 相加时发生进位。

【解题秘诀】 欲进则先退，以退为进！此题直接解答，有一定的困难，而是间接的先求出不进位的个数使问题大大简化。

4 归纳法

从个别的现象以求概括定律的步骤，叫做归纳法。归纳法是研究数学的一把钥匙，是发现规律、探求结论的一种重要手段。

范例 4 自然数按从小到大的顺序排成螺旋形，在 2 处拐第一弯，在 3 处拐第二弯，在 5 处拐第三弯……问拐第 20 个弯的地方是哪个数？

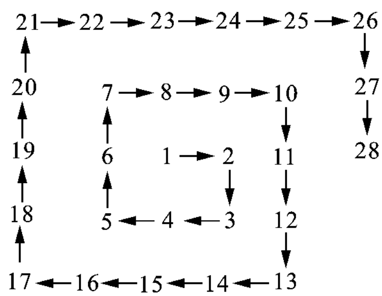

图 1-1

【过程探究】 将各个拐弯处的数写成一个数列：1，2，3，5，7，10，13，17，21，26，…相邻两个数的差依次是 1，1，2，2，3，3，4，4，…因此此题得解。

拐第 20 个弯的地方的数是：$1+1+2+2+3+3+\cdots+9+9+10+10=111$。

【答案】 111。

【解题秘诀】 从螺旋形排列中提取出拐弯处的各个数行程数列，并发现该数列的规律是解答的关键。

5 列表法

列表法是将题目的条件或是解决问题的思路用列表的形式反映出来。这样可以有序思维、发现规律，从而探究出解题方法和结果。

范例 5 在国际饭店的宴会桌旁，甲、乙、丙、丁四位朋友正进行交谈，他们分别用了汉语、英语、法语、日语四种语言，请根据下面的情况，判断他们各会什么语言？

1. 甲、乙、丙各会两种语言，丁只会一种语言；
2. 有一种语言四人中有三人都会；
3. 甲会日语，丁不会日语，乙不会英语；
4. 甲与丙，丙与丁不能直接交谈，乙与丙可以直接交谈；
5. 没有人既会日语，又会法语。

【过程探究】 这是一道逻辑推理题，本题的题意虽不难理解，但涉及到 4 个人与四种语言，条件多而复杂，即使读了几遍题目，也难以把条件全部记牢，更不要说直接判断了，我们可以把甲、乙、丙、丁各人和所会的语言列成表格加以分析，若某人会某种语言，则打“√”，若不然，则打“×”：

	汉语	英语	法语	日语
甲	√	×	×	√
乙	√	×	√	×
丙	×	√	√	×
丁	√	×	×	×

由 3 可知，甲的日语格上打“√”，丁的日语格上打“×”，乙的英语格上打“×”；

由 5 可知，甲的法语格上打“×”，

由 4 可知，甲与丙不能直接交谈，丙的日语格上打“×”；

由 2 和 4 可知，丙与丁不能直接交谈，三人都会的语言不可能是英语和法语，只可能是汉语；由 4 可知，甲与丙不能直接交谈，甲的汉语格上打

“√”，乙的汉语格上打“√”，丙的汉语格上打“×”，丁的汉语格上打“√”；

由1可知，甲的英语格上打“×”，丁的英语格上打“×”，丁的法语格上打“×”；

由4可知，乙与丙可以直接交谈，乙的法语格上打“√”，丙的法语格上打“√”；

由1可知，乙的日语格上打“×”，丙的英语格上打“√”。

【答案】 甲会汉语、日语，乙会汉语、法语，丙会英语、法语，丁只会汉语。

【解题秘诀】 条件用列表的方式进行梳理，可以找出已知条件间相互的联系和发现隐含条件，使分析思维过程更有条理，解题过程更加简明直观。

6 赋值法

赋值法是在解数学题时，将问题中的某些对象用适当的数表示，再进行运算、推理，使抽象的问题转化为具体的计算。

范例6 甲、乙两辆汽车的速度之比是13∶11，如果甲、乙两车分别由A、B两地同时出发相向而行，0.5小时后相遇，如果它们同时同向而行，那么甲车追上乙车需要多少小时？

【过程探究】 初一看，这题比较抽象，A、B两地间的路程是未知的，甲、乙两车的速度也是未知的。我们可以把甲、乙两车的速度看作是每小时13个单位和11个单位，那么A、B两地间的路程就具体化了。

【解答】 $(13+11)\times0.5=12$（单位）

$12\div(13-11)=6$（小时）

【解题秘诀】 把抽象的问题具体化，赋予它一定的数值，就把复杂的问题变为比较简单的行程问题了。

7 代数法

首先用字母表示数，建立一个含有字母的数量关系式，然后通过对数量关系式的分析、推理或计算，寻求问题的答案。从而顺利地实现由未知向已知的转化。

范例7 口袋里有若干红球和白球。如果取走一个红球，则口袋中的红球占$\frac{2}{7}$；如果取走的不是一个红球而是2个白球，则口袋中的白球占

$\frac{2}{3}$。问:原来口袋中的白球比红球多多少个?

【过程探究】 从题目的问题来看,我们要算出原来口袋中的白球和红球的个数,然而,从红球和白球的情况来分析,这 2 种球都在不断的变化,所以很难用一个未知数来表示它们的变化情况,所以发现无论红球和白球怎样变化,都是与袋中原有总个数有关系,所以袋中原有红白球总个数为关键量。

【解答】 设口袋中原来共有 x 个球

∵取走一个球,∴袋中球的决数为$(x-1)$个。

此时,红球占有总个数的$\frac{2}{7}$,即$(x-1)\times\frac{2}{7}$

∴红球原有个数为$(x-1)\times\frac{2}{7}+1$

同理:白球原有个数为$(x-2)\times\frac{2}{3}+2$

$\therefore (x-1)\times\frac{2}{7}+1+(x-2)\times\frac{2}{3}+2=x$

$\frac{2}{7}x-\frac{2}{7}+1+\frac{2}{3}x-\frac{4}{3}+2=x$

$\frac{2}{7}x+\frac{2}{3}x+1+2-\frac{2}{7}-\frac{4}{3}=x$

$\frac{20}{21}x+3-\left(\frac{2}{7}+\frac{4}{3}\right)=x$

$\frac{20}{21}x+\frac{29}{21}=x$

$x-\frac{20}{21}x=\frac{29}{21}$

$x=29$

则原红球为$(29-1)\times\frac{2}{7}+1=9$(个)

原白球为$(29-2)\times\frac{2}{3}+2=20$(个)

∴白球比红球多

20－9＝11(个)

【解题秘诀】 此题关键是找到题中的关键量并含有字母的式子表示出关键量的前后变化情况以及与红白球的个数的关系，再者要会用含有字母的式子表示原有红球与白球的个数。

8 构造法

假如有人提出这样的问题：有全体约数的和等于自身两倍的自然数吗？我们的回答是肯定的，因为6的约数1，2，3，6的和恰好为12，即6的2倍。这就足以表明存在一种自然数，它的全体约数的和正好是自身的两倍。

假如有人认为：若干个2的乘积加1，一定是质数，我们可以指出这个结论是错误的，因为2×2×2＋1＝9不是质数。

上述作法好比造句，按照要求，造出一个句子，句中含有某个指定的词，我们称这种作法为“构造”。不少数学问题正是要求构造出一个具体的对象，肯定或否定所提出的结论。

范例8 在1到100这100个自然数中，找到10个自然数，使得它们的倒数和是1。

【过程探究】 要使10个分子为1的分数之和恰好为十分“简洁”的结果1，并非容易的事。回想一下，我们曾用拆项相消的方法，巧妙地对下列式子进行运算：

$$\frac{1}{1\times2}+\frac{1}{2\times3}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}=\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)=1-\frac{1}{n+1},$$

稍加变化，有

$$\frac{1}{1\times2}+\frac{1}{2\times3}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}+\frac{1}{n+1}=1$$

于是取$n=9$，就有

$$\frac{1}{1\times2}+\frac{1}{2\times3}+\cdots+\frac{1}{9\times10}+\frac{1}{10}=1$$

即

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\cdots+\frac{1}{90}+\frac{1}{10}=1$$

所以 2,6,12,20,30,42,56,72,90,10 为所求。

【答案】 2,6,12,20,30,42,56,72,90,10。

9 等积变换法

利用等高等底等面积的定理,找出图形与图形之间的关系,从而寻求解答方法。另外可利用几何变换的原理,把原图转化,使它重新组合成与原图形面积相等的、已知条件具备的新图形。

范例 9 如图 1-2,将三角形 ABC 的 BA 边延长 1 倍到 D,CB 延长 2 倍到 E,AC 边延长 3 倍到 F。如果三角形面积等于 2 平方厘米,那么三角形 DEF 的面积是多少?

【过程探究】 已知三角形 ABC 的面积,如何找到$\triangle DEF$ 的面积与已知$\triangle ABC$ 的面积关系是一个关键,如图 1-3,连接 AE、BF、CD。在三角形 BCD 中,$S_{\triangle ABC}=S_{\triangle ACD}$,都是 2 厘米。在三角形 CDF 中,因为 CF 是 AC 的 3 倍,所以 $S_{\triangle CDF}=3S_{\triangle ACD}$,同样 $S_{\triangle BCF}=3S_{\triangle ABC}$,$S_{\triangle ABE}=2S_{\triangle ABC}$,$S_{\triangle BEF}=2S_{\triangle BCF}$,这样,$S_{\triangle BEF}=6S_{\triangle ABC}$。

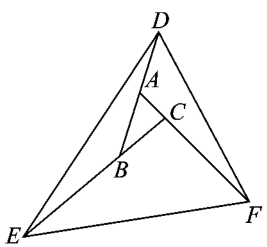

图 1-2

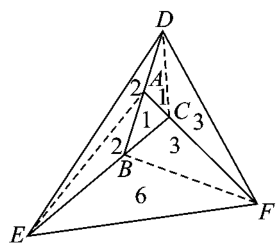

图 1-3

【解答】 设 $S_{\triangle ABC}$ 为 1 份数,那么 $S_{\triangle DEF}$ 为:

$1+1+2+2+3+3+6=18$(份)

$\because S_{\triangle ABC}=2$(平方厘米)

$\therefore 2\times18=36$(平方厘米)

所以,三角形 DEF 的面积是 36 平方厘米。

【解题秘诀】 解决此题要使已知$\triangle ABC$ 建立在同一个三角形中,在与之等高的前提下,弄清与之的面积关系。

10 巧用质因数

分解质因数是把一个合数用质因数相乘的形式表示出来，通常在已知几个数的乘积，要分别求这几个数是多少，一般可以用分解的质因数的方法。

范例 10 小明参加了今年的中学生数学竞赛，妈妈问小明："这次竞赛你得了多少分？获得第几名？"小明告诉她："我得的名次和我的岁数及我的分数乘起来是 2910，你看我的成绩和名次各是多少？"

【过程探究】 因为 2910 是名次、岁数与分数的乘积，遇到乘积我们先分解质因数 $2910=2\times3\times5\times97$。

由于小明是中学生，不可能是 2 岁，3 岁，5 岁。也不可能是 6 岁，10 岁。因此可以肯定小明是 $3\times5=15$ 岁，则名次是第 2，成绩是 97 分。

$2910=2\times3\times5\times97$。试验可得 $2910=2\times15\times97$。

【答案】 小明今年 15 岁，考了 97 分，得了第 2 名。

【解题秘诀】 一般来说，"已知几个质因数的积，求这几个因数"可以用分解质因数，然后再将持因数适当调配成符合题意的情况。简而言之就是"遇到乘积分解质因数。"

第二章 最新题型解读

探索开放型试题是指题目给定的条件不完备,或解题的方向不明确,或解题方法不固定,需要从多层面、多方位探索与题目有关的知识而获得解决的试题。这类试题是以考查学生应用数学知识综合分析和解决问题的能力为基点,从较高尺度上对学生的知识和能力进行考核,是课程改革和素质教育中以“双基”为本,培养学生分析和解决问题的能力,开发学生智力,培养发散思维能力的首选题型。这类试题由于具有综合性、多变性、联动性、散射性等特点,深受大家的喜爱。

题型1 条件开放型

范例1 下列表格显示某五天数学书的销售量。试求数学书在星期二的销售量。

图 2-1

星期一,星期二,星期三	115
星期三,星期四	85
星期二,星期四	90
星期一,星期五	70
星期四,星期五	80

【过程探究】 本题实际属于条件的开放,选择不同条件解决问题,得到的解法也不同。仔细观察后发现本题就是一个消去问题,根据不同条件的整合处理消去不需要的内容条件,从而解决问题。

【解答】 分别设星期一、星期二、星期三、星期四、星期五的数学书销

售量分别为 a、b、c、d、e,可得下列等式

(1)式:$a+b+c=115$

(2)式:$c+d=85$

(3)式:$b+d=90$

(4)式:$a+e=70$

(5)式:$d+e=80$

解法一:用(2)式+(4)式-(5)式,即

$(c+d)+(a+e)-(d+e)=85+70-80$

得:$a+c=75$　(6)式

用(1)式—(6)式,得:

$(a+b+c)-(a+c)=115-75$

$b=40$ 即星期二数学书销的售量

解法二:用(1)式+(5)式-(2)式-(4)式,即

$(a+b+c)+(d+e)-(c+d)-(a+e)=115+80-85-70$

$b=40$ 即星期二数学书的销售量

(注:本题还有其他解法不一一例举了)

题型2 思维开放型

范例2　小明从甲地去乙地办事,前一半路程步行,后一半路程乘车。办完事后,小明沿原路返回,前$\frac{1}{3}$的时间乘车,剩下的时间步行。已知去比回来时共多用2小时,步行每小时5千米,乘车每小时15千米。问:甲、乙两地相距多少千米?

【过程探究】 本题信息量很大,致使许多学生感觉无从下手,一片盲然,因此系统而有机的整理出这些信息成为解决本题的关键。根据将返回时乘车与步行的时间和乘车与步行的速度,有机的整合可以求出返回时步行与乘车的路程比。或将去时步行与乘车的路程和步行与乘车的速度,有机的整合又可以求出去时的时间比,正是因为信息处理的着眼点不同,从而导致解决问题的方法不同,下面就介绍几种此题的解决方法(思维方法开放)

【解答】　方法一:返回时步行与乘车的路程比$=\left(\frac{2}{3}\times5\right)$:

$\left(\frac{1}{3}\times 15\right)=2:3$

解：设甲、乙两地相距 x 千米，根据题意可得方程：

$$\frac{1}{2}x\div 5+\frac{1}{2}x\div 15=\frac{2}{5}x\div 5+\frac{3}{5}x\div 15+2$$

$$\frac{1}{75}x=2$$

$$x=150$$

方法二：返回时步行与乘车的路程比$=\left(\frac{2}{3}\times 5\right):\left(\frac{1}{3}\times 15\right)=2:3$

将全程看作 5 份

去时全程共用时间的份数为 $5\div 2\div 5+5\div 2\div 15=\frac{2}{3}$（份）

返回时全程共用时间的份数为 $2\div 5+3\div 15=\frac{3}{5}$（份）

返回时全程共用的时间为 $2\div\left(\frac{2}{3}-\frac{3}{5}\right)\times\frac{3}{5}=18$（小时）

返回时步行的时间为 $18\times\left(1-\frac{1}{3}\right)=12$（小时）

返回时乘车的时间为 $18\times\frac{1}{3}=6$（小时）

甲、乙两地的距离为 $15\times 6+5\times 12=150$（千米）

故甲、乙两地相距 150 千米，你还能想出别的方法吗？试试看。

范例 3　团体游园购买公园门票的票价表如下：

购票人数	50 人以下	51～100 人	100 以下
每人门票价	12 元	10 元	8 元

今有甲、乙两旅游团，若分别购票，两团总计应付门票费 1142 元，如合在一起作为一个团体购票，总计只应付门票费 864 元，这两个旅游团各多少人？

【过程探究】　本题看似不难，很容易求出两个旅游团的总人数，但要区分出两个旅游团各自的人数，则不容易。需要从开放的思维中，有条理的整理出有用的信息，进而解决问题。让我们一起来经历一下解决本题的

过程吧。

【解答】 因为 $864>8\times100$,可知两团总人数超过 100 人,因而两团总人数为 $864\div8=108$(人)。

因为 $108\times10=1080<1142$,$108\times12=1296>1142$。所以每个团的人数不会都多于 50 人,也不会都少于 50 人,即一个团多于 50 人,另一个团小于 50 人。假设两个团都多于 50 人,则分别付款时,应付 $108\times10=1080$(元),实际多付了 $1142-1080=62$(元)。这是少于 50 人的旅游团多付的钱。

因此,这个旅游团的人数为:$62\div(12-10)=31$(人),

另一个旅游团的人数为:$108-31=77$(人)。

范例 4 我们用过的本子,看过的报纸等纸品,都可以回收再利用。如果 1 吨纸品回收后又可以制成 0.4 吨纸品,用完后还可以照此关系再次回收再造。问:3 吨纸品反复地回收再利用,最多可以当几吨纸品使用?

【过程探究】 本题趣味性较强,解法也相对比较独特,可能有些学生还会提出疑问,既然可以反复回收再利用,虽然每次回收后再造纸品产量降低,但这样反复回收,不是会永远也用不完吗?是的,按此推理其实它是一个等比数列求和,可是同学们平常学习中是没有学过的,看来此种方法是可以解决问题,但学生不易接受,不如换个角度考虑。先听一个小故事吧:采购员小王需采购 1 吨纸品,他听说某纸品店打出广告,本店出售的纸品用完后无偿回收再造并免费赠送给采购者,于是小王想了个点子,与店老板协商说:我出 0.6 吨纸品的钱,你先给我 1 吨纸品使用,过两天一定把剩余的钱送上。老板同意了。可是几天过去小王并没有送还剩余纸品钱,相反还拖来了一吨废纸品,小王还振振有词地说:“你不是讲可以回收再造吗?正好 0.4 吨好纸品还你了。”老板听完后,气得哑口无言。同学们听完故事可能感觉挺有趣,但不知道这个故事对解决本题有什么帮助,其实正是因为这个小故事给我们开启了智慧的大门,找到了解决问题的关键,那就是一个关系:买 0.6 吨纸品最多可以当 1 吨纸品使用,你明白了吗?

【解答】 列表:

买	用
0.6 吨	1 吨
3 吨	? 吨

根据关系可得 $3 \div 0.6 \times 1 = 5$(吨)

所以3吨纸品照此反复回收再利用最多可当5吨纸品使用。

题型3 解法开放型

范例5 两名运动员练习跑步,他们在长为120米的跑道两端同时出发,来回跑,甲每秒跑5米,乙每秒跑6米,来回一共跑了5分钟,问:如果不计转向时间,他们在这段时间里一共遇上了几次?

【过程探究】 此类问题非常常见,一般利用图解与周期来解决。这里我们来探索另一种解决方法。首先我们需要研究一下相遇的方式,有迎面相遇(简称面遇),有追赶相遇(简称追遇),值得一提的是在端点处相遇,既可以理解为面遇,也可以理解为追遇,故单独考虑(简称端点遇)。对于面遇大家都知道规律,除第一次面遇二人合走一个全程外,以后每一次面遇均合走两个全程,而追遇是第一次追上时,快的比慢的多行一个全程,以后每一次追上时,快的比慢的多行两个全程。那么是否会出现端点遇,需要介绍一下,当两者速度最简比的奇偶性不同时一定会出现端点遇。下面就这两种解法具体如下。(解法开放)

【解答】 方法一:$120 \div 5 = 24$(秒) $120 \div 6 = 20$(秒)

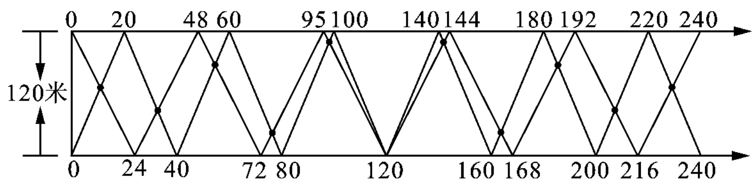

图 2-2

由图可知240秒即4分钟时两人又同时回到各自的出发地,可以看做一个周期相遇了11次,剩下的1分钟里又相遇了3次,故一共遇上了 $11 + 3 = 14$(次)

方法二:5分钟 $= 300$ 秒

一:面遇:$120 \div (5+6) = 10\frac{10}{11}$(秒)

$\left(300 - 10\frac{10}{11}\right) \div \left(10\frac{10}{11} \times 2\right) = 13$(次)(去尾取整)

面遇次数:$13 + 1 = 14$(次)